2019 北京市西城区高三一模数学（理科）考试逐题解析

2019.4

第一部分（选择题，共 40 分）

一、选择题（本部分共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分.请在每小题列出的四个选项中，选出最符合题目要求的一项.）

1．设全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\,|\,0<x<2\}$，$B=\{x\,|-3,-1,1,3\}$，则集合$(\complement_U A)\cap B=$

A．$\{-3,-1\}$　　B．$\{-3,-1,3\}$

C．$\{1,3\}$　　D．$\{-1,1\}$

【答案】B

【解析】$U=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,0<x<2\}$，

$\therefore \complement_U A=\{x\,|\,x\le 0$ 或 $x\ge 2\}$，

$\therefore (\complement_U A)\cap B=\{-3,-1,3\}$，故选 B.

2．若复数$z=\dfrac{1-i}{2-i}$，则在复平面内z对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限

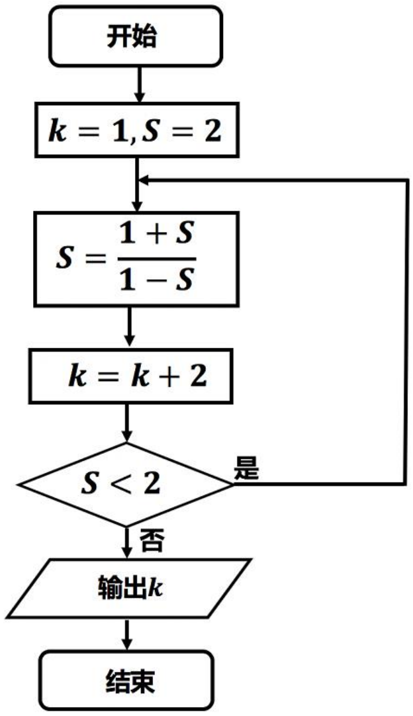
C．第三象限　　D．第四象限

【答案】D

【解析】复数$z=\dfrac{1-i}{2-i}=\dfrac{(1-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2+i-2i-i^2}{4-i^2}=\dfrac{3-i}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$，

对应的点为$(\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{5})$，在第四象限，故选 D.

3．执行如图所示的程序框图，则输出的 k 值为



A．4

B．5

C．7

D．9

【答案】D

【解析】$k=1$，$s=2$；

$s=\frac{1+s}{1-s}=-3$，$k=3$；

$s=-\frac{1}{2}$，$k=5$；

$s=\frac{1}{3}$，$k=7$；

$s=2$，$k=9$，不满足 $s<2$，输出 $k=9$，故选 D.

4. 下列直线中，与曲线 C：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+4t \end{cases}$（$t$ 为参数）没有公共点的是

A．$2x+y=0$　　B．$2x+y-4=0$

C．$2x-y=0$　　D．$2x-y-4=0$

【答案】C

【解析】将参数方程化为直角坐标方程 C：$2x-y-4=0$，

则选项 C 中 $2x-y=0$ 与 $2x-y-4=0$ 平行，故选 C.

5．设a，b，m均为正数，则“$b>a$”是“$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$”的

A．充分而不必要条件

B．必要而不充分条件

C．充要条件

D．既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】证明充分条件：

$\frac{a}{b}=\frac{a(1+\frac{m}{a})}{b(1+\frac{m}{a})}=\frac{a+m}{b+\frac{b}{a}m}$，$\because b>a$，$\therefore \frac{b}{a}>1$，

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{a+m}{b+\frac{b}{a}m}<\frac{a+m}{b+m}$，

证明必要条件：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$，$ab+bm>ab+am$，$bm>am$，$b>a$，

即$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$，则$b>a$.互为充要条件，故选 C.

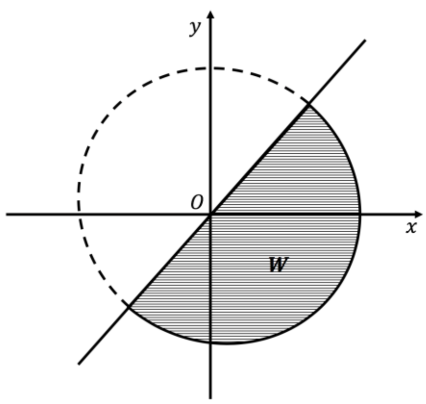
6．如图，阴影表示的平面区域W是由曲线$x-y=0$和$x^2+y^2=2$所围成的，若点$P(x,y)$在W内（含边界），则$z=4x+3y$的最大值和最小值分别为

A．$5\sqrt{2}$，-7

B．$5\sqrt{2}$，$-5\sqrt{2}$

C．7，$-5\sqrt{2}$

D．7，-7



【答案】A

【解析】设直线$4x+3y-z=0$，

由题意知$W: x^2+y^2=2(x\geq y)$，直线与W有公共点，

令$\frac{|z|}{\sqrt{4^2+3^2}}\leq\sqrt{2}$，则$|z|\leq 5\sqrt{2}$，

当$z=5\sqrt{2}$时，$4x+3y-5\sqrt{2}=0$与圆相切于切点$(\frac{4\sqrt{2}}{5},\frac{3\sqrt{2}}{5})$，符合题意；

当$z=-5\sqrt{2}$时，$4x+3y+5\sqrt{2}=0$与圆相切于切点$(-\frac{4\sqrt{2}}{5},-\frac{3\sqrt{2}}{5})$，舍.

由$x\geq y$，当$x=y=-1$时z有最小值-7.

综上，故选 A.

7．团体购买公园门票，票价如下表：

购票人数	1~50	51~100	100 以上
门票价格	13 元/人	11 元/人	9 元/人

现某单位要组织其市场部和生产部的员工游览该公园，若按部门作为团体，选择两个不同的时间分别购票游览公园，则共需支付门票费为1290 元；若两个部分合在一起作为一个团体，同一时间购票游览公园，则需支付门票费为990 元，那么这两个部门的人数之差为

A． 20　　B． 30　　C． 35　　D． 40

【答案】B

【解析】假设市场部员工为x人，生产部员工为y人，不妨设$y>x$，

当市场部与生产部分别购票时，$13x+11y=1290$元，

当市场部与生产部一同购票时，$9x+9y=990$元，解得$x=40$人，$y=70$人，

所以两部门人数之差为$y-x=30$人，故选 B.

8．如果把一个平面区域内两点间的距离的最大值称为此区域的直径，那么曲线 $x^4+y^2=2$ 围成的平面区域的直径为

A．$\sqrt[4]{32}$　　B．3　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

【答案】B

【解析】曲线是关于点 $(0,0)$ 中心对称的图形，

所以曲线上点 (x_0,y_0) 到原点距离为直径长的一半，

$d=\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-0)^2}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2+2-x_0^4}=\sqrt{-x_0^4+x_0^2+2}$，$x_0^2\in[0,\sqrt{2}]$，

当 $x_0^2=\dfrac{1}{2}$ 时，得 d 的最大值是 $\dfrac{3}{2}$，

所以直径为 3，故选 B.

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，共 30 分）

9．在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，$a_5=8$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$___________.

【答案】$2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$

【解析】等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=1$，$a_5=8$，

$\therefore q^3=\dfrac{a_5}{a_2}$，$\therefore q=2$，

$\therefore a_1=\dfrac{a_2}{q}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$.

10．设F_1，F_2为双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点，若双曲线$C$的两个顶点恰好将线段$F_1F_2$三等分，则双曲线$C$的离心率为__________.

【答案】3

【解析】设双曲线C的左右顶点分别为A_1，A_2，

由题意得，A_1A_2将F_1F_2三等分，$\therefore |A_1A_2|=\dfrac{1}{3}|F_1F_2|$，

即$2a=\dfrac{1}{3}\cdot 2c$，$a=\dfrac{1}{3}c$，$\therefore e=\dfrac{c}{a}=3$.

11．函数$f(x)=\sin 2x+\cos 2x$的最小正周期$T=$__________；如果对于任意的$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)\le a$，那么实数a的取值范围是__________.

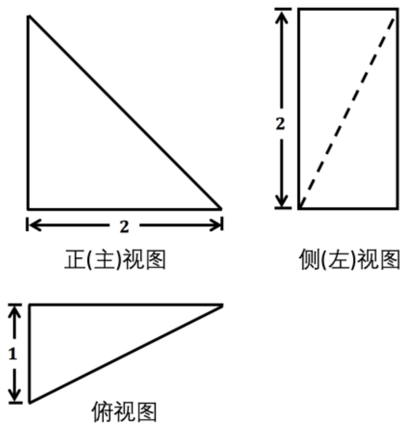
【答案】π；$[\sqrt{2},+\infty)$

【解析】$\because f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}(\sin 2x+\dfrac{\pi}{4})$，

$\therefore T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

$\because f(x)=\sqrt{2}(\sin 2x+\dfrac{\pi}{4})\le\sqrt{2}$，

$\therefore a\ge\sqrt{2}$.

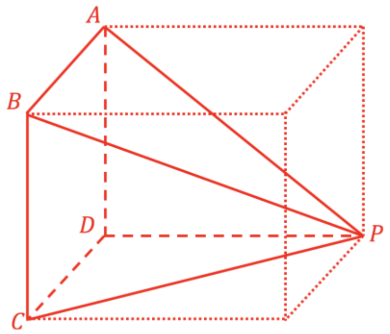


12．某四棱锥的三视图如图所示，

那么此四棱锥的体积为__________.

【答案】$\dfrac{4}{3}$

【解析】$V=\dfrac{1}{3}\cdot S\cdot h=\dfrac{1}{3}\times 2\times 1\times 2=\dfrac{4}{3}$.



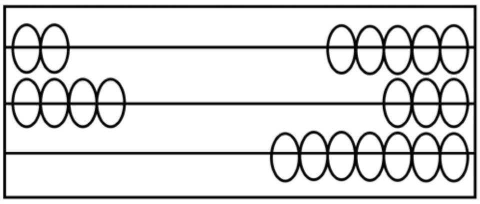
13．能说明“若$\sin\alpha=\cos\beta$，则$\alpha+\beta=k\cdot360°+90°$，其中$k\in\mathbf{Z}$”为假命题的一组$\alpha$，$\beta$的值是__________.

【答案】$\alpha=180°$，$\beta=90°$（答案不唯一）

【解析】取$\sin\alpha=\sin180°=0$，$\cos\beta=\cos90°=0$，满足$\sin\alpha=\cos\beta$，

但$\alpha+\beta=270°$，不满足$\alpha+\beta=k\cdot360°+90°$，因此原命题为假命题.

14．如图所示，玩具计数算盘的三档上各有7个算珠，现将每档算珠分为左右两部分，左侧的每个算珠表示数2，右侧的每个算珠表示数1（允许一侧无珠），记上，中，下三档的数字和分别为a，b，c．例如，图中上档的数字和$a=9$．若a，b，c成等差数列，则不同的分珠计数法有_______种．



【答案】32

【解析】每档可取7到14中的每个整数，

若公差为0，共有8种，

若公差为±1，则共有12种，

若公差为±2，则共有8种，

若公差为±3，则各有4种，

所以不同分珠方法有32种.

三、解答题（共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15.（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，已知$a^2+c^2-b^2=mac$，其中$m\in\mathbf{R}$.

（I）判断m能否等于3，并说明理由；

（II）若$m=-1$，$b=2\sqrt{7}$，$c=4$，求$\sin A$.

【解析】

（I）m不能等于3，理由如下：

由余弦定理得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{mac}{2ac}=\dfrac{m}{2}$，

若$m=3$，则$\cos B=\dfrac{m}{2}=\dfrac{3}{2}>1$，而$\cos B\in(-1,1)$，故$m$不能等于$3$.

（II）把$m=-1$，$b=2\sqrt{7}$，$c=4$代入$a^2+c^2-b^2=mac$，

得到$a^2+16-28=-4a$，即$a^2+4a-12=0$，

故$(a-2)(a+6)=0$，解得$a=2$或者$a=-6$，

显然边长$a>0$，所以$a=2$.

$\therefore\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

$\because\sin^2 A+\cos^2 A=1$且$\sin A>0$，

$\therefore\sin A=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

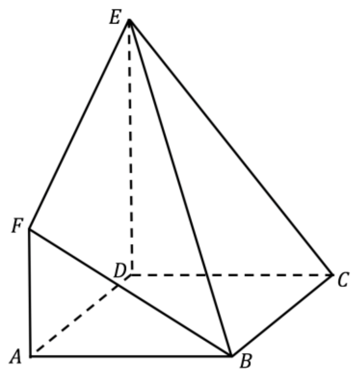
16.（本小题满分 14 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，$AF \parallel DE$， $DE \perp AD$， $AD \perp BE$， $AF = AD = \frac{1}{2}DE = 1$， $AB = \sqrt{2}$.

（I）求证：$BF \parallel$ 平面 CDE；

（II）求二面角 $B-EF-D$ 的余弦值；

（III）判断线段 BE 上是否存在点 Q，使得平面 $CDQ \perp$ 平面 BEF？若存在，求出 $\frac{BQ}{BE}$ 的值，若不存在，说明理由.



【解析】（I）$\because AF \parallel DE$，$AF \not\subset$ 面 DCE， $DE \subset$ 面 DCE，

$\therefore AF \parallel$ 面 CDE，

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$， $AB \not\subset$ 面 CDE， $CD \subset CDE$，

$\therefore AB \parallel$ 面 CDE，

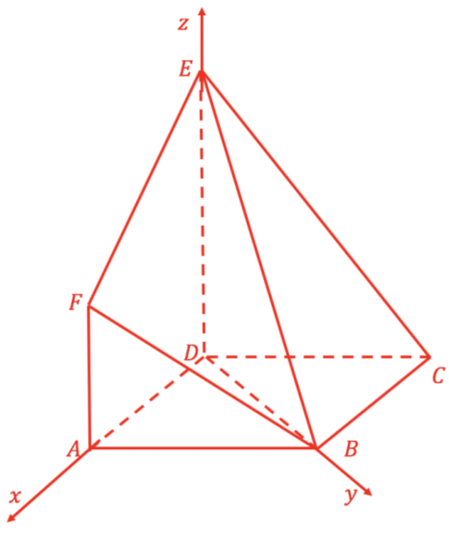
又$\because AB \cap AF = A$，

$AB \subset$ 面 ABF， $AF \subset$ 面 ABF，

$\therefore$ 面 $ABF \parallel$ 面 CDE，

又$\because BF \subset$ 面 ABF，

$\therefore BF \parallel$ 面 CDE.



（II）$\because$ 梯形 $ADEF$ 与平行四边形 $ABCD$ 互相垂直，

$DE \perp AD$， $AD \perp BE$，

$\therefore$ 建立如图空间直角坐标系，

得到 $B(0,1,0)$， $E(0,0,2)$， $F(1,0,1)$， $D(0,0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{BE} = (0,-1,2)$，

$\therefore \overrightarrow{BF} = (1,-1,1)$，

设$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$是平面$BEF$的法向量，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BE}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，

令$x_1=1$，$\overrightarrow{n_1}=(1,2,1)$，

$\therefore$同理平面DEF的法向量$\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$，

$\therefore \cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{2}{\sqrt{1}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

$\because$二面角$B-EF-D$为锐角，

$\therefore$二面角$B-EF-D$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

（III）存在点Q，满足题意.

由（II）知，平面BEF的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,2,1)$，

设$Q(x,y,z)$，则$B(0,1,0)$，$E(0,0,2)$，$D(0,0,0)$，$C(-1,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{BE}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{BQ}=(x,y-1,z)$，

$\because \overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BE}$，

$\therefore Q(0,1-\lambda,2\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{DQ}=(0,1-\lambda,2\lambda)$，$\overrightarrow{DC}=(-1,1,0)$，

设$\overrightarrow{n_3}=(x_3,y_3,z_3)$是平面$CDQ$的法向量，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{DQ}=0\\ \overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，令$x_3=1$，$\therefore \overrightarrow{n_3}=(1,1,\dfrac{\lambda-1}{2\lambda})$，

$\because$面$CDQ\perp$面BEF，

$\therefore \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_3}=0$，

$\therefore 1+2+\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}=0$，

$\therefore \lambda=\dfrac{1}{7}$，$\therefore \dfrac{BQ}{BE}=\dfrac{1}{7}$.

17.（本小题满分 13 分）

为培养学生的阅读习惯，某校开展了为期一年的“弘扬传统文化，阅读经典名著”活动. 活动后，为了解阅读情况，学校统计了甲、乙两组各 10 名学生的阅读量（单位：本），统计结果用茎叶图表示如下，乙组记录中有一个数据模糊，无法确认，在图中以 a 表示.

甲		乙
8 6 2 1	0	1 2 4 4
7 2 2 1 0	1	2 3 6 6 a
1	2	0

（I）若甲组阅读量的平均值大于乙组阅读量的平均值，求图中 a 的所有可能取值；

（II）将甲、乙两组中阅读量超过 15 本的学生称为“阅读达人”，设 $a=3$，现从所有的“阅读达人”里任取 3 人，求其中乙组人数 X 的分布列和数学期望.

（III）记甲组阅读量的方差为 s_0^2. 在甲组中增加一名学生 A 得到新的甲组，若 A 的阅读量为 10，则记新甲组阅读量的方差为 s_1^2；若 A 的阅读量为 20，则记新甲组阅读量的方差为 s_2^2，试比较 s_0^2，s_1^2，s_2^2 的大小.（结论不要求证明）

【解析】（I）甲乙两组总阅读量分别为：

甲：$1+2+6+8+10+11+12+12+17+21=100$；

乙：$1+2+4+4+12+13+16+16+20+10+a=98+a$.

平均数：甲 $>$ 乙，即数据之和甲 $>$ 乙，即 $100>98+a$， $a<2$，

$\because a\in\mathbf{N}$，所以 a 的可取值为 0 或 1.

（II）甲乙两组阅读达人的人数如下：

甲：17，21 共 2 人；

乙：16，16，20 共 3 人.

即从 5 人中共抽取 3 人，其中乙组人数 X 可取 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{6}{10}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，

所以 X 的分布列如下：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

数学期望：$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{6}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$.

（III）$s_1^2<s_0^2<s_2^2$.

18.（本小题满分 13 分）

设函数 $f(x)=me^{x}-x^{2}+3$，其中 $m\in R$.

（Ⅰ）当 $y=f(x)$ 为偶函数时，求函数 $h(x)=xf(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点，求 m 的取值范围.

【解析】

（Ⅰ）因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$.

$me^{-x}-x^{2}+3=me^{x}-x^{2}+3$，即 $m(e^{-x}-e^{x})=0$，所以 $m=0$. 所以 $h(x)=xf(x)=x(-x^{2}+3)=-x^{3}+3x$，

$h'(x)=-3x^{2}+3$. 令 $h'(x)=0$， $x=\pm 1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	0	+	0	$-$
$h(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $h(x)$ 存在极小值为 $h(-1)=-2$， 极大值为 $h(1)=2$.

（Ⅱ） $f(x)=me^{x}-x^{2}+3$ 在 $[-2,4]$ 上有两个零点， 等价于 $m=\dfrac{x^{2}-3}{e^{x}}$ 在 $[-2,4]$ 上有两个根.

令 $g(x)=\dfrac{x^{2}-3}{e^{x}}$， $g'(x)=\dfrac{2x\cdot e^{x}-e^{x}(x^{2}-3)}{(e^{x})^{2}}=\dfrac{-x^{2}+2x+3}{e^{x}}=\dfrac{-(x-3)(x+1)}{e^{x}}$，

令 $g'(x)=0$， $x_{1}=3$， $x_{2}=-1$.

x	$(-2,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,4)$
$g'(x)$	$-$	0	+	0	$-$
$g(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $g(x)$ 在 $(-2,1)$， $(3,4)$ 上单调递减，在 $(-1,3)$ 上单调递增，

又因为 $g(-2)=e^{2}$， $g(-1)=-2e$， $g(3)=\dfrac{6}{e^{2}}<g(-2)$， $g(4)=\dfrac{13}{e^{4}}>g(-1)$.

所以当 $m=6e^{-3}$ 或 $-2e<m<13e^{-4}$ 时， $m=\dfrac{x^{2}-3}{e^{x}}$ 在 $[-2,4]$ 上有且只有两个根，

即当 $m=6e^{-3}$ 或 $-2e<m<13e^{-4}$ 时， 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上有两个零点.

19．（本小题满分 14 分）

已知椭圆$W:\dfrac{x^2}{4m}+\dfrac{y^2}{m}=1$的长轴长为$4$，左、右顶点分别为$A$，$B$．经过点$F(n,0)$的直线与椭圆$W$相交于不同的两点$C$，$D$（不与点$A$，$B$重合）．

（Ⅰ）当$n=0$，且直线$CD\perp x$轴时，求四边形$ACBD$的面积；

（Ⅱ）设$n=1$，直线CB与直线$x=4$相交于点M，求证：A，D，M三点共线．

【解析】

（Ⅰ）由题意，得$a^2=4m=4$，解得$m=1$，所以椭圆W方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

当$n=0$，且直线$CD\perp x$轴时，$|CD|=2$，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$．

（Ⅱ）设$M(4,m)$，

①当直线CD的斜率k不存在时，由题意，得CD的方程为$x=1$，

不妨令$C(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$D(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

由$k_{CB}=k_{BM}$可得$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{m}{2}$，$\therefore m=\sqrt{3}$，

此时$k_{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，且$k_{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\therefore A$，$D$，$M$三点共线．

②当直线CD的斜率k存在时，设$CD:y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$联立得$(1+4k^2)x^2-8kx+4k^2-4=0$，

显然$\Delta>0$，$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{1+4k^2}\\ x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$，

由$k_{CB}=k_{BM}$得$\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{m}{2}$，$\therefore M(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$，

设直线 AD 与 $x=4$ 交于点 $N(4,n)$，由 $k_{AD}=k_{AN}$ 得 $\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{n}{6}$，$\therefore N(4,\dfrac{6y_2}{x_2+2})$，

$$\begin{aligned}|MN|&=\left|\frac{2y_1}{x_1-2}-\frac{6y_2}{x_2+2}\right|=\left|\frac{2k(x_1-1)}{x_1-2}-\frac{6k(x_2-1)}{x_2+2}\right|\\&=2|k|\left|\frac{(x_1-1)(x_2+2)-3(x_2-1)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2+2)}\right|\\&=2|k|\left|\frac{-2x_1x_2+5(x_1+x_2)-8}{(x_1-2)(x_2-2)}\right|\\&=\left|\frac{2k}{(x_1-2)(x_2-2)}\right|\cdot\left|\frac{-8k^2+8}{1+4k^2}+\frac{40k^2}{1+4k^2}+\frac{-8-32k^2}{1+4k^2}\right|\\&=0\end{aligned}$$

$\therefore M$ 、N 重合，

$\therefore A$，D，M 三点共线.

20．（本小题满分 13 分）

如图，设 A 是由 $n\times n(n\ge 2)$ 个实数组成的 n 行 n 列的数表，其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示位于第 i 行第 j 列的实数，且 $a_{ij}\in\{1,-1\}$.

a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	a_{nn}

定义 $p_{st}=a_{s1}a_{t1}+a_{s2}a_{t2}+\cdots+a_{sn}a_{tn}(s,t=1,2,\cdots,n)$ 为第 s 行与第 t 行的积.若对于任意 $s,t(s\ne t)$，都有 $p_{st}=0$，则称数表 A 为完美数表.

（Ⅰ）当 $n=2$ 时，试写出一个符合条件的完美数表；

（Ⅱ）证明：不存在10行10列的完美数表；

（Ⅲ）设 A 为 n 行 n 列的完美数表，且对于任意的 $i=1,2,\cdots,l$ 和 $j=1,2,\cdots,k$，都有 $a_{ij}=1$，证明：$kl\le n$.

【解析】

（Ⅰ）

1	1
1	-1

（Ⅱ）假设存在.

$\because \sum\limits_{i=1}^{10}a_{1i}\cdot a_{2i}=0$，$\sum\limits_{i=1}^{10}a_{1i}\cdot a_{3i}=0$，$\sum\limits_{i=1}^{10}a_{2i}\cdot a_{3i}=0$，

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{10}(a_{1i}+a_{2i}+a_{3i})^2=\sum\limits_{i=1}^{10}{a_{1i}}^2+\sum\limits_{i=1}^{10}{a_{2i}}^2+\sum\limits_{i=1}^{10}{a_{3i}}^2+\sum\limits_{i=1}^{10}a_{1i}\cdot a_{2i}+\sum\limits_{i=1}^{10}a_{1i}\cdot a_{3i}+\sum\limits_{i=1}^{10}a_{2i}\cdot a_{3i}$，

$\therefore \sum_{i=1}^{10}(a_{1i}+a_{2i}+a_{3i})^2=30$，

$\because (a_{1i}+a_{2i}+a_{3i})^2$ 值为1或9，此方程无解，矛盾.

$\therefore$ 不存在10行10列完美数表.

（III）$\sum_{r=1}^{n}(a_{1r}+a_{2r}+\cdots+a_{lr})^2=\sum_{p=1}^{k}(a_{1p}+a_{2p}+\cdots+a_{lp})^2+\sum_{q=k+1}^{n}(a_{1(k+1)}+a_{2(k+1)}+\cdots+a_{l(k+1)})^2$

$=\sum_{r=1}^{n}a_{1r}{}^2+\cdots+\sum_{r=1}^{n}a_{lr}{}^2+0$，

即 $k\cdot l^2+\sum_{r=1}^{n}(a_{1(k+1)}+\cdots+a_{l(k+1)})^2=l\cdot n$，

$\therefore l\cdot n-k\cdot l^2\geq 0$，

$\therefore n\geq k\cdot l$.