

第十章 电磁辐射及原理

主要内容

电流元辐射，天线方向性，线天线，面天线，天线阵，对偶原理，镜像原理，互易原理，惠更斯原理。

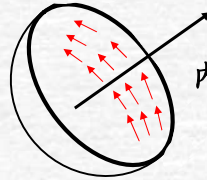
- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. 电流元辐射 | 6. 对偶原理 |
| 2. 天线方向性 | 7. 镜像原理 |
| 3. 对称天线辐射 | 8. 互易原理 |
| 4. 天线阵辐射 | 9. 惠更斯原理 |
| 5. 电流环辐射 | 10. 面天线辐射 |

10-1 电流元辐射

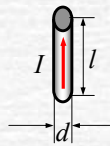
10-1 电流元辐射



电流元



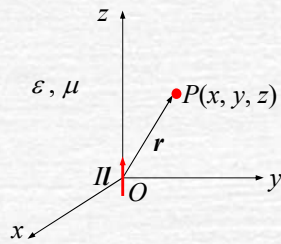
内壁电流



一段载有**均匀同相**的时变电流的导线称为**电流元**，而且 $d \ll l$ ， $l \ll \lambda$ ， $l \ll r$ 。

均匀同相电流是指导线上各点电流的**振幅相等**，且**相位相同**。

10-1 电流元辐射



电流元周围媒质是无限大的均匀线性且各向同性的**理想介质**。

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J}$$

式中 $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$

利用**矢量磁位** A 计算辐射场。

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\mu\epsilon}$$

式中
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{I e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{l}'$$

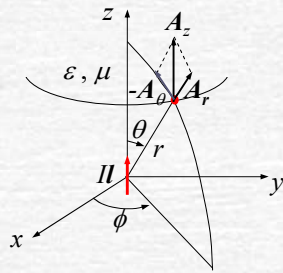
10-1 电流元辐射

$$l \ll \lambda, l \ll r, r' < l \rightarrow \frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{r}, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}|r-r'|} \approx e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}r}$$

又因电流仅具有z分量，即 $dl' = e_z dl'$ 。

因此 $A(r) = e_z A_z \quad A_z = \frac{\mu I l}{4\pi r} e^{-jkr}$

分析天线的电辐射特性，使用球坐标系较为方便。



矢量位 A 在球坐标系中的各分量为

$$A_r = A_z \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta$$

$$A_\phi = 0$$

10-1 电流元辐射

由 $H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A$ 求得磁场强度各个分量为

$$H_\phi = \frac{k^2 I l \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{j}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-jkr}$$

$$H_\theta = H_r = 0$$

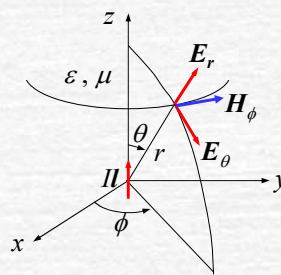
由 $E = -j\omega A + \frac{\nabla \nabla \cdot A}{j\omega\mu\epsilon}$ 或者 $\nabla \times H = j\omega\epsilon E$ ，根据磁场强度算出电场强度为

$$E_r = -j \frac{k^3 I l \cos \theta}{2\pi\omega\epsilon} \left(\frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr}$$

$$E_\theta = -j \frac{k^3 I l \sin \theta}{4\pi\omega\epsilon} \left(-\frac{1}{kr} + \frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr}$$

$$E_\phi = 0$$

10-1 电流元辐射



$$H_{\phi} = \frac{k^2 I l \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{j}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-jkr}$$

$$E_r = -j \frac{k^3 I l \cos \theta}{2\pi \omega \epsilon} \left(\frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr}$$

$$E_{\theta} = -j \frac{k^3 I l \sin \theta}{4\pi \omega \epsilon} \left(-\frac{1}{kr} + \frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr}$$

$$H_{\theta} = H_r = E_{\phi} = 0$$

可见，在球坐标系中，**z 向电流元**场强具有 H_{ϕ} ， E_r 及 E_{θ} 三个分量，而分量 $H_{\theta} = H_r = E_{\phi} = 0$ 。

电流元产生的电磁场为**TM 波**。

7

10-1 电流元辐射

$$H_{\phi} = \frac{k^2 I l \sin \theta}{4\pi} \left(\frac{j}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) e^{-jkr}$$

$$E_r = -j \frac{k^3 I l \cos \theta}{2\pi \omega \epsilon} \left(\frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr}$$

$$E_{\theta} = -j \frac{k^3 I l \sin \theta}{4\pi \omega \epsilon} \left(-\frac{1}{kr} + \frac{j}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) e^{-jkr}$$

$$H_{\theta} = H_r = E_{\phi} = 0$$

$r \ll \lambda$ 的区域称为**近区**； $r \gg \lambda$ 的区域称为**远区**。

近区中的电磁场称为**近区场**，远区中的电磁场称为**远区场**。

在电磁场中，物体的几何尺寸无关紧要，重要的是**物体的波长尺寸**，即以波长度量的尺寸。

8

10-1 电流元辐射

对于**近区场**：因 $r \ll \lambda$ ， $kr = \frac{2\pi}{\lambda}r \ll 1$ ，则低次项 $\left(\frac{1}{kr}\right)$ 可以忽略，且令 $e^{-jkr} \approx 1$ ，那么

$$H_\phi = \frac{Il \sin\theta}{4\pi r^2} \quad E_r = -j \frac{Il \cos\theta}{2\pi\omega\epsilon r^3} \quad E_\theta = -j \frac{Il \sin\theta}{4\pi\omega\epsilon r^3}$$

↑ 恒定电流元 Il
↙ ↘ 电偶极子 ql

近区场与**静态场**完全相同，无滞后现象，所以近区场称为**似稳场**。

电场与磁场的时间相位差为 $\frac{\pi}{2}$ ，复能流密度的实部为零，能量没有**单向流动**，完全被束缚在源的周围，因此近区场又称为**束缚场**。

10-1 电流元辐射

对于**远区场**：因 $r \gg \lambda$ ， $kr = \frac{2\pi}{\lambda}r \gg 1$ ，则高次项可以忽略，只剩下两个分量 H_ϕ 和 E_θ ，得

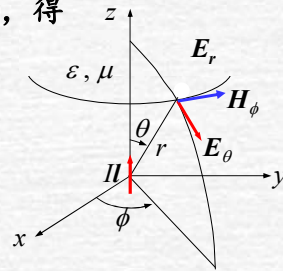
$$H_\phi = j \frac{Il \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \quad E_\theta = j \frac{ZI l \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr}$$

式中 $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为周围介质的**波阻抗**。

电流元**远区场**的特点：

(1) **传播方向**为 r ，电场及磁场均与 r 垂直，远区场为**TEM波**，电场与磁场的关系为 $\frac{E_\theta}{H_\phi} = Z$ 。

(2) 电场与磁场同相，复能流密度仅有**实部**，能量不断向外辐射，所以远区场又称为**辐射场**。



10-1 电流元辐射

$$H_{\phi} = j \frac{I \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \quad E_{\theta} = j \frac{ZI \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr}$$

(3) 远区场强**振幅**与距离 r 一次方成反比，这种衰减不是介质的损耗引起的，而是球面波的自然扩散。

(4) 远区场强振幅还与观察点所处的方位有关，这种特性称为天线的**方向性**。与方位角 θ 及 ϕ 有关的函数称为**方向性因子**，以 $f(\theta, \phi)$ 表示。

z 方向电流元具有**轴对称**特点，场强与方位角 ϕ 无关 $f(\theta, \phi) = \sin \theta$

z 向电流元在 $\theta = 0$ 的轴线方向上辐射为**零**，在与轴线垂直的 $\theta = 90^\circ$ 方向上辐射**最强**。

10-1 电流元辐射

$$H_{\phi} = j \frac{I \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \quad E_{\theta} = j \frac{ZI \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr}$$

(5) 电场及磁场的方向与时间无关，远区场为**线极化**。当然，在不同的方向上极化方向不同。

除了上述线极化特性外，其余**四种特性**是一切尺寸有限的天线远区场的共性，即**一切有限尺寸的天线**，其远区场为**TEM波**，是一种**辐射场**，其场强振幅不仅与**距离成反比**，同时也**与方向有关**。

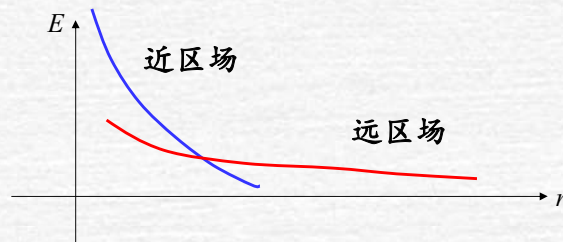
天线的极化特性和天线的类型有关。

接收天线的极化特性必须与被接收的电磁波的极化特性一致，称为**极化匹配**。

10-1 电流元辐射

远区场中也有**电磁能量的交换部分**。但是由于交换部分的场强振幅至少与距离 r^2 成反比，而辐射部分的场强振幅与距离 r 成反比，因此，**远区中交换部分所占的比重很小，可以忽略；**

近区中辐射部分可以忽略。



13

10-1 电流元辐射

为了计算**辐射功率 P_r** ，可将远区中的**复能流密度**矢量的**实部**沿半径为 r 的球面进行积分。

$$\text{即} \quad P_r = \oint_S \operatorname{Re}(S_c) \cdot dS$$

式中 S_c 为远区中的复能流密度矢量。

$$\text{即} \quad S_c = E_\theta \times H_\phi^* = e_r |E_\theta| |H_\phi| = e_r \frac{|E_\theta|^2}{Z} = e_r |H_\phi|^2 Z$$

$$\text{得} \quad S_c = e_r \frac{ZI^2 \sin^2 \theta}{4\lambda^2 r^2} = \operatorname{Re}(S_c)$$

若周围为真空，**波阻抗** $Z = Z_0 = 120\pi \Omega$ ，则辐射功率为

$$P_r = 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

式中电流 I 为**有效值**。

14

10-1 电流元辐射

为了衡量辐射功率的大小，使用**辐射电阻** R_r ，其定义为

$$R_r = \frac{P_r}{I^2}$$

电流元的辐射电阻为 $R_r = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$

可见，电流元的**波长尺寸**越大，则辐射能力**越强**。

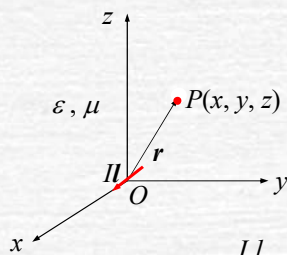
例 计算位于原点的 x 方向电流元的远区场。

解 因 $I\mathbf{l} = e_x I l$ $\mathbf{A} = e_x A_x$ $A_x = \frac{\mu I l}{4\pi r} e^{-jkr}$

则各球面坐标分量为

$$A_r = A_x \sin \theta \cos \phi; A_\theta = A_x \cos \theta \cos \phi; A_\phi = -A_x \sin \phi$$

10-1 电流元辐射



对于**远区场**仅需考虑与距离 r 一次方成反比的分量。

求得远区磁场强度为

$$\mathbf{H} = -j \frac{I l}{2\lambda r} (e_\theta \sin \phi + e_\phi \cos \theta \cos \phi) e^{-jkr}$$

远区场是向正 r 方向传播的TEM波。因此，电场强度 E 为

$$\mathbf{E} = Z\mathbf{H} \times \mathbf{e}_r = -j \frac{Z I l}{2\lambda r} (e_\theta \cos \theta \cos \phi - e_\phi \sin \phi) e^{-jkr}$$

10-1 电流元辐射

$$\mathbf{H} = -j \frac{I l}{2\lambda r} (e_{\theta} \sin \phi + e_{\phi} \cos \theta \cos \phi) e^{-jkr}$$

$$\mathbf{E} = -j \frac{ZI l}{2\lambda r} (e_{\theta} \cos \theta \cos \phi - e_{\phi} \sin \phi) e^{-jkr}$$

可见， x 方向电流元的不同场分量的方向性因子不同，此结果与 z 方向电流元完全不同。

改变天线相对于坐标系的方位，其**方向性因子**的表示式随之改变。

但是，并不意味天线的**辐射特性**发生变化。

电流元在其轴线方向上辐射为零，在与轴线垂直的方向上辐射最强。

10-2 天线的方向性

10-2 天线的方向性



19

10-2 天线的方向性

使用**归一化方向性因子**描述方向性比较方便。

其定义为
$$F(\theta, \phi) = \frac{f(\theta, \phi)}{f_m}$$

式中 f_m 为方向性因子的**最大值**。

归一化方向性因子的最大值 $F_m = 1$ 。

任何天线的**辐射场振幅**可用归一化方向性因子表示为

$$|E| = |E|_m F(\theta, \phi)$$

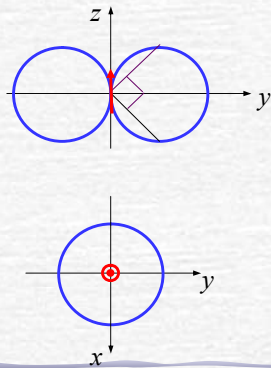
式中 $|E|_m$ 为最强辐射方向上的场强振幅。

20

10-2 天线的方向性

利用归一化方向性因子绘制天线的方向图。通常使用直角坐标系或极坐标系。

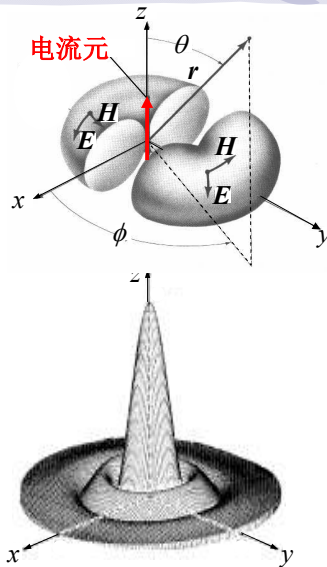
z 方向电流元的方向性因子 $f(\theta, \phi) = \sin \theta$ ，
 $f_m = 1$ ， $F(\theta, \phi) = \sin \theta$ 。



若用极坐标系，在任何 ϕ 等于常数的平面内，函数 $F(\theta, \phi)$ 的变化轨迹为两个圆。

在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的平面内，以 ϕ 为变量的函数的轨迹为一个圆。

10-2 天线的方向性

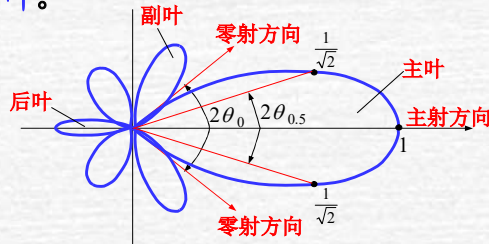


将 ϕ 等于常数的平面内的方向图围绕 z 轴旋转一周，即构成三维空间方向图。

计算机绘制的三维空间的立体方向图更能形象地描述天线辐射场强的空间分布。

10-2 天线的方向性

辐射最强的方向称为**主射方向**，辐射为零的方向称为**零射方向**。具有主射方向的方向叶称为**主叶**，其余称为**副叶**。



场强为主射方向上场强振幅的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍的两个方向之间的夹角称为**半功率角**，以 $2\theta_{0.5}$ 表示；两个零射方向之间的夹角称为**零功率角**，以 $2\theta_0$ 表示。

10-2 天线的方向性

当有向天线在**主射方向**上与无向天线在同一距离处获得**相等场强**时，无向天线所需的辐射功率 P_{r0} 与有向天线的辐射功率 P_r 之比值称为方向性系数 D 。

即
$$D = \frac{P_{r0}}{P_r} \Big|_{|E_m|=|E_0|}$$

式中 $|E_m|$ 为有向天线主射方向上的**场强振幅**。

$|E_0|$ 为无向天线的**场强振幅**。

$P_r < P_{r0} \rightarrow D > 1$ 方向性愈强， D 值愈高。

方向性系数常以分贝表示。即 $D_{dB} = 10 \lg D$

10-2 天线的方向性

已知有向天线的**辐射功率**为

$$P_r = \oint_S \frac{|E_m|^2}{Z} F^2(\theta, \varphi) dS$$

式中 S 代表以天线为中心的**闭合球面**。

无向天线向周围空间**均匀辐射**，其辐射功率为

$$P_{r0} = \frac{|E_0|^2}{Z} 4\pi r^2$$

求得

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi F^2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta}$$

已知**电流元**的 $F(\theta, \varphi) = \sin\theta$ ，求得电流元的 $D=1.5$ 。

10-2 天线的方向性

实际天线具有损耗，**输入功率** P_A 大于**辐射功率** P_r 。
 P_r 与 P_A 之比称为天线的效率 η 。

即
$$\eta = \frac{P_r}{P_A}$$

天线的**增益**以 G 表示。增益是在**相同的场强**下，无向天线的**输入功率** P_{A0} 与有向天线的**输入功率** P_A 之比。

即
$$G = \frac{P_{A0}}{P_A} \Big|_{|E_m|=|E_0|}$$

假定无向天线的效率 $\eta_0 = 1$ ，得

$$G = \eta D \quad G_{dB} = 10 \lg G$$

地球站的大型抛物面天线增益高达**50dB**以上。

10-2 天线的方向性

地球站的大型抛物面天线



27

10-2 天线的方向性

中国建成的世界最大射电望远镜 (FAST)



28

10-2 天线的方向性

FAST的建造过程

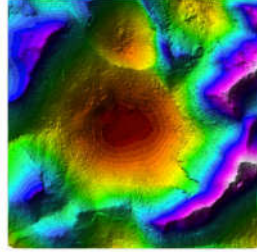


Figure 4 High accuracy ($\pm 0.2m$) topographic map of FAST site.

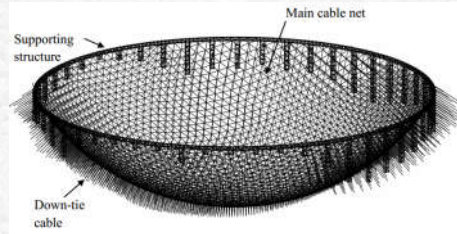


Figure 5 Concept of the adaptive cable-net structure, the supporting structure for the FAST reflector



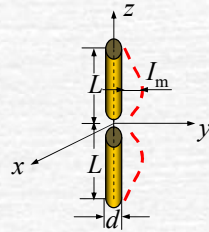
Figure 9 Prototype of the aluminum back frame.

10-3 对称天线

10-3 对称天线

对称天线是一根中心馈电，长度可与波长相比拟的载流导线。

电流分布以中点为对称，因此称为对称天线。



若导线直径 $d \ll \lambda$ ，电流沿线分布可以近似认为具有正弦驻波特性。

两端开路，电流为零，形成电流驻波的波节。波腹 I_m 的位置取决于对称天线的长度。

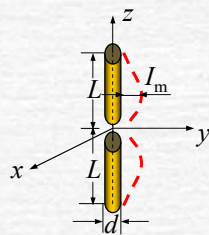
10-3 对称天线

对称天线的半长为 L ，沿 z 轴放置，中点为原点，电流分布函数可以表示为

$$I = I_m \sin k(L - |z|)$$

式中 I_m 为电流驻波的波腹电流。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

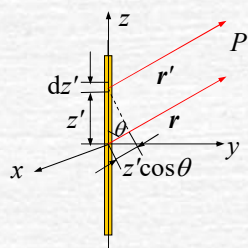


对称天线可以看成是由很多电流振幅不等但相位相同的电流元排成一条直线形成的。

利用电流元的远区场公式即可直接计算对称天线的辐射场。

10-3 对称天线

已知电流元 $I dz'$ 产生的远区电场强度为



$$dE_{\theta} = j \frac{ZI dz' \sin \theta}{2\lambda r'} e^{-jkr'}$$

由于 $r \gg L$, 可以认为组成对称天线的每个电流元对于观察点 P 的指向是相同的。

$$\text{即 } r' \parallel r$$

各个电流元在 P 点产生的远区电场方向相同, 合成电场为各个电流元远区电场的标量和。

$$\text{即 } E_{\theta} = \int_{-L}^L j \frac{ZI dz' \sin \theta}{2\lambda r'} e^{-jkr'}$$

33

10-3 对称天线

$$E_{\theta} = \int_{-L}^L j \frac{ZI dz' \sin \theta}{2\lambda r'} e^{-jkr'}$$

考虑到 $L \ll r'$, 可以近似认为 $\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r}$ 。但是相位因子中的 r 不能以 r' 代替。

由于 $r' \parallel r$, 可以认为 $r' = r - z' \cos \theta$

若周围为理想介质, 那么远区辐射电场为

$$E_{\theta} = j \frac{60I_m}{r} \frac{\cos(kL \cos \theta) - \cos kL}{\sin \theta} e^{-jkr}$$

$$\text{方向性因子为 } f(\theta) = \frac{\cos(kL \cos \theta) - \cos kL}{\sin \theta}$$

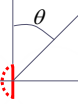
可见, 方向性因子仅为方位角 θ 的函数。

34

10-3 对称天线

半波天线

$$2L = \lambda/2$$



$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

全波天线

$$2L = \lambda$$



$$f(\theta) = \frac{\cos(\pi \cos\theta) + 1}{\sin\theta}$$

$$2L = 3\lambda/2$$



$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta}$$

$$2L = 2\lambda$$



$$f(\theta) = \frac{\cos(2\pi \cos\theta) - 1}{\sin\theta}$$

35

10-3 对称天线

例 根据辐射电阻及方向性系数的定义，计算半波天线的**辐射电阻**及**方向性系数**。

解：根据半波天线的远区电场公式，求得辐射功率为

$$P_r = \oint_S \frac{|E_\theta|^2}{Z_0} dS = 60I_m^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta$$

若定义**辐射电阻**为 $R_r = \frac{P_r}{I_m^2}$ ，则

$$R_r = 60 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = 73.1\Omega$$

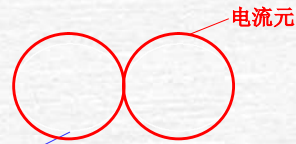
36

10-3 对称天线

对称天线的电流分布是不均匀的，因此选取不同的电流作为参考电流，辐射电阻的数值将不同。常取波腹电流或输入端电流作为辐射电阻的参考电流，分别称为以波腹电流或输入端电流为参考的辐射电阻。

半波天线的输入端电流等于波腹电流，因此上述辐射电阻可以认为是以波腹电流或输入端电流为参考的辐射电阻。

$$\text{由 } D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi F^2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta}$$



求得半波天线的 $D = 1.64$ 。

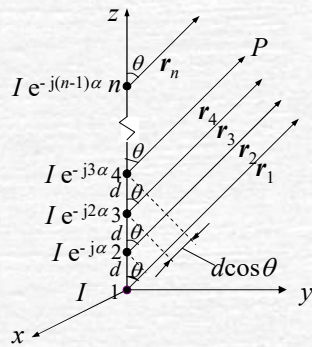
半波天线

10-4 天线阵辐射

10-4 天线阵辐射

由多个简单天线构成的复合天线称为**天线阵**。

调整单元天线的类型、数目、电流振幅及相位、取向及间隔，即可形成所需的方向性。



若各个单元天线的类型和取向均相同，且以相等的间隔 d 排列在一条直线上。各单元天线的电流振幅均为 I ，但相位依次逐一滞后同一数值 α ，那么，这种天线阵称为**均匀直线式天线阵**。

10-4 天线阵辐射

对于远区，若观察距离远大于天线阵的尺寸，可以认为各个单元天线对于观察点的取向是相同的。

因单元天线的取向一致，各个单元天线产生的远区场方向相同，天线阵的合成场等于各个单元天线场的标量和。

即
$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

第 i 个单元天线的辐射场可以表示为

$$E_i = \frac{C_i I_i}{r_i} f_i(\theta, \phi) e^{-jk r_i}$$

式中 C_i 决定于天线类型。对于均匀直线式天线阵，

因各单元天线类型相同，则 $C_1 = C_2 = \dots = C_n$

又因取向一致，故 $f_1 = f_2 = \dots = f_n$

10-4 天线阵辐射

对于远区可以认为

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r_2} = \dots = \frac{1}{r_n} \\ e^{-jkr_2} &= e^{-jkr_1} e^{jk d \cos \theta} \\ e^{-jkr_3} &= e^{-jkr_1} e^{jk 2d \cos \theta} \\ &\vdots \\ e^{-jkr_n} &= e^{-jkr_1} e^{jk(n-1)d \cos \theta} \end{aligned}$$

求得 n 元天线阵的合成场强的振幅为

$$|E| = \frac{C_1 I_1}{r_1} f_1(\theta, \phi) \frac{\sin \left[\frac{n}{2} (kd \cos \theta - \alpha) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta - \alpha) \right]}$$

令

$$f_n(\theta, \phi) = \frac{\sin \left[\frac{n}{2} (kd \cos \theta - \alpha) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta - \alpha) \right]}$$

10-4 天线阵辐射

则 n 元天线阵场强的振幅可以表示为

$$|E| = \frac{C_1 I_1}{r_1} f_1(\theta, \phi) f_n(\theta, \phi)$$

式中 $f_n(\theta, \phi)$ 称为阵因子。

上述均匀直线式天线阵沿 z 轴放置，因此方向性因子仅为方位角 θ 的函数。

若以 $f(\theta, \phi)$ 表示天线阵的方向性因子，则

$$f(\theta, \phi) = f_1(\theta, \phi) f_n(\theta, \phi) \quad \text{方向图乘法规则}$$

式中 $f_1(\theta, \phi)$ 为单元天线的方向性因子。

$f_n(\theta, \phi)$ 为阵因子。

10-4 天线阵辐射

已知阵因子为
$$f_n(\theta, \phi) = \frac{\sin \left[\frac{n}{2} (kd \cos \theta - \alpha) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta - \alpha) \right]}$$

可见，阵因子与单元天线的数目 n 、间距 d 及相位差 α 有关。

适当地变更单元天线的数目、间距及电流相位，即可改变天线阵的方向性。

根据给定的方向性，确定天线阵的结构，这是天线阵的综合问题。

10-4 天线阵辐射

阵因子达到最大值的条件为 $kd \cos \theta - \alpha = 2n\pi$

$kd \cos \theta$ 为空间相位差， α 为时间相位差。因此，两者相等时，阵因子达到最大值。

阵因子达到最大值的角度 θ_m 为

$$\theta_m = \arccos \frac{\alpha}{kd}, (\alpha \leq kd)$$

可见，阵因子的主射方向决定于单元天线之间的电流相位差及其间距。

连续地改变单元天线之间的电流相位差，即可连续地改变天线阵的主射方向，这就是相控阵天线的工作原理。

10-4 天线阵辐射

单元天线电流相位相同的天线阵称为同相阵。

$$\text{由 } \alpha = 0 \text{ 得 } \theta_m = \frac{\pi}{2}$$

可见，若不考虑单元天线的方向性，则主射方向垂直于天线阵的轴线，这种天线阵称为边射式天线阵。

$$\text{若电流相位差 } \alpha = kd \text{ 得 } \theta_m = 0$$

可见，若不考虑单元天线的方向性，则主射方向指向电流相位滞后的一端，这种天线阵称为端射式天线阵。

10-4 天线阵辐射

三种二元阵的方向图

$$\begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ 0 \quad -\pi \end{array}$$

$$d = \lambda/2$$

$$kd = \pi, \alpha = \pi$$

$$\pi \cos \theta_m - \pi = 2n\pi$$

$$\cos \theta_m = \pm 1$$

$$\begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$d = \lambda/2$$

$$kd = \pi, \alpha = 0$$

$$\pi \cos \theta_m = 2n\pi$$

$$\cos \theta_m = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{①} \quad \text{②} \\ 0 \quad -\pi/2 \end{array}$$

$$d = \lambda/4$$

$$kd = \pi/2, \alpha = \pi/2$$

$$\frac{\pi}{2} \cos \theta_m - \frac{\pi}{2} = 2n\pi$$

$$\cos \theta_m = 1$$

但每根天线在垂直方向无辐射。

10-4 天线阵辐射

平方公里望远镜天线阵列



47

10-4 天线阵辐射



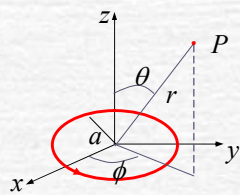
48

10-5 电流环辐射

49

10-5 电流环辐射

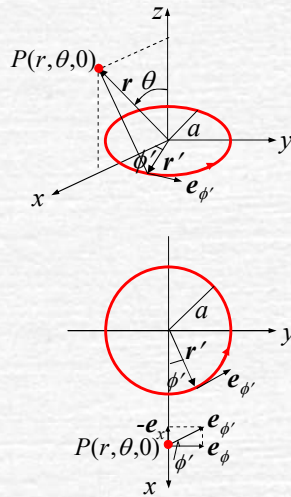
电流环是一个载有均匀同相时变电流的导线圆环，其圆环半径 $a \ll \lambda$ ，且 $a \ll r$ 。



设电流环周围空间为无限大的均匀线性且各向同性的介质。建立直角坐标系，令电流环的中心位于坐标原点，且电流环所在平面与 xy 平面一致。

50

10-5 电流环辐射



因结构**对称于z轴**，电流环的场强与角度 ϕ 无关。为简单起见，令观察点 P 位于 xz 平面。

线电流产生的**矢量位**为

$$A(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{Idl' e^{-jk(r-r')}}{|r-r'|}$$

根据几何关系，近似求得

$$A(\mathbf{r}) = e_\phi \frac{k^2 \mu S}{4\pi} \left(\frac{1}{k^2 r^2} + j \frac{1}{kr} \right) \sin \theta e^{-jkr}$$

式中 $S = \pi a^2$ 为**电流环的面积**。

10-5 电流环辐射

由 $H = \frac{1}{\mu} \nabla \times A$ ，求得电流环的**磁场**为

$$H_r = \frac{ISk^3}{2\pi} \left(j \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) \cos \theta e^{-jkr}$$

$$H_\theta = \frac{SIk^3}{4\pi} \left(-\frac{1}{kr} + j \frac{1}{k^2 r^2} + \frac{1}{k^3 r^3} \right) \sin \theta e^{-jkr}$$

$$H_\phi = 0$$

再由 $E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times H$ ，求得电流环的**电场**为

$$E_\phi = j \frac{\omega\mu SIk^2}{4\pi} \left(-j \frac{1}{kr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin \theta e^{-jkr}$$

$$E_r = E_\theta = 0$$

可见，电流环产生的电磁场为**TE波**。

10-5 电流环辐射

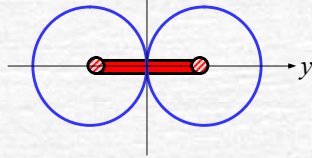
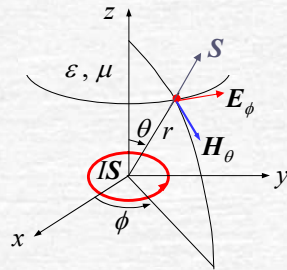
对于远区场，因 $kr \gg 1$ ，
只剩下 H_θ 及 E_ϕ 两个分量。

$$H_\theta = -\frac{\pi SI}{\lambda^2 r} \sin \theta e^{-jkr}$$

$$E_\phi = \frac{Z\pi SI}{\lambda^2 r} \sin \theta e^{-jkr}$$

方向性因子 $f(\theta, \phi) = \sin \theta$

可见，与 z 向电流元的方向性因子完全一样。



电流环所在平面内辐射最强，垂直于电流环平面的 z 轴方向为零。

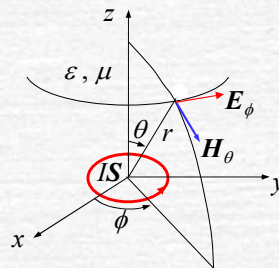
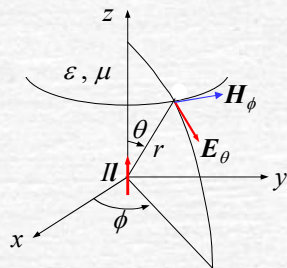
10-5 电流环辐射

电流环的辐射功率和辐射电阻分别为

$$P_r = 320\pi^6 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4 I^2 \quad R_r = 320\pi^6 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^4$$

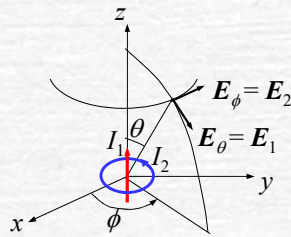
电流元及电流环的场强公式非常类似。

电流元 $H_\phi \sim$ 电流环 E_ϕ ; 电流元 $E_\theta \sim$ 电流环 H_θ



10-5 电流环辐射

例 复合天线由电流元及电流环流构成。电流元的轴线垂直于电流环的平面并且通过圆心。试求该复合天线的方向性因子及辐射场的极化特性。



解：令复合天线位于坐标原点，且电流元轴线与 z 轴一致。

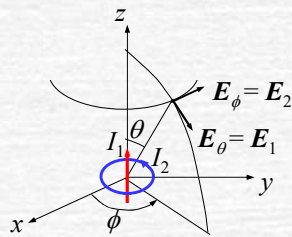
电流元产生的远区电场为

$$E_1 = e_\theta j \frac{ZI_1 l_1 \sin \theta}{2\lambda r} e^{-jkr}$$

电流环产生的远区电场为

$$E_2 = e_\phi \frac{Z\pi SI_2 l_2 \sin \theta}{\lambda^2 r} e^{-jkr}$$

10-5 电流环辐射



合成远区电场为

$$E = \left(e_\theta j \frac{ZI_1 l_1}{2\lambda} + e_\phi \frac{Z\pi SI_2}{\lambda^2} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta$$

因 $e_\theta \perp e_\phi$ ，两个电场分量相互垂直，振幅不等，相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 。

若 I_1 与 I_2 相位相同，合成场为椭圆极化。

若 I_1 与 I_2 的相位差为 $\frac{\pi}{2}$ ，则合成场为线极化。

复合天线的方向因子仍为 $\sin \theta$ 。

10-6 对偶原理

57

10-6 对偶原理

电荷与电流是产生电磁场的**唯一源**。自然界中至今尚未发现任何磁荷与磁流存在。但是对于某些电磁场问题，引入假想的磁荷与磁流是有益的。

引入磁荷与磁流后，**麦克斯韦方程**修改为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{J}_m(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \rho_m(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

式中 $\mathbf{J}_m(\mathbf{r})$ —**磁流密度**； $\rho_m(\mathbf{r})$ —**磁荷密度**。

磁荷守恒定律为 $\nabla \cdot \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) = -j\omega \rho_m(\mathbf{r})$

58

10-6 对偶原理

现将电场及磁场分为两部分：一部分是由**电荷**及**电流**产生的电场 $E_e(r)$ 及磁场 $H_e(r)$ ；另一部分是由**磁荷**及**磁流**产生的电场 $E_m(r)$ 及磁场 $H_m(r)$ 。

$$\text{即} \quad \begin{aligned} E(r) &= E_e(r) + E_m(r) \\ H(r) &= H_e(r) + H_m(r) \end{aligned}$$

由于麦克斯韦方程是**线性的**，他们分别满足的电磁场方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H_e = J + j\omega\varepsilon E_e \\ \nabla \times E_e = -j\omega\mu H_e \\ \nabla \cdot B_e = 0 \\ \nabla \cdot D_e = \rho \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H_m = j\omega\varepsilon E_m \\ \nabla \times E_m = -J_m - j\omega\mu H_m \\ \nabla \cdot B_m = \rho_m \\ \nabla \cdot D_m = 0 \end{array} \right.$$

59

10-6 对偶原理

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H_e = J + j\omega\varepsilon E_e \\ \nabla \times E_e = -j\omega\mu H_e \\ \nabla \cdot B_e = 0 \\ \nabla \cdot D_e = \rho \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H_m = j\omega\varepsilon E_m \\ \nabla \times E_m = -J_m - j\omega\mu H_m \\ \nabla \cdot B_m = \rho_m \\ \nabla \cdot D_m = 0 \end{array} \right.$$

比较上述两组方程，获得以下对应关系：

$$\left\{ \begin{array}{l} H_e \rightarrow -E_m \\ E_e \rightarrow H_m \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \rightarrow \mu \\ \mu \rightarrow \varepsilon \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} J \rightarrow J_m \\ \rho \rightarrow \rho_m \end{array} \right.$$

这个对应关系称为**对偶原理**。

若已**求出**电荷及电流产生的电磁场，只要将其式中各个对应参量用对偶原理的关系置换以后，获得的表示式即是具有**相同分布特性**的磁荷与磁流产生的**电磁场**。

60

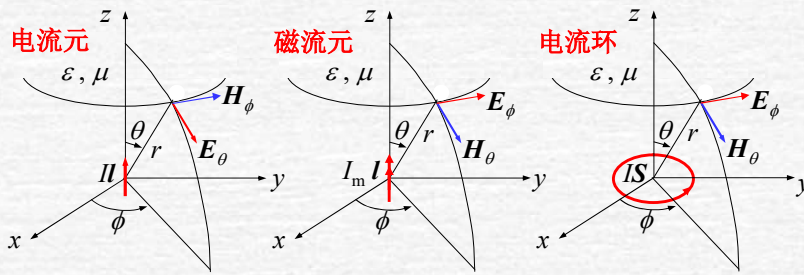
10-6 对偶原理

已知 z 方向 **电流元** Il 的 **远区场** 公式为

$$H_\phi = j \frac{Il \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \quad E_\theta = j \frac{ZI l \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr}$$

那么, z 方向 **磁流元** $I_m l_m$ 产生的 **远区场** 应为

$$E_{m\phi} = -j \frac{I_m l_m \sin\theta}{2\lambda r} e^{-jkr} \quad H_{m\theta} = j \frac{I_m l_m \sin\theta}{2\lambda r Z} e^{-jkr}$$



61

10-6 对偶原理

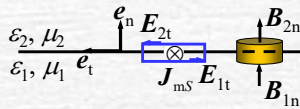
引入磁荷 ρ_m 及磁流 I_m 后, 两个积分形式的麦克斯韦方程修改为

$$\oint_l E \cdot dl = -I_m - \int_S j\omega B \cdot dS \quad \oint_S B \cdot dS = \rho_m$$

前述边界条件也必须加以修正, 但仅涉及 **电场强度的切向分量** 和 **磁场强度的法向分量**.

$$\text{即} \quad e_n \times (E_2 - E_1) = -J_{ms} \quad e_n \cdot (B_2 - B_1) = \rho_{ms}$$

式中 $J_{ms}(r)$ 为 **表面磁流密度**, $\rho_{ms}(r)$ 为 **表面磁荷密度**, e_n 由媒质①指向媒质②, 如下图示。



62

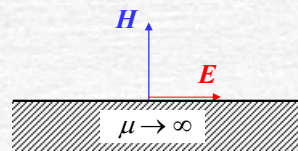
10-6 对偶原理

已知磁导率 $\mu \rightarrow \infty$ 的**理想导磁体**，其内部不可能存在任何电磁场，但其表面可以存在假想的表面磁荷与磁流。

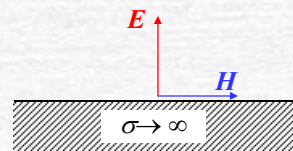
那么，理想导磁体的**边界条件**为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{e}_n \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_{mS} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{B} = \rho_{mS} \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D} = 0 \end{cases}$$



理想**导磁体**



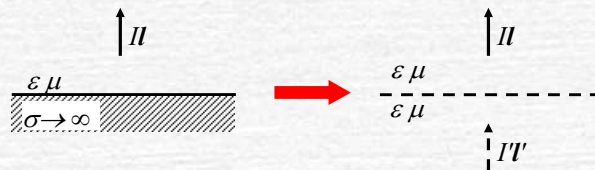
理想**导电体**

10-7 镜像原理

10-7 镜像原理

静态场的**镜像原理**同样也适用于求解**时变电磁场**的边值问题，但也仅能用于某些特殊的波源和边界。

设时变**电流元** I 位于**无限大的理想导电平面**附近，且垂直于该平面，如下图示。



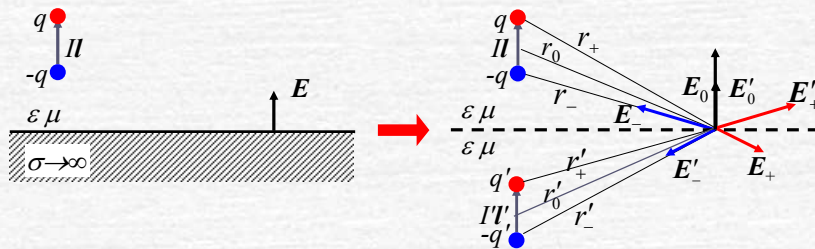
引入的镜像源必须**保持原有**的边界条件。

65

10-7 镜像原理

正弦时变电流与**时变电荷**的关系为 $I = j\omega q$ 。时变电流元的电荷积累在电流元的两端，上端电荷 $q = \frac{I}{j\omega}$ ，下端电荷 $q = -\frac{I}{j\omega}$ ，如下左图。

镜像电流元为 I' ，且令 $I' = I$ ， $I' = I$ 。



这些电荷及电流分别在边界上产生的电场强度，如上右图。

66

10-7 镜像原理

由于引入镜像源以后，**整个空间**变为均匀无限大的空间，因此可以通过矢量位 A 及标量位 Φ 计算场强。

电流元 Il 产生的**电场强度**为

$$E = E_0 + E_+ + E_- = -j\omega A - \nabla\Phi_+ - \nabla\Phi_-$$

式中

$$A = \frac{\mu Il}{4\pi r_0} e^{-jkr_0} \quad \Phi_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon r_+} e^{-jkr_+} \quad \Phi_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon r_-} e^{-jkr_-}$$

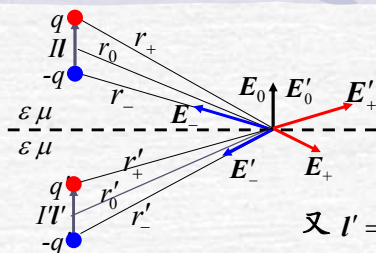
类似可以求得镜像电流元 $I'l'$ 产生的电场为

$$E' = E_0 + E'_+ + E'_- = -j\omega A' - \nabla\Phi'_+ - \nabla\Phi'_-$$

式中

$$A' = \frac{\mu I'l'}{4\pi r'_0} e^{-jkr'_0}, \quad \Phi'_+ = \frac{q'}{4\pi\epsilon r'_+} e^{-jkr'_+}, \quad \Phi'_- = -\frac{q'}{4\pi\epsilon r'_-} e^{-jkr'_-}$$

10-7 镜像原理



对于**边界平面**上任一点

$$r_0 = r'_0 \quad r_+ = r'_+ \quad r_- = r'_-$$

已设 $I'l' = Il$ ，故 $q' = q$ 。

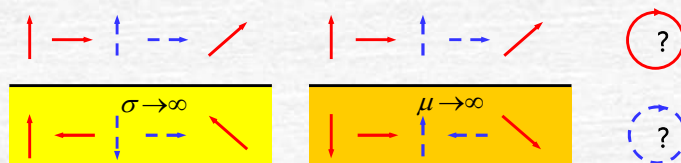
又 $I'l' = Il$ ，水平分量相互抵消，**合成电场** $(E + E')$ 的方向**垂直**于边界平面，满足原有的边界条件。

由于镜像电流元的方向与原来的电流元方向相同，这种镜像电流元称为**正像**。

类似可以证明位于无限大理想导电平面附近的水平电流元的镜像电流元为**负像**。

10-7 镜像原理

理想导电平面附近**磁流元**的**镜像**关系恰好与**电流元**情况**完全相反**，如下图示。



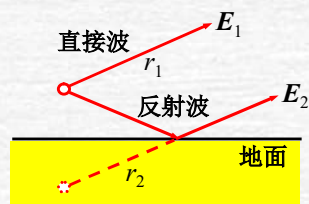
— 电流元 - - - 磁流元

镜像法的求解可归结为二元天线阵的求解。

对于实际地面，也可应用镜像原理。但是，由于地面为非理想导电体，严格分析表明，只有当天线的架空高度以及观察点离开地面的高度远大于波长时，且仅对于远区场的计算才可应用。

10-7 镜像原理

上半空间任一点场强可以认为是**直接波** E_1 与来自地面**反射波** E_2 之合成，且认为 E_1 与 E_2 的方向一致。因此，合成场为直接波与反射波的**标量和**，即



$$E = E_1 + E_2$$

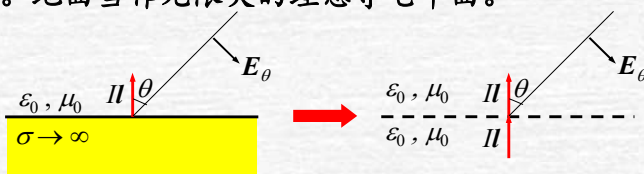
$$= E_0 \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} + RE_0 \frac{e^{-jkr_2}}{r_2}$$

式中 R 为地面反射系数。

由于地面处于天线的**远区**范围，天线的远区场具有**TEM波**性质，反射系数 R 可以近似看成是平面波在平面边界上的反射系数。实际地面对天线的**影响**归结为一个**非均匀二元天线阵**。

10-7 镜像原理

例 利用镜像原理，计算垂直接地的长度为 l 、电流为 I 的电流元的辐射场强、辐射功率及辐射电阻。地面当作无限大的理想导电平面。



解 对于无限大的理想导电平面，垂直电流元的镜像为**正像**。因此，**上半空间**的场强等于长度为 $2l$ 的电流元产生的辐射场。

$$\text{即 } E_{\theta} = j \frac{Z_0 I l \sin \theta}{\lambda r} e^{-jkr}$$

可见，场强振幅**提高一倍**。

71

10-7 镜像原理

接地的电流元**仅向**上半空间辐射，计算辐射功率时**仅需沿上半球面**进行积分。

$$\text{即 } P_r = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} S r^2 \sin \theta d\theta = 160\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

$$\text{对应的辐射电阻为 } R_r = 160\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

可见，辐射电阻也**提高一倍**。

中波广播电台使用的悬挂式垂直导线或自立式铁塔，可以看成是一种垂直接地天线。

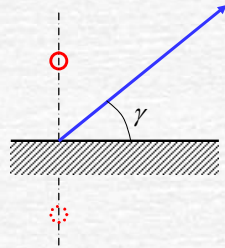
对于中波波段，地面可近似当作导电体。天线附近的地面铺设**导电网**，以提高电导率。

72

10-7 镜像原理

磁棒天线接收信号时，磁棒应与电磁波的到达方向垂直，而且磁棒必须水平放置。如果磁棒垂直于地面，接收效果显著变坏。

短波波段使用水平半波天线。由于架空高度能与波长达到同一量级，地面的影响归结为一个二元天线阵。

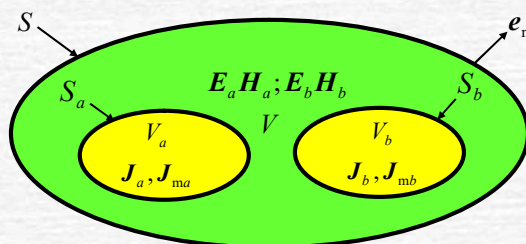


调整天线的架空高度，即可在铅垂面内形成具有一定仰角的主射方向，以便将电磁波射向地面上空的电离层，依靠电离层反射进行远距离传播。

10-8 互易原理

10-8 互易原理

设区域 V 内充满各向同性的线性介质，其中两组同频源 J_a, J_{ma} 及 J_b, J_{mb} 分别位于有限区域 V_a 及 V_b 内。



两组源及其场满足的麦克斯韦方程分别为

$$\begin{cases} \nabla \times H_a = J_a + j\omega\varepsilon E_a \\ \nabla \times E_a = -J_{ma} - j\omega\mu H_a \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times H_b = J_b + j\omega\varepsilon E_b \\ \nabla \times E_b = -J_{mb} - j\omega\mu H_b \end{cases}$$

75

10-8 互易原理

由 $\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot \nabla \times A - A \cdot \nabla \times B$ ，麦克斯韦方程可以求得下面两个方程：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] &= E_b \cdot J_a - E_a \cdot J_b + H_a \cdot J_{mb} - H_b \cdot J_{ma} \\ \oint_S [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS &= \int_V [E_b \cdot J_a - E_a \cdot J_b + H_a \cdot J_{mb} - H_b \cdot J_{ma}] dV \end{aligned}$$

上两式分别称为互易原理的微分形式和积分形式。

互易原理描述了两组同频源及其场强之间的关系。因此，若已知一组源与其场的关系，利用互易原理可以建立另一组源与其场的关系。

76

10-8 互易原理

$$\nabla \cdot [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] = E_b \cdot J_a - E_a \cdot J_b + H_a \cdot J_{mb} - H_b \cdot J_{ma}$$

$$\oint_S [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = \int_V [E_b \cdot J_a - E_a \cdot J_b + H_a \cdot J_{mb} - H_b \cdot J_{ma}] dV$$

若闭合面 S 仅包围源 a 或源 b ，则分别得到下列

结果：

$$\oint_{S_a} [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = \int_{V_a} [E_b \cdot J_a - H_b \cdot J_{ma}] dV$$

$$\oint_{S_b} [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = \int_{V_b} [H_a \cdot J_{mb} - E_a \cdot J_b] dV$$

若闭合面 S 不包括任何源，则上述面积分为零。

即
$$\oint_S [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = 0$$

若闭合面 S 包括了全部源，则上述面积分也为零。

10-8 互易原理

$$\oint_S [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = 0$$

无论 S 的大小如何，只要 S 包围了全部源，它都等于右端对 $(V_a + V_b)$ 的积分。

可见，前式左端的面积分应为常量。

为了求出这个常量，令 S 面无限地扩大至远区范围，由于远区场具有TEM波特性的特性，即 $E = ZH \times e_r$ 。代入前式，则左端面积分被积函数中两项相互抵消，导致面积分为零，即上式成立。

$$\oint_S [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = 0$$

称为罗伦兹互易定理。

10-8 互易原理

$$\oint_S [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = 0$$

$$\oint_S [(E_a \times H_b) - (E_b \times H_a)] \cdot dS = \int_V [E_b \cdot J_a - E_a \cdot J_b + H_a \cdot J_{mb} - H_b \cdot J_{ma}] dV$$

既然上式成立，那么下式右端体积分为零。

$$\text{即} \quad \int_V [E_b \cdot J_a - E_a \cdot J_b + H_a \cdot J_{mb} - H_b \cdot J_{ma}] dV = 0$$

或写为

$$\int_{V_a} [E_b \cdot J_a - H_b \cdot J_{ma}] dV = \int_{V_b} [E_a \cdot J_b - H_a \cdot J_{mb}] dV$$

此式称为**卡森互易定理**。

上述互易定理成立并不要求空间是均匀的。可以证明，当 V 中局部区域内存在理想导体或理想导磁体时，卡森互易定理应该仍然成立。

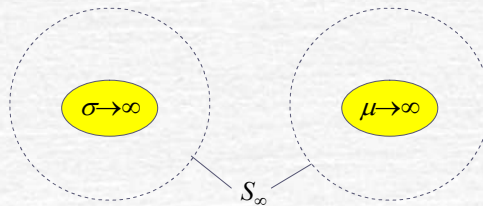
10-8 互易原理

根据矢量混合积公式，可得

$$(E_b \times H_a) \cdot dS = (H_a \times dS) \cdot E_b = (dS \times E_b) \cdot H_a$$

$$(E_a \times H_b) \cdot dS = (H_b \times dS) \cdot E_a = (dS \times E_a) \cdot H_b$$

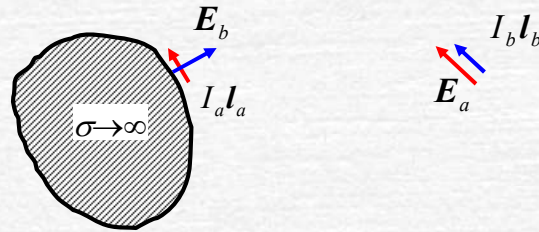
上两式中 $(H \times dS)$ 及 $(dS \times E)$ 均表示相应场强**切向**分量。



那么，在远区闭合面 S_∞ 与理想导体表面或理想导磁体表面包围的区域中，卡森互易定理仍然成立。

10-8 互易原理

例 利用互易定理，证明位于有限尺寸的理想导体体表面附近的切向电流元没有辐射作用。

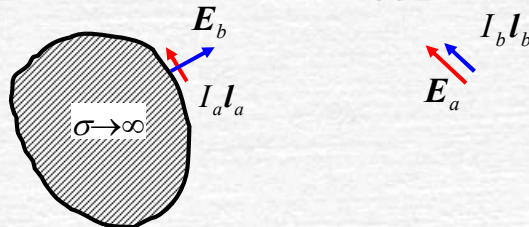


解：镜像法是否可用？

令电流元 $I_b l_b$ 与 E_a 平行，在电流元 $I_a l_a$ 附近产生的电场为 E_b ，应用卡森互易原理，得

$$\int_{V_a} E_b \cdot J_a dV = \int_{V_b} E_a \cdot J_b dV$$

10-8 互易原理



考虑到电流元 $Il = (JdS)l = JdV$ ，求得

$$E_b \cdot I_a l_a = E_a \cdot I_b l_b$$

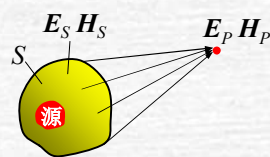
但是 $E_b \cdot I_a l_a = 0$ $E_a \cdot I_b l_b = E_a I_b l_b$

得 $E_a I_b l_b = 0$ 但 $I_b l_b \neq 0$ 故只可能 $E_a = 0$ 。

10-9 惠更斯原理

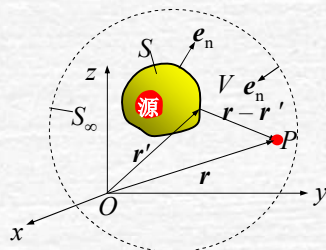
83

10-9 惠更斯原理



包围波源的闭合面上各点场都可作为二次波源，它们共同决定面外场，这就是**惠更斯原理**。这些二次波源称为**惠更斯元**。

闭合面上全部 E_S, H_S 共同决定闭合面外 E_P 及 H_P 。



为了导出 E_P, H_P 与 E_S, H_S 之间的定量关系，令场点 P 位于闭合面 S 与 S_∞ 之间的无源区 V 中。

84

10-9 惠更斯原理

可以证明, $E_P H_P$ 与 $E_S H_S$ 的关系式为

$$E_P(r) = \oint_S \left[E_S(r') \frac{\partial G_0(r, r')}{\partial n} - G_0(r, r') \frac{\partial E_S(r')}{\partial n} \right] dS'$$

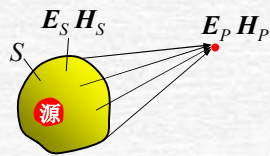
$$H_P(r) = \oint_S \left[H_S(r') \frac{\partial G_0(r, r')}{\partial n} - G_0(r, r') \frac{\partial H_S(r')}{\partial n} \right] dS'$$

式中 $G_0(r, r') = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$ **自由空间格林函数**

上式称为**基尔霍夫公式**。因为它通过直角坐标分量利用标量格林定理导出的, 故又称为标量绕射公式。

还有其它公式描述惠更斯原理。

10-9 惠更斯原理



闭合面上各点的惠更斯元对于空间某点场强的贡献有所不同, **主要贡献**来自于闭合面上面对场点的惠更斯源。

惠更斯原理意味电磁能量由波源到达场点的过程中电磁波传播占据一定的空间, 而**不是**沿一条线传播。

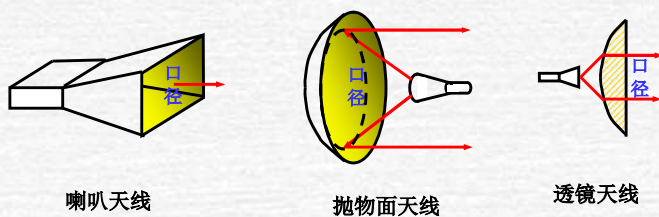
认为到达场点的电磁能量仅沿一条线传播的观点即是**几何光学**的射线原理。

只有当波长为零时, 传播轨迹才是一条曲线。因此, 几何光学原理又称为几何光学近似。

10-9 惠更斯原理

87

10-10 面天线辐射



三种天线都是通过一个平面口径向外辐射电磁能量，因此，这类天线称为**面天线**。

面天线的求解分为两步：首先求**口径场**，然后根据口径场再求解**空间场**。前者称为面天线的内部问题，后者称为外部问题。

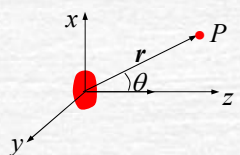
88

10-10 面天线辐射

前已指出，任何描述惠更斯原理的数学公式中的积分表面必须是**闭合**的。对于有限口径场的辐射，一种补救的办法是同时考虑口径边缘电荷的辐射作用。但是对于主叶内的场强，忽略边缘电荷所产生的**误差不大**。

首先计算惠更斯元的辐射场。

惠更斯元的**辐射场**可以表示为



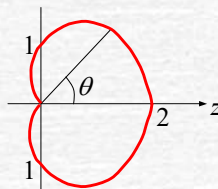
$$\psi_s = \psi_{s0} e^{-jkz}$$

式中 ψ_{s0} 为 $z=0$ 处的**惠更斯元**。

10-10 面天线辐射

对于**远区场**，可取

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \right) \approx -jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \cos \theta$$



得
$$\psi_P = -j \frac{\psi_{s0} dS}{2\lambda r} (1 + \cos \theta) e^{-jkr}$$

可见，方向性因子为 $f(\theta, \phi) = 1 + \cos \theta$ 。

任意平面口径场可以归结为很多**振幅不等，相位不同**的惠更斯元的辐射场的合成。

若以 ψ_{s0} 代表口径场的某一直角坐标分量，由于口径为平面，因此，各面元产生的远区场强**方向一致**，可以直接积分求得。

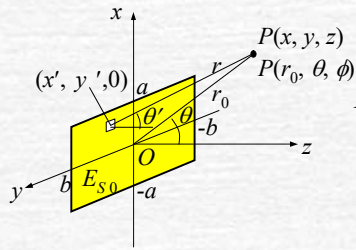
即
$$\psi_P = -\frac{j}{2\lambda} \int_S \frac{\psi_{s0} e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \theta') dS'$$

10-10 面天线辐射

例 计算边长为 $2a$ 及 $2b$ 的均匀同相矩形口径场的辐射场强。

解 口径场的某一直角坐标分量为 $E_S = E_{S0}e^{-jkz}$

式中 E_{S0} 与坐标无关。



则

$$E_P = -j \frac{E_{S0}}{2\lambda} \int_S \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + \cos \theta') dS'$$

对于远区, 可取

$$r \approx r_0 - \frac{xx' + yy'}{r_0}$$

还可认为 P 点对于各个面元 dS' 均处于同一方位, 即 $\theta' = \theta$, 故 $1 + \cos \theta' \approx 1 + \cos \theta$, 且可取 $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_0}$ 。

10-10 面天线辐射

求得 $E_P = -j \frac{E_{S0} e^{-jkr_0}}{2\lambda r_0} (1 + \cos \theta) \int_{-b}^b dy' \int_{-a}^a e^{jk \sin \theta (x' \cos \phi + y' \sin \phi)} dx'$

$$E_P = -j \frac{2ab E_{S0}}{\lambda r_0} (1 + \cos \theta) \frac{\sin(ka \sin \theta \cos \phi)}{ka \sin \theta \cos \phi} \frac{\sin(kb \sin \theta \sin \phi)}{kb \sin \theta \sin \phi} e^{-jkr_0}$$

可见, **方向性因子**为

$$f(\theta, \phi) = (1 + \cos \theta) \frac{\sin(ka \sin \theta \cos \phi)}{ka \sin \theta \cos \phi} \frac{\sin(kb \sin \theta \sin \phi)}{kb \sin \theta \sin \phi}$$

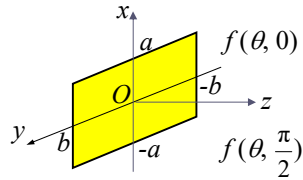
实际中, 仅需 $\phi = 0$ 及 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 两个主平面内的方向图。

$$f(\theta, 0) = (1 + \cos \theta) \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}$$

$$f(\theta, \frac{\pi}{2}) = (1 + \cos \theta) \frac{\sin(kb \sin \theta)}{kb \sin \theta}$$

10-10 面天线辐射

若 $2a = 3\lambda$, $2b = 5\lambda$, 则两个主平面的方向图如下:



主叶半功率角 $2\theta_{0.5}$ 和零功率角 $2\theta_0$ 分别近似为

$$2\theta_{0.5} \approx 0.442 \frac{\lambda}{a} \text{ 或 } 0.442 \frac{\lambda}{b} \quad 2\theta_0 \approx \frac{\lambda}{a} \text{ 或 } \frac{\lambda}{b}$$

方向性系数为 $D = \frac{4\pi A}{\lambda^2}$ 式中 $A = 4ab$

可见, 口径的波长尺寸越大, 主叶越窄, 方向性系数越大。

10-10 面天线辐射

若口径场振幅不均匀, 但其相位相同或以口径中心为对称分布, 主射方向仍然为正前方, 但方向性系数降低。再考虑到天线的损耗, 通常面天线的增益可以表示为

$$G = \nu \frac{4\pi A}{\lambda^2}, \nu < 1$$

式中 ν 称为口径利用系数。

口径场振幅的不均匀性, 相位畸变, 天线损耗以及馈源阻挡等均使 ν 值下降。通常 $\nu \approx 0.5$ 左右。

地球站常用的30m直径的抛物面天线 $\nu \approx 0.6$ 。
若工作波长 $\lambda = 7.5\text{cm}$, 则 $G \approx 59\text{dB}$ 。