北京市西城区 2016 年高三一模试卷

数学（文科）2016.4

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 6 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效．考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回．

第Ⅰ卷（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设集合 $A=\{x\,|\,x^2\leqslant 4x\}$，集合 $B=\{-1，2，-3，4\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{-1，2\}$　　B．$\{2，4\}$

C．$\{-3，-1\}$　　D．$\{-1，2，-3，4\}$

2．设命题 $p:\exists x>0$，$\sin x>2^x-1$，则 $\neg p$ 为

A．$\forall x>0$，$\sin x\leqslant 2^x-1$　　B．$\exists x>0$，$\sin x<2^x-1$

C．$\forall x>0$，$\sin x<2^x-1$　　D．$\exists x>0$，$\sin x\leqslant 2^x-1$

3．如果 $f(x)$ 是义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，那么下列函数中，一定为偶函数的是

A．$y=x+f(x)$　　B．$y=xf(x)$

C．$y=x^2+f(x)$　　D．$y=x^2f(x)$

4．下面茎叶图表示的是甲、乙两个篮球队在 3 次不同比赛中的得分情况，其中有一个数字模糊不清，在图中以 m 表示。若甲队的平均得分不低于乙队的平均得分，那么 m 的可能取值集合为

A．$\{2\}$　　B．$\{1，2\}$　　C．$\{0，1，2\}$　　D．$\{2，3\}$

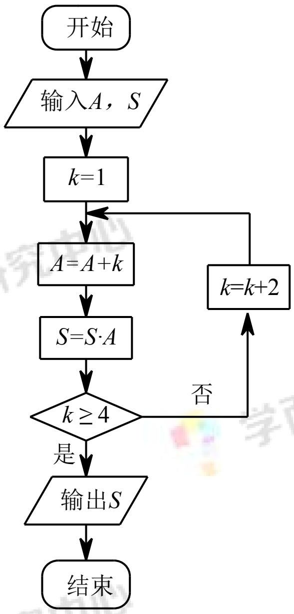
甲队		乙队
8	8	
3　2	9	0　1　m

5．在平面直角坐标系 xOy 中，向量 $\overline{OA}=(-1，2)$，$\overline{OB}=(2，m)$，若 O，A，B 三点能构成三角形，则

A．$m=-4$　　B．$m\neq -4$　　C．$m\neq 1$　　D．$m\in\mathbf{R}$

6．执行如图所示的程序框图，若输入的 A，S 分别为 0，1，则输出的 $S=$

A．4　　B．16　　C．27　　D．36



7．设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+x-a$，则“$a\in(1,3)$”是“函数 $f(x)$ 在 $(2,8)$ 上存在零点”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

8．在某校冬季长跑活动中，学校要给获得一、二等奖的学生购买奖品，要求花费总额不得超过 200 元．已知一等奖和二等奖奖品的单价分别为 20 元、10 元，一等奖人数与二等奖人数的比值不得高于 $\frac{1}{3}$，且获得一等奖的人数不能少于 2 人，那么下列说法中错误的是

A．最多可以购买 4 份一等奖奖品

B．最多可以购买 16 份二等奖奖品

C．购买奖品至少要花费 100 元

D．共有 20 种不同的购买奖品方案

第II卷（非选择题共 110 分）

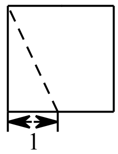
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．在复平面内，复数 z_1 与 z_2 对应的点关于虚轴对称，且 $z_1=-1+\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=$_____．

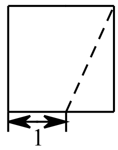
10．在△ABC 中，$b=\sqrt{7}$，$a=3$，$\tan C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $c=$________．

11．若圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$ 的渐近线相切，则 $a=$_____；双曲线 C 的渐近线方程是______．

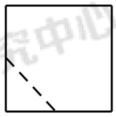
12．一个棱长为 2 的正方体，被一个平面截去一部分后，所得几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为______.



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

13．有三个房间需要粉刷，粉刷方案要求：每个房间只用一种颜色的涂料，且三个房间的颜色各不相同．三个房间的粉刷面积和三种颜色的涂料费用如下表：

房间 A	房间 B	房间 C
35m^2	20m^2	28m^2

涂料 1	涂料 2	涂料 3
16 元 $/\text{m}^2$	18 元 $/\text{m}^2$	20 元 $/\text{m}^2$

那么在所有不同的粉刷方案中，最低的涂料总费用是______元.

14．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}+1, & x\geqslant 4,\\ \log_2 x, & 0<x<4,\end{cases}$ 则 $f(8)=$______；若 $f(a)=f(b)=c$，$f'(b)<0$，则 a，b，c 的大小关系是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（本小题满分 13 分）

设函数 $f(x)=\sin x\cos x-\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值与最小值.

16．（本小题满分 13 分）

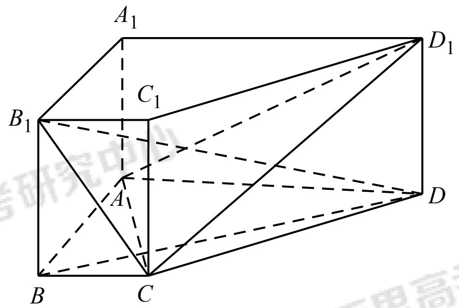
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d<0$，$a_2+a_6=10$，$a_2a_6=21$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $b_n=2^{a_n}$，记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的乘积为 T_n，求 T_n 的最大值.

17．（本小题满分 14 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $BB_1\perp$ 底面 $ABCD$， $AD\,//\,BC$， $\angle BAD=90^\circ$，$AC\perp BD$．



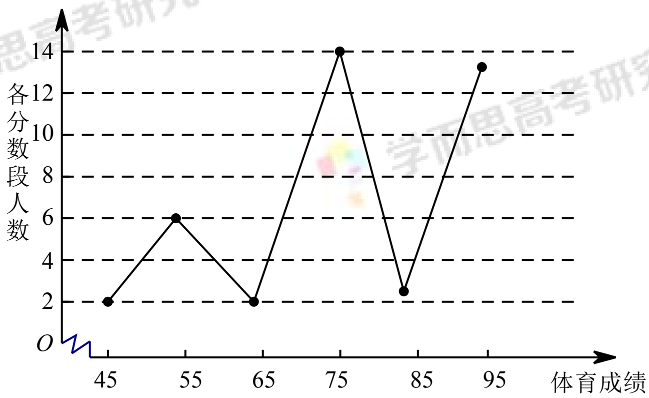
（Ⅰ）求证： $B_1C\,//$ 平面 ADD_1A；

（Ⅱ）求证： $AC\perp B_1D$；

（Ⅲ）若 $AD=2AA_1$，判断直线 B_1D 与平面 ACD_1 是否垂直？并说明理由．

18．（本小题满分 13 分）

某校高一年级学生全部参加了体育科目的达标测试，现从中随机抽取 40 名学生的测试成绩，整理数据并按分数段 $[40,50)$， $[50,60)$， $[60,70)$， $[70,80)$， $[80,90)$，$[90,100]$ 进行分组．假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，则得到体育成绩的折线图（如下）．



（Ⅰ）体育成绩大于或等于 70 分的学生常被称为“体育良好”．已知该校高一年级有 1000 名学生，试估计高一全年级中“体育良好”的学生人数；

（Ⅱ）为分析学生平时的体育活动情况，现从体育成绩在 $[60,70)$ 和 $[80,90)$ 的样本学生中随机抽取 2 人，求在抽取的 2 名学生中，至少有 1 人体育成绩在 $[60,70)$ 的概率；

（III）假设甲、乙、丙三人的体育成绩分别为a，b，c，且分别在$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$三组中，其中a，b，$c\in\mathbf{N}$．当数据a，b，c的方差s^2最大时，写出a，b，c的值．（结论不要求证明）

（注：$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2\right]$，其中$\bar{x}$为数据$x_1$，$x_2$，…，$x_n$的平均数）

19．（本小题满分 14 分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{3m}+\frac{y^2}{m}=1(m>0)$的长轴长为$2\sqrt{6}$，$O$为坐标原点．

（Ⅰ）求椭圆C的方程和离心率；

（Ⅱ）设动直线l与y轴相交于点B，点$A(3,0)$关于直线l的对称点P在椭圆C上，求$|OB|$的最小值．

20．（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=x\ln x+ax^2-1$，且$f'(1)=-1$．

（Ⅰ）求$f(x)$的解析式；

（Ⅱ）若对于任意$x\in(0,+\infty)$，都有$f(x)-mx\leqslant -1$，求m的最小值；

（III）证明：函数$y=f(x)-xe^x+x^2$的图象在直线$y=-2x-1$的下方．

北京市西城区 2016 年高三一模试卷参考答案及评分标准

高三数学（文科）

2016.4

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B
2. A
3. B
4. C
5. B
6. D
7. A
8. D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. -2

10. 2

11. $\sqrt{3}$　　$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

12. $\frac{23}{3}$

13. 1464

14. $\frac{3}{2}$　　$b>a>c$

注：第 11，14 题第一问 2 分，第二问 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

【解析】(1)因为 $f(x)=\sin x\cos x-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$　（4 分）

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$=\sin 2x-\frac{1}{2}.$$　（6 分）

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.　（7 分）

(2)由(1)，得 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}$.　（8 分）

因为 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

所以 $-\frac{\pi}{3} \leqslant 2x-\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{2\pi}{3}$,

所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant 1$.

所以 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \leqslant \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. （11 分）

且当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 取到最大值 $\frac{1}{2}$;

当 $x=0$ 时，$f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 取到最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$. （13 分）

16.（本小题满分 13 分）

【解析】(1)由题意，得 $\begin{cases}(a_1+d)+(a_1+5d)=10, \\ (a_1+d)(a_1+5d)=21.\end{cases}$ （3 分）

解得 $\begin{cases}a_1=8, \\ d=-1.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=2, \\ d=1\end{cases}$（舍）. （5 分）

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=9-n$. （7 分）

(2)由(1)，得 $b_n=2^{9-n}$.

所以 $T_n=2^{a_1}\times 2^{a_2}\times\cdots\times 2^{a_n}=2^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$.

所以只需求出 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的最大值. （9 分）

由(1)，得 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times(-1)=-\frac{n^2}{2}+\frac{17}{2}n$.

因为 $S_n=-\frac{1}{2}\left(n-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{289}{8}$. （11 分）

所以当 $n=8$，或 $n=9$ 时，S_n 取到最大值 $S_8=S_9=36$.

所以 T_n 的最大值为 $T_8=T_9=2^{36}$. （13 分）

17.（本小题满分 14 分）

【解析】(1)因为 $AD \parallel BC$，$BC \not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$AD \subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $BC \parallel$ 平面 ADD_1A_1. （2 分）

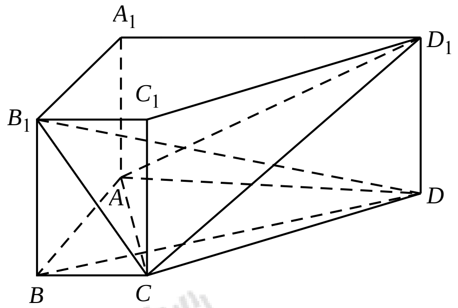
因为 $CC_1 \parallel DD_1$，$CC_1 \not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$DD_1 \subset$ 平面 ADD_1A_1，

所以 $CC_1 \parallel$ 平面 ADD_1A_1.

又因为 $BC \cap CC_1=C$，

所以平面 $BCC_1B_1 \parallel$ 平面 ADD_1A_1. （3 分）

又因为 $B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1.



所以 B_1C // 平面 ADD_1A_1 .　　（4 分）

(2)因为 $BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$， $AC \subset$ 底面 $ABCD$，

所以 $BB_1 \perp AC$.　　（5 分）

又因为 $AC \perp BD$， $BB_1 \cap BD = B$，

所以 $AC \perp$ 平面 BB_1D .　　（7 分）

又因为 $B_1D \subset$ 底面 BB_1D .

所以 $AC \perp B_1D$.　　（9 分）

(3)直线 B_1D 与平面 ACD_1 不垂直.　　（10 分）

证明：假设 $B_1D \perp$ 平面 ACD_1，

由 $AD_1 \subset$ 平面 ACD_1，得 $B_1D \perp AD_1$.　　（11 分）

由棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$， $\angle BAD = 90°$

可得 $A_1B_1 \perp AA_1$， $A_1B_1 \perp A_1D_1$.

又因为 $AA_1 \cap A_1D_1 = A_1$.

所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 AA_1D_1D .

所以 $A_1B_1 \perp AD_1$.　　（12 分）

又因为 $A_1B_1 \cap B_1D = B_1$.

所以 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1D .

所以 $AD_1 \perp A_1D$.　　（13 分）

这与四边形 AA_1D_1D 为矩形，且 $AD = 2AA_1$ 矛盾.

故直线 B_1D 与平面 ACD_1 不垂直.　　（14 分）

18.（本小题满分 13 分）

【解析】(1)由折线图，知样本中体育成绩大于或等于 70 分的学生有 30 人.　　（2 分）

所以该校高一年级学生中，“体育良好”的学生人数大约有 $1000 \times \dfrac{30}{40} = 750$ 人.

（5 分）

(2)设“至少有 1 人体育成绩在 $[60, 70)$”为事件 M .　　（5 分）

记体育成绩在 $[60, 70)$ 的数据为 A_1，A_2，体育成绩在 $[80, 90)$ 的数据为 B_1，B_2，B_3，则从这两组数据中随机抽取 2 个，所有可能的结果有 10 种，它们是：(A_1, A_2)，(A_1, B_1)，(A_1, B_2)，(A_1, B_3)，(A_2, B_1)，(A_2, B_2)，(A_2, B_3)，(B_1, B_2)，(B_1, B_3)，(B_2, B_3) .

而事件 M 的结果有 7 种，它们是：(A_1, A_2)，(A_1, B_1)，(A_1, B_2)，(A_1, B_3)，(A_2, B_1)，(A_2, B_2)，(A_2, B_3) .　　（7 分）

因此事件 M 的概率 $P(M) = \dfrac{7}{10}$.　　（9 分）

(3) a，b，c 的值分别是为 70，80，100.（13 分）

19.（本小题满分 14 分）

【解析】(1)因为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{3m}+\dfrac{y^2}{m}=1$.

所以 $a^2=3m$，$b^2=m$.（1 分）

故 $2a=2\sqrt{3m}=2\sqrt{6}$，解得 $m=2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.（3 分）

因为 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$.

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.（5 分）

(2)由题意，直线 l 的斜率存在，设点 $P(x_0，y_0)(y_0\neq0)$.

则线段 AP 的中点 D 的坐标为 $\left(\dfrac{x_0+3}{2},\ \dfrac{y_0}{2}\right)$.

且直线 AP 的斜率 $k_{AP}=\dfrac{y_0}{x_0-3}$.（7 分）

由点 $A(3，0)$ 关于直线 l 的对称点为 P，得直线 $l\perp AP$.

故直线 l 的斜率为 $-\dfrac{1}{k_{AP}}=\dfrac{3-x_0}{y_0}$，且过点 D.

所以直线 l 的方程为：$y-\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{3-x_0}{y_0}\left(x-\dfrac{x_0+3}{2}\right)$ 9 分

令 $x=0$，得 $y=\dfrac{x_0^2+y_0^2-9}{2y_0}$，则 $B\left(0，\dfrac{x_0^2+y_0^2-9}{2y_0}\right)$，

由 $\dfrac{x_0^2}{6}+\dfrac{y_0^2}{2}=1$，得 $x_0^2=6-3y_0^2$，

化简，得 $B\left(0，\dfrac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right)$. 11 分

所以 $|OB|=\left|\dfrac{-2y_0^2-3}{2y_0}\right|$

$=|y_0|+\dfrac{3}{2|y_0|}$

$\geqslant 2\sqrt{|y_0|\times\dfrac{3}{2|y_0|}}$

$=\sqrt{6}$ 13 分

当且仅当 $|y_0|=\dfrac{3}{2|y_0|}$，即 $y_0=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\in\left[-\sqrt{2}，\sqrt{2}\right]$ 时等号成立.

所以 $|OB|$ 的最小值为 $\sqrt{6}$. 14 分

20.（本小题满分 13 分）

【解析】(1)对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=1+\ln x+2ax$， 1 分

所以 $f'(1)=1+2a=-1$，解得 $a=-1$，

所以 $f(x)=x\ln x-x^2-1$. 3 分

(2)由 $f(x)-mx\leqslant -1$，得 $x\ln x-x^2-mx\leqslant 0$，

因为 $x\in(0,+\infty)$.

所以对于任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $\ln x-x\leqslant m$. 4 分

设 $g(x)=\ln x-x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$. 5 分

当 x 变化时，$g(x)$ 与 $g'(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

所以当 $x=1$ 时, $g(x)_{\max}=g(1)=-1$. …………7 分

因为对于任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $g(x)\leqslant m$ 成立.

所以 $m\geqslant -1$.

所以 m 的最小值为 -1. …………8 分

(3)"函数 $y=f(x)-xe^x+x^2$ 的图象在直线 $y=-2x+1$ 的下方"等价于

"$f(x)-xe^x+x^2+2x+1<0$"

即要证 $x\ln x-xe^x+2x<0$.

所以只要证 $\ln x<e^x-2$.

由(2)，得 $g(x)=\ln x-x\leqslant -1$，即 $\ln x\leqslant x-1$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立）.

所以只要证明当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x-1<e^x-2$ 即可. …………10 分

设 $h(x)=(e^x-2)-(x-1)=e^x-x-1$.

所以 $h'(x)=e^x-1$. 令 $h'(x)=0$，解得 $x=0$

由 $h'(x)>0$，得 $x>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

所以 $h(x)>h(0)=0$，

即 $x-1<e^x-2$，

所以 $\ln x<e^x-2$.

故函数 $y=f(x)-xe^x+x^2$ 的图象在直线 $y=-2x-1$ 的下方. …………13 分