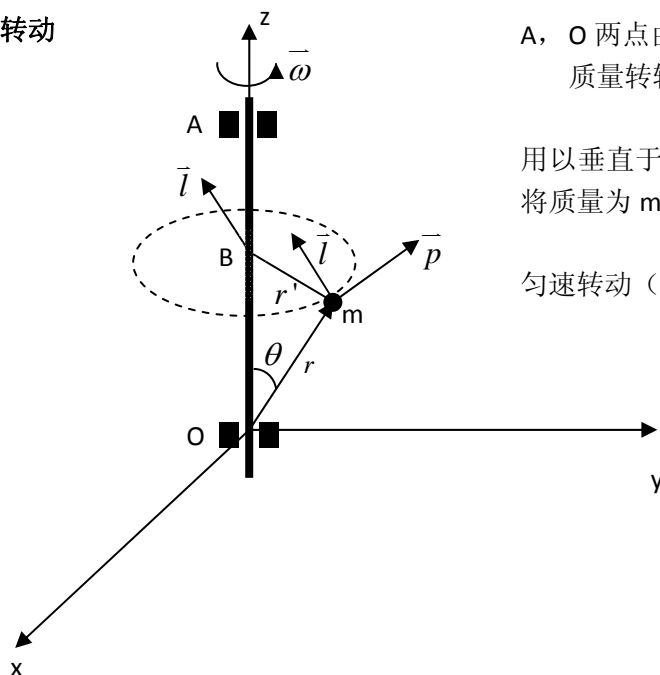


第 12 次课 (单质点绕轴转动, 角动量守恒, 陀螺, 地球的进动) 10 月 17 日

角动量与角速度

$$\begin{array}{ccc} \vec{v} & \vec{p} & \vec{v} // \vec{p} \\ \downarrow & \downarrow & \\ \vec{\omega} & \vec{l} & \vec{\omega} \sim \vec{l} \text{ 关系? ?} \end{array}$$

单质点绕轴转动



A, O 两点由两轴承 (无摩擦) 将无质量转轴固定在 z 轴方向上

用以垂直于转轴且长度为 r' 的轻杆将质量为 m 的转轴连接于 B 点

匀速转动 (ω), 无重力势场

角速度: $\vec{\omega} = \frac{v}{r'} \hat{k} = \frac{v}{r \sin \theta} \hat{k}$

一般情况 \vec{l} 不平行 $\vec{\omega}$

角动量: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{l}_z + \vec{l}_\perp$

所以 $\vec{l} = I\vec{\omega}$ 一般不成立

相对 O 点



但是本例中: $\vec{l}_z = I\vec{\omega}$

平行于 z 轴分量
垂直 z 轴分量

$$\begin{aligned} l_z &= l \sin \theta = rp \sin \theta \\ &= rmv \sin \theta \\ &= rm(r' \omega) \sin \theta \\ &= mr'^2 \omega \\ &= I\omega \end{aligned}$$

$\vec{l} = I\vec{\omega}$ 特定条件: 1) 角动量计算相对一特殊点, 例如本例中的 B 点

2) 相对于转轴对称的物体

非轴对称物体以稳定角速度转动必须有约束, 本例中的轴承约束转轴.

轴对称 \rightarrow 动平衡 \rightarrow 实验室中发生的真实故事

角动量守恒

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}$$

当 $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$: $\vec{L} = \text{常量}$ 或 $\vec{L}_i = \vec{L}_f$

举例: 1) 恒星塌缩: 太阳 \rightarrow 中子星

30 天一转 10^3 转/秒

2) 猫的下落: 总是四脚落地, 在空中它是如何翻转

3) 银河系等为何是扁平盘状: 角动量守恒 \rightarrow 要求在垂直 \vec{L} 方向不能无限塌缩
轨道稳定

4) 跳水运动员的空翻: 初始角动量的来源

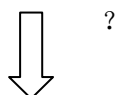
5) 例 10-4 宇航员的悲剧 $r_i = 180m$

角动量守恒 $mvr = mv_i r_i$

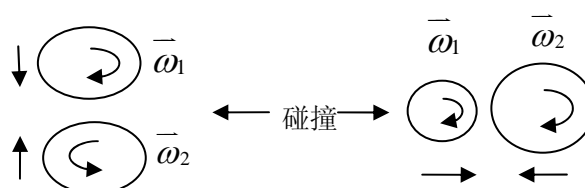
r	v	F
180m	2.5m/s	4.2N
50m	9m/s	194N
5m	90m/s	$1.94 \times 10^5 N$

动量 — 冲量定理 $d\vec{p} = \vec{F}dt$ 或 $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}dt}_{\text{冲量}}$

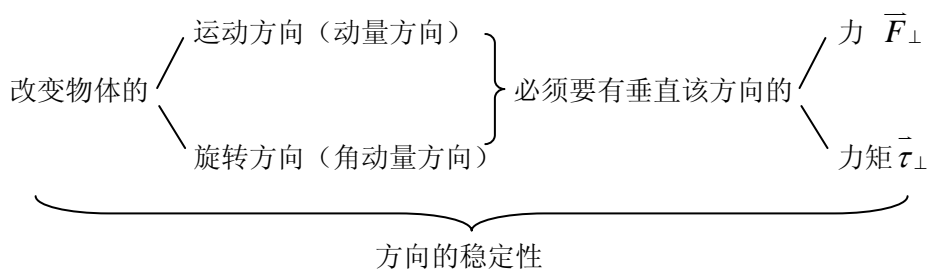
角动量 — 角冲量定理 $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$ 或 $\Delta\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}dt}_{\text{角冲量或冲量矩}}$



思考解决角动量碰撞问题

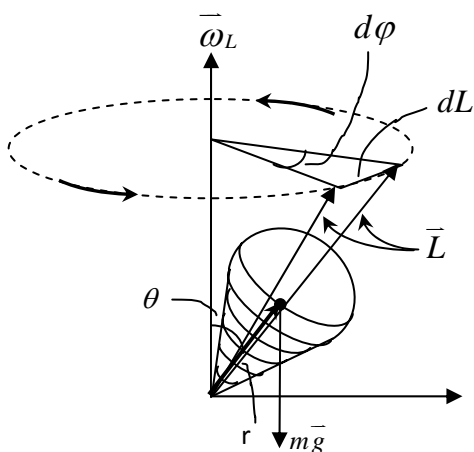
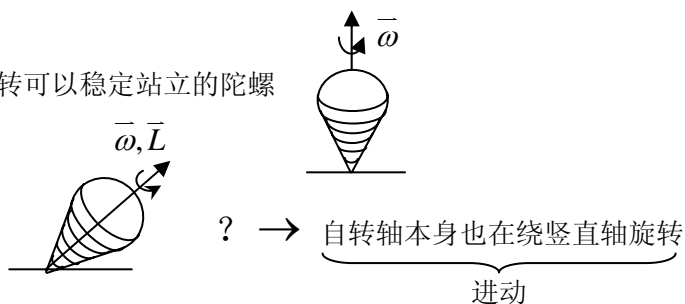


定点转动问题：陀螺



例如：静止无法站立，而旋转可以稳定站立的陀螺

而且还能斜着站立



$$\tau = mgr \sin \theta = \frac{dL}{dt} = \frac{L \sin \theta d\phi}{dt} = L \sin \theta \omega_p$$

$$\omega_p = \frac{mgr}{L}$$

ω_p : 进动角速率

与质量或重力以及重心到定点的距离成正比
与自旋角动量反比

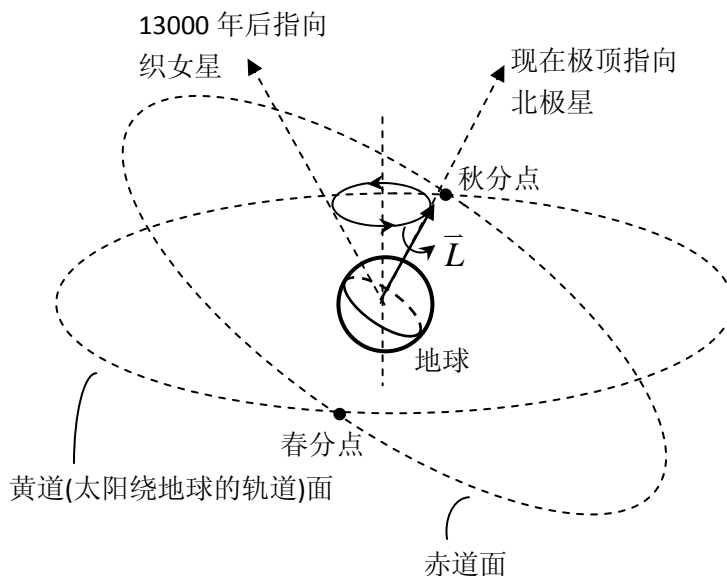
说明为什么快要倒下的陀螺会加快进动角速率?

地球的进动:

黄道和赤道的两个交点
分别为春分和秋分点

这两点在慢慢转动

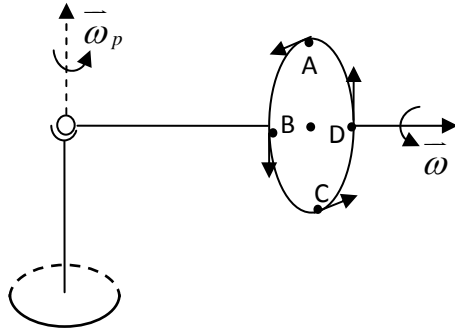
地球自转轴在进动



问题：牛顿解决了地球的进动问题，但地球的进动其力矩何来？

问题：在陀螺进动的旋转参考系来看，自旋的角动量大小、方向不变，但有外力矩的作用，原因何在？

思考：



分析转盘在进动的旋转参考系中的惯性力

惯性离心力

科里奥利力

$$\vec{f}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_p$$

所引入力矩??