第 28 卷第 4 期
2011 年 4 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 4
Apr. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)04−0467−05

风险资本约束下保险公司的最优比例再保险–投资策略

曾 燕[1], 李仲飞[2]

(1. 中山大学 数学与计算科学学院, 广东 广州 510275; 2. 中山大学 岭南(大学)学院, 广东 广州 510275)

摘要: 本文研究保险公司的再保险–投资问题. 假定保险公司的整体风险由风险资本(Capital-at-Risk, CaR)来度量; 盈余过程由扩散模型近似表示; 在任意时刻保险公司可购买比例再保险(或获取新业务)和投资无风险资产与多种风险资产; 风险资产的价格由几何布朗运动驱动. 保险公司的目标是在整体风险CaR受约束的条件下最大化终端财富的期望值. 对这一问题, 建立了两个均值–CaR模型. 利用分层优化方法和变分法, 得到了模型的最优比例再保险–投资策略以及有效边界的解析表达式.

关键词: 风险资本约束; 比例再保险策略; 投资策略; 保险公司; 整体风险

中图分类号: F830.59; O221 **文献标识码**: A

Optimal proportional reinsurance-investment policies for an insurer under Capital-at-Risk constraint

ZENG Yan[1], LI Zhong-fei[2]

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China;
2. Lingnan (University) College, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China)

Abstract: This paper investigates a reinsurance-investment problem for an insurer. Assume that the integral risk of the insurer is measured by Capital-at-Risk(CaR), the surplus process is described by a diffusion approximation model; the insurer is allowed to purchase proportional reinsurance(or acquire new business) and to invest on a risk-free asset and multiple risky assets at any time; the prices of risky assets are driven by the model of geometric Brownian motions. The target of the insurer is to maximize the expectation of the terminal wealth under a CaR constraint. Two mean-CaR models are established for the problem. Explicit expressions of the optimal policies and efficient frontiers to the models are derived by using a hierarchical optimization method and the variational calculus approach.

Key words: Capital-at-Risk constraint; proportional reinsurance policy; investment policy; insurer; integral risk

1 引言(Introduction)

保险是指投保人根据合同约定, 向保险人支付保费, 保险人对于合同约定的可能发生的事故因其发生所造成的财产损失承担赔偿保险金责任, 或者当被保险人死亡、伤残、疾病或者达到合同约定的年龄、期限等条件时承担给付保险金责任的商业保险行为(该定义引自2009年10月1日起实施的《中华人民共和国保险法》). 保险公司是经营风险的特殊金融机构, 其核心问题之一是风险管理与控制, 即对保险公司盈余(风险过程)进行管理与控制. Lundberg[1]和Cramér[2]最早对风险过程展开研究, 他们提出的风险过程被称为Cramér-Lundberg(C-L)模型, 该模型奠定了随机风险模型的基础.

鉴于保险公司经营风险的特性与监管的规定, 其必须考虑分散风险, 其中再保险是保险公司分散风险最常用的手段之一. Højgaard和Taksar[3]研究了使保险公司未来累积盈余期望现值最大化的最优比例再保险策略, 文中假定风险过程服从扩散模型(C-L模型的近似形式). Schmidli[4]研究了使保险公司破产概率最小化的最优比例再保险策略. Bäuerle[5]研究了保险公司在均值–方差模型下的最优比例再保险策略与有效边界. Liang[6]研究了分别使保险公司破产概率最小化和终端财富期望效用最大化的最优比例再保险策略. Egami和Young[7]假设比例再保险带固定成本和执行时滞, 通过解相应的最优停时随机控制问题得到了使未来累积盈余期望现值与破产成本期望现值之差最大化的最优再保险策略.

近年来, 由于监管部门对保险公司资金运用不断“松绑”, 保险资金的投资渠道得到了极大的拓展. 大量保险资金涌入资本市场, 使得研究保险公司的最优投资策略逐渐成为一个热点. Browne[8]采用Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方法得到了分别使

收稿日期: 2010−01−07; 收修改稿日期: 2010−06−18.
基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(70825002).

破产概率最小化和终端财富期望效用最大化的最优投资策略与最优值函数的解析式. Hipp和Plum[9]通过求解HJB方程, 得到了使破产概率最小化的最优投资策略, 证明了最优值函数的存在性并给出了验证定理. Yang和Zhang[10]及Wang等[11]均假设风险过程为带扩散扰动的C-L模型, 允许保险公司将盈余投资到无风险资产和一种价格由几何布朗运动驱动的风险资产上. 前者采用HJB方法得到了不同目标下最优投资策略的解析式; 后者采用鞅方法求解了终端财富的期望效用最大化及均值–方差优化问题. Kostadinova[12]研究了Value-at-Risk (VaR)约束下保险公司终端财富期望效用最大化问题. 郭文旌[13]研究了Capital-at-Risk (CaR)限制下保险公司的最优投资策略, 利用最大值原理求解了相应的优化问题. Schmidli[14], Irgens和Paulsen[15], Xu[16]与Luo等[17]研究了保险公司的最优再保险–投资策略, 他们把再保险的自留水平与投资在风险资产上的资金额(比例)作为控制变量. 其中, Schmidli[14]与Luo等[17]以破产概率最小化为目标且所投资风险资产的价格由几何布朗运动驱动, 前者利用HJB方法证明了最优值函数的存在性并给出了验证定理, 后者利用HJB方法得到了最优值函数与最优策略的解析式; Irgens和Paulsen[15]与Xu[16]的目标是最大化终端财富的期望效用.

以往这方面文献中衡量最优策略的准则主要有3类: 1) 终端财富期望效用最大化准则; 2) 破产概率最小化准则; 3) 均值–方差准则. 然而采用这3类准则衡量保险公司的最优策略各存在一些不足: 终端财富期望效用最大化准则不能体现风险的大小, 甚至对于某些特殊效用函数(如指数效用函数), 得到的最优投资策略与承保过程无任何关系, 这与实际不符; 破产概率最小化准则只强调风险而不考虑收益, 这与保险公司投资的本意不符; 均值–方差准则虽能直观体现收益与风险的大小, 但它把高于期望收益的收益部分也当作风险, 这并非保险公司所期望的. 为弥补这些不足, 近年来学者们提出了一些新的风险度量方法, 如VaR[18], Conditional Value-at-Risk (CVaR)[19], Earnings-at-Risk (EaR)[20], CaR[21]等. 其中, VaR因巴塞尔协议而被广泛应用于理论研究与金融实践. 然而与VaR相比, CaR更适合对风险重视程度相对较高的投资者(或投资机构), 如保险公司(具体分析可参见文献[13]). Kostadinova[12]与郭文旌[13]虽分别以VaR与CaR作为风险测度研究了保险公司的最优投资策略, 但他们都没有考虑再保险.

本文研究了保险公司在整体风险(包括承保业务风险与投资业务风险)受约束时的最优比例再保险–投资策略. 假设保险公司既可购买比例再保险(或获取新业务), 又可投资无风险资产与多种风险资产; 风险过程由扩散模型刻画, 风险资产的价格过程由几何布朗运动刻画; 以最大化保险公司终端盈余的期望为目标, 以CaR约束为风险控制手段. 据此, 笔者建立了两种均值–CaR模型. 通过将原问题转化为两层优化问题, 利用变分法求得了最优比例再保险–投资策略以及有效边界的解析式.

2 基本假设(Basic assumption)

给定满足通常条件的赋流完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T},P)$, 其中$T<+\infty$为时间水平, $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$表示到时刻t为止所获得的信息总和. 时刻t的决策基于信息流$\mathcal{F}_t$. 根据C-L模型, 保险公司的盈余过程可表示为

$$R_t=R_0+pt-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i, \tag{1}$$

其中: $\{N_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T},P)$上强度为$\beta$的时齐泊松过程, N_t表示时刻0到时刻t索赔发生的次数; $\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$是独立同分布正随机变量, Y_i表示第i次索赔的大小, 其分布函数设为F, 并具有有限的一阶矩与二阶矩$\mu_\infty,\sigma_\infty^2$; 假设保费率按期望值原理计算, 即$p=(1+\eta)\beta\mu_\infty$, 其中$\eta$为保险公司的相对安全附加系数. 根据文献[22], 式(1)可近似为如下扩散模型:

$$\mathrm{d}R_t=\mu\mathrm{d}t+\sigma_0\mathrm{d}\widetilde{w}(t), \tag{2}$$

其中: $\mu=\eta\beta\mu_\infty$, $\sigma_0^2=\beta\sigma_\infty^2$, $\{\widetilde{w}(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$为定义在$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T},P)$上的一维标准布朗运动.

假设在任意时刻保险公司可购买比例再保险(或获取新业务). 记在时刻t保险公司的风险暴露水平为$a(t)\in[0,+\infty)$. 当$a(t)\in[0,1]$时, $a(t)$表示保险公司购买比例再保险的自留水平, 即在时刻t, 保险公司需向再保险公司支付保费$\lambda(1-a(t))$, 其中λ表示再保险费用率(这里假定$\lambda\geqslant\mu$, 否则会产生套利), 同时当时刻t发生索赔时, 保险公司只需支付索赔额的$100a(t)\%$, 再保险公司支付索赔额的$100(1-a(t))\%$; 当$a(t)\in(1,+\infty)$时, $a(t)$表示保险公司获得新业务(如作为再保险公司吸收再保险业务)水平. 因此在购买比例再保险(或获取新业务)时, 保险公司盈余过程可近似为如下扩散模型:

$$\mathrm{d}R_t=[\mu-\lambda+\lambda a(t)]\mathrm{d}t+\sigma_0 a(t)\mathrm{d}\widetilde{w}(t). \tag{3}$$

进一步假设保险公司可将其盈余投资到无风险资产与m种风险资产上, 其中无风险资产的价格过程$S_0(t)$, $t\in[0,T]$可用如下微分方程表示:

$$\begin{cases}\mathrm{d}S_0(t)=r_0(t)S_0(t)\mathrm{d}t,\\ S_0(0)=s_0,\end{cases} \tag{4}$$

其中$r_0(t)$为非负有界确定性函数, 表示时刻t的无风险资产收益率. 第i $(i=1,2,\cdots,m)$种风险资产的

价格过程$S_i(t), t\in[0,T]$表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_i(t)}{S_i(t)}=[r_i(t)\mathrm{d}t+\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}w_j(t)],\\ S_i(0)=s_i,\end{cases}\tag{5}$$

其中: $m\leqslant n$; $r_i(t)$, $\sigma_{ij}(t)$为非负有界确定性函数; $w_j(t)$, $j=1,2,\cdots,n$是$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T},P)$上相互独立的一维标准布朗运动, 且与$\widetilde{w}(t)$相互独立.

设时刻t投资到第i种风险资产上的资金额为$b_i(t)$, $i=1,2,\cdots,m$, 则投资到无风险资产上的资金为$X_t-\sum\limits_{i=1}^{m}b_i(t)$, 其中$X_t$表示时刻$t$保险公司的盈余. 记

$$\begin{aligned}&r(t)=(r_1(t)-r_0(t),r_2(t)-r_0(t),\cdots,\\&\qquad r_m(t)-r_0(t))',\\&b(t)=(b_1(t),\,b_2(t),\,\cdots,\,b_m(t))',\\&w(t)=(w_1(t),\,w_2(t),\cdots,\,w_n(t))',\\&\sigma(t)=(\sigma_{ij}(t))_{m\times n},\,i=1,2,\cdots,m,\,j=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

$\pi=\{(a(t),b(t)),0\leqslant t\leqslant T\}$称为比例再保险–投资策略. 为了便于求解, 类似于文献[20~24], 本文假定$a(t)$和$b(t)$均为定义在$[0,T]$上的有界确定性Borel可测函数. 当策略π被选定时, 记时刻t的盈余为X_t^{π}, 则保险公司在购买比例再保险(或获取新业务)与投资时, 其盈余过程可表示为: $\forall t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_t^{\pi}=&[\mu-\lambda+\lambda a(t)+r_0(t)X_t^{\pi}+b'(t)r(t)]\mathrm{d}t+\\&\sigma_0a(t)\mathrm{d}\widetilde{w}(t)+b'(t)\sigma(t)\mathrm{d}w(t),\ X_0=x.\end{aligned}\tag{6}$$

根据Itô公式, 由式(6)可知

$$\begin{aligned}X_T^{\pi}=&\xi_T(x+A_T+B_T+\int_0^T\xi_s^{-1}\sigma_0a(s)\mathrm{d}\widetilde{w}(s)+\\&\int_0^T\xi_s^{-1}b'(s)\sigma(s)\mathrm{d}w(s)),\end{aligned}\tag{7}$$

$$\mathrm{E}X_T^{\pi}=\xi_T(x+A_T+B_T),\tag{8}$$

$$\mathrm{Var}X_T^{\pi}=\xi_T^2C_T,\tag{9}$$

其中:

$$\Sigma(t)=\sigma(t)\sigma'(t),\ \xi_t=\exp(\int_0^t r_0(s)\mathrm{d}s),$$

$$A_T=\int_0^T\xi_s^{-1}[\mu-\lambda]\mathrm{d}s,$$

$$B_T=\int_0^T\xi_s^{-1}[\lambda a(s)+b'(s)r(s)]\mathrm{d}s,$$

$$C_T=\int_0^T\xi_s^{-2}[\sigma_0^2a^2(s)+b'(s)\Sigma(s)b_{\pi}(s)]\mathrm{d}s.$$

文中假定存在$\kappa>0$, 对$\forall t\in[0,T]$, $\Sigma(t)\geqslant\kappa I$, I为单位矩阵.

策略$\pi=\{(a(t),b(t)),0\leqslant t\leqslant T\}$称为允许策略, 如果$a(t)$和$b(t)$均为定义在$[0,T]$上的有界确定性Borel可测函数, 且$a(t)\geqslant 0$. 记$\Pi(x)$为初始盈余是$x$的允许策略集.

3 模型建立与求解(Modeling and solution)

当保险公司的初始盈余为x, 时间水平为T, 策略为π及实数$\alpha\in(0,1)$被选定时, 本文记终端盈余X_T^{π}的α分位数为$\rho_0(\alpha,\pi,x,T)$, 它满足$P(X_T^{\pi}\leqslant\rho_0(\alpha,\pi,x,T))=\alpha$. 利用$\rho_0$可定义$X_T^{\pi}$的期望亏损(expected shortfall): $\rho_1(\alpha,\pi,x,T)\triangleq\mathrm{E}[X_T^{\pi}|X_T^{\pi}\leqslant\rho_0(\alpha,\pi,x,T)]$.

定义 1 (Capital-at-risk) 当初始盈余为x, 时间水平为T, 采取策略π时, 关于$\rho_k(k=0,1)$的CaR定义为

$$\mathrm{CaR}_k(X_T^{\pi})=x\xi_T-\rho_k(\alpha,\pi,x,T).$$

本文假定$\alpha<0.5$, 令Z_α为标准正态分布的α分位数, 则有$Z_\alpha<0$. 根据式(7)~(9)可得:

$$\rho_0(\alpha,\pi,x,T)=\xi_T(x+A_T+B_T-|Z_\alpha|\sqrt{C_T}),\tag{10}$$

$$\rho_1(\alpha,\pi,x,T)=\xi_T(x+A_T+B_T-\delta\sqrt{C_T}),\tag{11}$$

其中$\delta=\dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-Z_\alpha^2}$.

保险公司进行投资与购买比例再保险(或获取新业务)的目的是为了在保证整体风险(包括投资风险与承保风险)在可接受的水平之下, 使得终端盈余的期望最大. 相应于上述两种CaR风险测度, 本文考虑两种均值–CaR模型.

3.1 均值–CaR$_0$模型(Mean-CaR$_0$ model)

本小节采用CaR$_0$度量风险, 寻找最优策略, 即最优比例再保险–投资组合策略, 使保险公司的整体风险水平在不大于C时使终端盈余的期望最大化, 则可建立如下优化模型:

$$\max_{\pi\in\Pi(x)}\ \mathrm{E}[X_T^{\pi}],\ \text{s.t. }\mathrm{CaR}_0(X_T^{\pi})\leqslant C.\tag{12}$$

因为ξ_T, $\xi_T(x+A_T)$都是常值, 故根据式(8)与式(10)问题(12)等价于如下问题:

$$\max_{\pi\in\Pi(x)}B_T,\ \text{s.t. }B_T-|Z_\alpha|\sqrt{C_T}\geqslant G.\tag{13}$$

其中$G=-A_T-\xi_T^{-1}C$. 为了方便, 本文记

$$\Pi_\varepsilon(x):=\{\pi\in\Pi(x)|\sqrt{C_T}=\varepsilon,\ B_T-|Z_\alpha|\varepsilon\geqslant G\},$$

$$\|\varPhi\|_T:=\int_0^T[\lambda^2\sigma_0^{-2}+r'(t)\Sigma^{-1}(t)r(t)]\mathrm{d}t.$$

引理 1 若$\|\varPhi\|_T<|Z_\alpha|$且$G\leqslant 0$, 取

$$\varepsilon_1=\frac{G}{\|\varPhi\|_T-|Z_\alpha|},$$

则$\forall\varepsilon>\varepsilon_1$, $\Pi_\varepsilon(x)=\varnothing$; 若$\|\varPhi\|_T<|Z_\alpha|$且$G>0$, 则$\Pi_\varepsilon(x)=\varnothing$; 若$\|\varPhi\|_T>|Z_\alpha|$, 取$\varepsilon_2=\max\{0,\varepsilon_1\}$, 则$\forall\varepsilon<\varepsilon_2$, $\Pi_\varepsilon(x)=\varnothing$.

证 对$\forall\varepsilon \geqslant 0$, 考虑优化问题:

$$\max_{\pi\in\Pi(x)} B_T,\ \text{s.t.}\ C_T=\varepsilon^2. \tag{14}$$

该问题是带等周约束的变分问题, 根据变分原理, 利用拉格朗日乘子法可求得(14)的最优策略为

$$\begin{aligned}&\pi_\varepsilon^*=(a_\varepsilon^*(t),b_\varepsilon^*(t)),\\&a_\varepsilon^*(t)=\frac{\xi_t\lambda\sigma_0^{-2}\varepsilon}{\|\Phi\|_T},\ b_\varepsilon^*(t)=\frac{\xi_t\Sigma^{-1}(t)r(t)\varepsilon}{\|\Phi\|_T},\end{aligned} \tag{15}$$

且最优值为$\varepsilon\,\|\Phi\|_T$. 并且本文容易得到

$$\max_{\pi\in\Pi(x)} B_T-|Z_\alpha|\sqrt{C_T}=\varepsilon(\|\Phi\|_T-|Z_\alpha|). \tag{16}$$

由(16)与$\Pi_\varepsilon(x)$的定义易得引理1中的结论. 证毕.

当$\|\Phi\|_T<|Z_\alpha|$且$G\leqslant 0$时, 优化问题(13)等价于如下两层优化问题: $\max\limits_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]}\max\limits_{\pi\in\Pi_\varepsilon(x)} B_T$. 对任意给定的$\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$, 先求解内层优化问题$\max\limits_{\pi\in\Pi_\varepsilon(x)} B_T$. 由引理1的证明过程易得其最优策略为(15)且最优值为$\varepsilon\,\|\Phi\|_T$. 再求解外层优化问题$\max\limits_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]}\varepsilon\,\|\Phi\|_T$, 其最优解为$\varepsilon^*=\varepsilon_1$, 将$\varepsilon_1$替代(15)中的$\varepsilon$, 可得到优化问题(12)的最优策略:

$$\begin{cases}\pi^*=(a^*(t),b^*(t)),\\ a^*(t)=\dfrac{\xi_t\lambda\sigma_0^{-2}G}{\|\Phi\|_T\,(\|\Phi\|_T-|Z_\alpha|)},\\ b^*(t)=\dfrac{\xi_t\Sigma^{-1}(t)r(t)G}{\|\Phi\|_T\,(\|\Phi\|_T-|Z_\alpha|)}.\end{cases} \tag{17}$$

该策略下保险公司终端盈余的期望为

$$\mathrm{E}X_T^*=\frac{\|\Phi\|_T\,G}{\|\Phi\|_T-|Z_\alpha|}+\xi_T(x+A_T), \tag{18}$$

其中X_T^*为最优策略π^*下保险公司的终端财富.

当$\|\Phi\|_T<|Z_\alpha|$且$G>0$, 或$\|\Phi\|_T>|Z_\alpha|$时, 容易验证优化问题(13)不存在最优解.

定理 1 当$\|\Phi\|_T<|Z_\alpha|$且$C+\xi_TA_T\geqslant 0$时, 保险公司最优比例再保险–投资策略由(17)给出. 在此策略下, 所承担的整体风险水平与保险公司终端盈余的期望值分别为: $\mathrm{CaR}_0(X_T^*)=C$, $\mathrm{E}X_T^*=\dfrac{\|\Phi\|_T\,G}{\|\Phi\|_T-|Z_\alpha|}+\xi_T(x+A_T)$.

注 1 $G\leqslant 0$等价于$C+\xi_TA_T\geqslant 0$. 由定理1可知, 当$\|\Phi\|_T-|Z_\alpha|<0$且$C+\xi_TA_T\geqslant 0$时, $a^*(t)$, $b^*(t)$, $\mathrm{E}X_T^*$是关于$|Z_\alpha|$的减函数, 关于C的增函数. 这说明: 随着α的增加即$|Z_\alpha|$的减少, 或随着所允许的整体风险水平C的增大, 保险公司的比例再保险的自留水平(或获取新业务的水平)、投资在风险资产上的资金额以及终端盈余的期望都相应增大. 该结论与笔者直觉相符.

定义 2 当$\|\Phi\|_T<|Z_\alpha|$, C取遍集合$[\xi_TA_T,+\infty)$时, 所对应的点$(\mathrm{CaR}_0(X_T^*),\mathrm{E}X_T^*)$的集合称为均值–$\mathrm{CaR}_0$有效边界.

定理 2 当$\|\Phi\|_T<|Z_\alpha|$且$C+\xi_TA_T\geqslant 0$时, 保险公司的均值–CaR_0有效边界为:

$$\mathrm{E}X_T^*=\frac{\|\Phi\|_T\,(A_T+\xi_T^{-1}\mathrm{CaR}_0(X_T^*))}{|Z_\alpha|-\|\Phi\|_T}+\xi_T(x+A_T),$$

其中$\mathrm{CaR}_0(X_T^*)\in[-\xi_TA_T,+\infty)$.

注 2 由定理2可知, 保险公司的均值–CaR_0有效边界是一条射线, 其随着α的增大而往上移动. 当整体风险控制在最低水平, 即$\mathrm{CaR}_0(X_T^*)=-\xi_TA_T$时, 保险公司的最优策略是将全部保险业务转移给再保险公司并且不投资风险资产, 这是监管最严格的情形. 此时期望终端财富最低, 为$\mathrm{E}X_T^*=\xi_T(x+A_T)$.

3.2 均值–CaR_1模型(Mean-CaR_1 model)

此小节采用CaR_1度量风险, 在保证保险公司的整体风险不大于C时, 寻找最优策略使保险公司的终端盈余的期望最大化, 则可建立如下优化模型:

$$\max_{\pi\in\Pi(x)}\mathrm{E}[X_T^\pi],\ \text{s.t.}\ \mathrm{CaR}_1(X_T^\pi)\leqslant C. \tag{19}$$

定理 3 当$\|\Phi\|_T<\delta$且$C+\xi_TA_T\geqslant 0$时, 保险公司的最优风险控制与投资策略为:

$$\begin{aligned}&\pi^*=(a^*(t),b^*(t)),\\&a^*(t)=\frac{\xi_t\lambda\sigma_0^{-2}G}{\|\Phi\|_T\,(\|\Phi\|_T-\delta)},\\&b^*(t)=\frac{\xi_t\Sigma^{-1}(t)r(t)G}{\|\Phi\|_T\,(\|\Phi\|_T-\delta)}.\end{aligned}$$

定理3的证明与定理1的推导过程类似, 从略.

定义 3 当$\|\Phi\|_T<\delta$, C取遍集合$[-\xi_TA_T,+\infty)$时, 所对应的点$(\mathrm{CaR}_1(X_T^*),\mathrm{E}X_T^*)$的集合称为均值–$\mathrm{CaR}_1$有效边界.

定理 4 当$\|\Phi\|_T<\delta$且$C+\xi_TA_T\geqslant 0$时, 保险公司的均值–CaR_1有效边界为:

$$\mathrm{E}X_T^*=\frac{\|\Phi\|_T\,(A_T+\xi_T^{-1}\mathrm{CaR}_1(X_T^*))}{\delta-\|\Phi\|_T}+\xi_T(x+A_T),$$

其中$\mathrm{CaR}_1(X_T^*)\in[-\xi_TA_T,+\infty)$.

根据定理3与定理4, 笔者可得到类似注1与注2的结论.

4 结论(Conclusion)

本文建立了两种均值–CaR模型来研究保险公司的最优再保险–投资问题, 其中假定保险公司的盈余过程由扩散模型刻画; 其可在任意时刻购买比例再保险(或获取新业务)且可投资无风险资产与多种风险资产; 风险资产的价格由几何布朗运动驱动. 通过利用分层优化方法和变分法求得了相应模型的最优比例再保险–投资策略和均值–CaR有效边界的解析式. 结论表明若所要求的置信水平$1-\alpha$过高或整体

风险水平C过小, 即对风险管制过严, 保险公司不存在最优比例再保险–投资策略; 反之, 若对风险管制过松, 保险公司会尽可能少地购买比例再保险, 同时尽可能多地投资风险资产, 这样保险公司所面临的风险就非常大. 因此, 保险公司自身或监管部门应该根据具体情况对风险管理提出合适的要求, 既不应限制过严, 这样不利于保险市场的发展, 也不应限制过松, 这样不利于风险控制.

不过本文仍存在一些不足之处, 需要在后续工作中进一步改进. 1) 本文为了得到最优比例再保险–投资策略的解析解, 假设比例再保险–投资策略是时间t的确定性函数, 这与实际情况是有偏差的, 需要进一步放宽该条件(如假设为反馈控制); 2) 本文假设风险资产的价格过程由带漂移的几何布朗运动刻画, 其轨迹是连续的, 而在现实中风险资产的价格存在跳跃, 所以可以进一步考虑风险资产的价格由Lévy过程驱动的情形; 3) 本文的CaR约束仅是对终端时刻的整体风险进行控制, 而更现实的应该是动态地对风险进行控制, 所以将来可以考虑动态CaR约束的情形.

参考文献(References):

[1] LUNDBERG F I. *Approximerad Framställning av Sannolikehetsfunktionen II: Återförsäkering av Kollektivrisker*[M]. Uppsala: Almqvist and Wiksell, 1903.

[2] CRAMÉR H. *On the Mathematical Theory of Risk*[M]. Stockholm: Skandia Jubilee Volume, 1930.

[3] HØJGAARD B, TAKSAR M. Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models with transaction costs[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1998, 22(1): 41 – 51.

[4] SCHMIDLI H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2001, 1(1): 55 – 68.

[5] BÄUERLE N. Benchmark and mean-variance problems for insurers[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2005, 62(1): 159 – 165.

[6] LIANG Z B. Optimal proportional reinsurance for controlled risk process which is perturbed by diffusion[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2007, 23(3): 477 – 488.

[7] EGAMI M, YOUNG V R. Optimal reinsurance strategy under fixed cost and delay[J]. *Stochastic Processes and Their Applications*, 2009, 119(3): 1015 – 1034

[8] BROWNE S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 1995, 20(4): 937 – 958.

[9] HIPP C, PLUM M. Optimal investment for insurers[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2000, 27(2): 215 – 228.

[10] YANG H L, ZHANG L H. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2005, 37(3): 615 – 634.

[11] WANG Z W, XIA J M, ZHANG L H. Optimal investment for an insurer: The martingale approach[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 40(2): 322 – 334.

[12] KOSTADINOVA R. Optimal investment for insurers when the stock price follows an exponential Lévy process[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2007, 41(2): 250 – 263.

[13] 郭文旌, 闫海峰. 基于CaR风险测度下的保险投资决策[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2010, 46(2): 91 – 97.
(GUO Wenjing, Yan Haifeng. optimal investment decision for insurance bounded by CaR[J]. *Journal of Lanzhou University(Natural Sciences)*, 2010, 46(2): 91 – 97.)

[14] SCHMIDLI H. On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance[J]. *The Annals of Applied Probability*, 2002, 12(3): 890 – 907.

[15] IRGENS C, PAULSEN J. Optimal control of risk exposure, reinsurance and investments for insurance portfolios[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, 35(1): 21 – 51.

[16] XU L. On maximizing the expected terminal utility by investment and reinsurance[J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2008, 4(4): 801 – 815.

[17] LUO S Z, TAKSAR M, TSOI A. On reinsurance and investment for large insurance portfolios[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(1): 434 – 444.

[18] ALEXANDER G, BAPTISTA A. Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: a comparison with mean-variance analysis[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2002, 26(7/8): 1159 – 1193.

[19] HUANG D, ZHU S S, FABOZZI F J, et al. Portfolio selection with uncertain exit time: a robust CVaR approach[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2008, 32(2): 594 – 623.

[20] LI Z F, YANG H L, DENG X T. Optimal dynamic portfolio selection with Earnings-at-Risk[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2007, 132(3): 459 – 473.

[21] EMMER S, KLUPPELBERG C, KORN R. Optimal portfolios with bounded Capital-at-Risk[J]. *Mathematical Finance*, 2001, 11(4): 365 – 384.

[22] GRANDLLE J. *Aspects of Risk Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[23] DMITRAUSINOVIĆ-VIDOVIĆ G, WARE A. Asymptotic behavior of mean-quantile efficient portfolios[J]. *Finance and Stochastics*, 2006, 10(4): 529 – 551.

[24] LI Z F, NG K W, DENG X T. Continuous-time optimal portfolio selection using mean-CaR models[J]. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2007, 7(1): 35 – 49.

作者简介:

曾　燕　(1984—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为投资决策、保险精算、金融风险管理, E-mail: zengyan1984@gmail.com;

李仲飞　(1963—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 中山大学金融工程与风险管理研究中心主任, 主要研究方向为金融工程、金融经济学、金融风险管理, 经济学中的最优化方法, E-mail: lnslzf@mail.sysu.edu.cn.