2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）真题解析 1.0 版

说明：试题为梅花卷，同一道题目中，不同考生的选项顺序不同。请在核对答案时注意题目和选项的具体内容。

一、选择题：

1. 当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$（　　）

A.1　　B.2

C.3　　D.4

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, x \le 0 \\ x\ln x, x > 0 \end{cases}$，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A.可导点，极值点　　B.不可导点，极值点

C.可导点，非极值点　　D.不可导点，非极值点

3. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{u_n}{u_{n+1}})$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

4. 设函数 $Q(x,y) = \frac{x}{y^2}$，如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$，那么函数 $P(x,y)$ 可取为（　　）

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$　　　　B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$

C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$　　　　D. $x-\dfrac{1}{y}$

5. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，E 是 3 阶单位矩阵.若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 $x^T Ax$ 规范形为（　　）

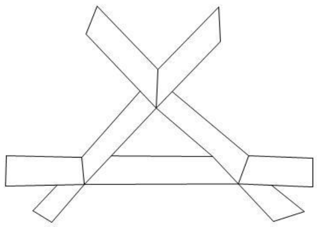
A. $y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+y_3^{\ 2}$　　　　B. $y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}-y_3^{\ 2}$

C. $y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}-y_3^{\ 2}$　　　　D. $-y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}-y_3^{\ 2}$

6. 如图所示，有 3 张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i(i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$,则（　　）



A. $r(A)=2,r(\overline{A})=3$　　　　B. $r(A)=2,r(\overline{A})=2$

C. $r(A)=1,r(\overline{A})=2$　　　　D. $r(A)=1,r(\overline{A})=1$

7. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是（　　）

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\{|X-Y|<1\}$（　　）

A. 与 μ 无关，而与 σ^2 有关　　　　B. 与 μ 有关，而与 σ^2 无关

C. 与μ，σ^2都有关　　　　D. 与μ，σ^2都无关

二、填空题

9. 设函数$f(u)$可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则$\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______

10. 微分方程$2yy'-y^2-2=0$满足条件$y(0)=1$的特解$y=$______

11. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$在$(0,+\infty)$内的和函数$S(x)=$______

12. 设Σ为曲面$x^2+y^2+4z^2=4(z\geq 0)$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_______

13. 设$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$为 3 阶矩阵，若$\alpha_1,\alpha_2$线性无关，且$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组$Ax=0$的通解为_______

14. 设随机变量X的概率密度为$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $F\left(x\right)$为X的分布函数，EX为X的数学期望，则$P\left\{F\left(X\right)>EX-1\right\}=$ ______

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.

15. 设函数$y\left(x\right)$是微分方程$y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$满足条件$y\left(0\right)=0$的特解.

（1）求$y\left(x\right)$；

（2）求曲线$y=y\left(x\right)$的凹凸区间及拐点.

16. 设a,b为实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点$\left(3,4\right)$处的方向导数中，沿方向$l=-3i-4j$的方向导数最大，最大值为 10.

（1）求a,b；

（2）求曲面$z=2+ax^2+by^2$ $\left(z\geq 0\right)$的面积.

17. 求曲线$y=e^{-x}\sin x(x\geq 0)$与x轴之间图形的面积.

18. 设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx,(n=0,1,2,\ldots)$

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}(n=2,3,\ldots)$；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

19. 设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2(0\le z\le 1)$ 与平面 $z<0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

20. 设向量组 $\mathrm{I}:\alpha_1=(1,1,4)^T,\alpha_2=(1,0,4)^T,\alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$

$$\Pi:\beta_1=(1,1,a+3)^T,\beta_2=(0,2,1-a)^T,\beta_3=(1,3,a^2+3)^T$$

若向量组 I 与 Π 等价，求 a 的取值，并将 β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

21. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似

（1）求 x,y；

（2）求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$

22. 设随即变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p,P(Y=1)=1-p\ (0<p<1)$,若 $Z=XY$

（1）求 Z 的概率密度；

（2）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（3）X 与 Z 是否相互独立？

23. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

数学（一）参考答案及解析（社科赛斯数学教研团队提供）

1. 【答案】C

【解析】$x-\tan x \sim -\dfrac{1}{3}x^3$，与 x^k 同阶，所以 $k=3$，选 C.

2. 【答案】B

【解析】$f(x)=\begin{cases} x|x|, & x\le 0 \\ x\ln x, & x>0 \end{cases}$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=\ln x+1 \Rightarrow f'_+(0)=-\infty$；当 $x\le 0$ 时，$f'(x)=-2x \Rightarrow f'_-(0)=0$.因为 $f'_+(0)\ne f'_-(0)$，所以在 $x=0$ 处不可导，又因为 $f'(x)$ 在 0 两侧异号，所以 0 为极值点.

3. 【答案】D

【解析】对于选项 A，取 $u_n=1-\dfrac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2})$ 发散；对于选项 B，取 $u_n=-\dfrac{1}{n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{u_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$ 发散；对于选项 C，取 $u_n=-\dfrac{1}{n!}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1\text{-}n)$ 发散；对于选项 D 级数部分和 $\sum\limits_{n=1}^{N}(u_{n+1}^2-u_n^2)=u_{N+1}^2-u_1^2$，由于 $\{u_n\}$ 单调递增且有界，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}(u_{n+1}^2-u_n^2)=\lim\limits_{N\to\infty}(u_{N+1}^2-u_1^2)$ 极限存在，收敛.

4. 【答案】D

【解析】$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ 与路径无关 $\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，满足要求的仅有 C、D，

其中 C，$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 在 $x=0$ 时无意义，故选 D.

5. 【答案】C

【解析】由 $A^2+A=2E$ 可得 A 的所有特征值为 $\lambda^2+\lambda-2=0$ 的根，即 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-2$.又 $|A|=4$ 可得 $\lambda_1=1$为一重特征值，$\lambda_2=-2$为二重特征值,故 X^TAX 的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

6. 【答案】A

【解析】观察图像，三个平面的法向量$\left(a_{11},a_{12},a_{13}\right)$，$\left(a_{21},a_{22},a_{23}\right)$，$\left(a_{31},a_{32},a_{33}\right)$共面，故$r\left(A\right)<3$，但不平行，故$r\left(A\right)>1$，$r\left(A\right)=2$.

三平面无公共点$\Rightarrow$方程组无解$\Rightarrow r\left(A\right)<r\left(\overline{A}\right)\Rightarrow r\left(\overline{A}\right)=3$，选 A

7. 【答案】C

【解析】A：$P(A+B)=P(A)+P(B)\Rightarrow P(AB)=0\Rightarrow A$ 与 B 互斥

B：$P(AB)=P(A)\cdot P(B)\Rightarrow A$ 与 B 独立

C：$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})\Rightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(BA)\Rightarrow P(A)=P(B)$

8. 【答案】A

【解析】X 与 Y 独立，则 $X\text{-}Y\sim N(0,2\sigma^2)$,所以 $\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$.

故 $P(|X-Y<1|)=P(\left|\frac{X\text{-}Y}{\sqrt{2}\sigma}\right|<\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})=2\phi\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}-1$.从而 $P(|X-Y<1|)$ 与 μ 无关，选 A.

9. 【答案】$\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$

【解析】$f(\mu)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，

则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\cos x}+\dfrac{x}{\cos y}$.

10. 【答案】$\sqrt{3e^x-2}$.

【解析】$2yy'-y^2-2=0\Leftrightarrow(y^2)'-y^2=2$，令 $u=y^2$，则 $u'-u=2$.

$u=e^{\int 1dx}(\int 2\cdot e^{-\int 1dx}dx+c)=e^x(-2e^{-x}+c)=ce^x-2$

又 $y(0)=1\Rightarrow u(0)=\left(y(0)\right)^2=1\Rightarrow c=3$.

故 $y=\sqrt{u}=\sqrt{3e^x-2}$.

11. 【答案】$\cos\sqrt{x}$.

【解析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$.

12. 【答案】$\dfrac{32}{3}$

【解析】

$$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt{4-x^2+x^2+y^2-4}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}|y|dxdy=\frac{32}{3}.$$

13. 【答案】$\eta=k(1,-2,1)$，其中 k 为任意常数.

【解析】$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2\Rightarrow\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0$ 即 $(1,-2,1)$ 为 $Ax=0$ 的特解

$$\left.\begin{array}{r}\text{又}\alpha_1,\alpha_2\text{无关}\Rightarrow r(A)\ge 2\\ \alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2\text{相关}\Rightarrow r(A)<3\end{array}\right\}\Rightarrow r(A)=2\Rightarrow Ax=0\text{ 基础解中有 }3-r(A)=1\text{ 个解向}$$

量，$\therefore$ 通解为 $\eta=k(1,-2,1)$，其中 k 为任意常数

14. 【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】X 密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & 0<x<2\\ 0 & x\le 0\bigcup x\ge 2\end{cases}$，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dx=\begin{cases}1 & x>2\\ \dfrac{x^2}{4} & 0<x\le 2\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\dfrac{x^2}{2}dx=\dfrac{x^3}{6}\Big|_0^2=\dfrac{4}{3}$，所以

$$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{F(X)>\frac{4}{3}-1\right\}=P\left\{F(X)>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

15. 【答案】(1) $y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

（2）凹区间：$\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$；凸区间：$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$；

【解析】(1) $y'+xy=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的解为 $y=\mathrm{e}^{-\int xdx}(\int e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\int xdx}dx+C)=(x+C)e^{-\frac{x^2}{2}}$，又 $y(0)=0$

所以 $C=0$，故 $y(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

（2）$y'=(1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$ $y''=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2}{2}}$，在 $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ 上 $y''>0$，为凹区间；在 $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ 上 $y''<0$，为凸区间;在 $x=0$ $x=-\sqrt{3}$ $x=\sqrt{3}$ $y''=0$，且在三点处 y'' 变号，故为拐点.

16. 【解析】（1）解 $gradz\left(x,y\right)=\dfrac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\vec{j}=2ax\vec{i}+2by\vec{j}$，$gradz\left(3,4\right)=6a\vec{i}+8b\vec{j}$ 与

$-3i-4j$ 平行.即 $\dfrac{6a}{8b}=\dfrac{-3}{-4}\Rightarrow a=b$，方向导数为 10 $\Rightarrow 6a\dfrac{-3}{5}+8b\dfrac{-4}{5}=10\Rightarrow$

$a=b=-1$

（2）$z=2-x^2-y^2\left(z\ge 0\right)$ 记曲线为 $\sum$，$\sum$ 为开口向下的椭圆抛物面，$\sum$ 在 $x0y$ 面上

的投影为 $x^2+y^2\le 2$.

$$\therefore S=\iint_{x^2+y^2\le 2}1ds=\iint_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}dxdy$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot rdr$$
$$=\frac{13}{3}\pi$$

17. 【答案】$\dfrac{e^n+1}{2(e^n-1)}$

【解析】易知当 $x\in[2n\pi,(2n+1)x]$ 时，$y\ge 0,n=0,1,2\dots$；当 $x\in[(2n-1)\pi,2n\pi]$ 时，$y\le 0,n=0,1,2\dots$.则 y 与 x 轴之间图形的面积为：

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{\sin x+\cos x}{2}e^{-x}\Big|_{x=2n\pi}^{x=(2n+1)\pi}\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\sin x+\cos x}{2}e^{-x}\Big|_{x=(2n-1)\pi}^{x=2n\pi}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-(2n+1)\pi}+e^{-2n\pi}\right]+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-2n\pi}+e^{-(2n-1)\pi}\right]$$
$$=\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}+\frac{1}{2}(e^{-2\pi}+e^{-\pi})\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}$$
$$=\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$$

18. 【答案】（1）略. （2）1.

【解析】（1）易知，当 $x\in\left(0,1\right)$ 时，$x^{n+1}\cdot\sqrt{1-x^2}<x^n\cdot\sqrt{1-x^2}$.

故 $a_{n+1}=\int_0^1x^{n+1}\sqrt{1-x^2}dx<\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}dx=a_n$，从而 $\left\{a_n\right\}$ 单调减少.

$$a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx^{n+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}\sqrt{1-x^2}x^{n+1}\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{1}{n+1}\int_0^1x^{n+1}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot xdx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\frac{1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\cdot\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{n-1}\int_0^1 x^n\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx-\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=\frac{n-1}{n+1}a_{n-2}-\frac{1}{n+1}a_n \qquad \text{故 } a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}.$$

（2）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=A.$ 由于 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$，取 $n\to+\infty$，

有 $A=\frac{1}{A}\Rightarrow A^2=1$. 由于 $a_n\geq 0.$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=A>0.$ 所以 $A=1.$

19. 【答案】$(0,0,\frac{1}{4})$

【解析】由于 Ω 关于平面 yoz 对称，则形心坐标 $x_0=0$，设形心坐标为 (x_0,y_0,z_0)，

易得锥体的体积为 $\frac{\pi}{3}$， $y_0=\frac{3}{\pi}\int\limits_0^1 dz\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{1-z}(z+r\sin\theta)rdr=\frac{1}{4}$

$$z_0=\frac{3}{\pi}\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2x}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-z}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{3}{\pi}\cdot 2\pi\int_0^1 z\frac{(1-z)^2}{2}\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}$$

20. 【答案】$a\neq-1$，$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

【解析】

第一问：$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$

(1)当$a=1$时，$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&-1&1&0&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

易知Ⅰ与Ⅱ等价.

(2) 当$a=-1$时，$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&0&-2&2&0\end{pmatrix}$

显然$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$不能由前三个向量线性表示，故Ⅰ与Ⅱ不等价

(3)当$a^2\neq1$即$a\neq1$且$a\neq-1$时

$\gamma(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=3$,由$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&2\\a-1&1-a&a^2-1\end{vmatrix}=2(a^2-1)\neq0$, 知$\gamma(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=3$

易知Ⅰ与Ⅱ等价.

综上$a\neq-1$即可

第二问：显然$\begin{pmatrix}1\\2\\a^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\a^2-1\end{pmatrix}$，故$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

21.　【答案】略

【解析】（1）由于$A\sim B$故$\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}b_{ii}$，所以$|A|=|B|$，

因此$\begin{cases} x-4=1+y \\ 4x-8=-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$

（2）由（1）可知 A 和 B 的特征值分别为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-1, \lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=2$ 时，$(2E-A)x=0 \Rightarrow \xi_1=(-1,2,0)^T$

当 $\lambda_2=-1$ 时，$(-E-A)x=0 \Rightarrow \xi_2=(-2,1,0)^T$

当 $\lambda_3=-2$ 时，$(-2E-A)x=0 \Rightarrow \xi_3=(1,-2,-4)^T$

所以存在 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 使得 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$

同理，对于矩阵 B

当 $\lambda_1=2$ 时，$(2E-B)x=0 \Rightarrow \eta_1=(1,0,0)^T$

当 $\lambda_2=-1$ 时，$(-E-B)x=0 \Rightarrow \eta_2=(1,-3,0)^T$

当 $\lambda_3=-2$ 时，$(-2E-B)x=0 \Rightarrow \eta_3=(0,0,1)^T$

所以存在 $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 使得 $P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$

所以 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\Lambda \Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$.

故存在 $P=P_1P_2^{-1}$ 使得 $P^{-1}AP=B$

$P_1=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，所以 $P_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，即

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3} & 1\\ 2 & \frac{1}{3} & -2\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$

22. 【答案】（1）Z 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\lambda p\cdot e^{-\lambda z}, z<0\\ \lambda(1-p)e^{-\lambda z}, z\geq 0\end{cases}$.

（2）$p=\frac{1}{2}$.

（3）X 与 Z 不独立.

【解析】（1）0 $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0 \Rightarrow F_X(x)=1-e^{-\lambda x}, x>0$

当 $z<0$ 时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=P\{XY\leq z\}=P\{Y=-1, X\geq -z\}$

$=P\{Y=-1\}\cdot P\{X\geq -z\}$

$=p\cdot(1-F_X(-z))=p\cdot e^{\lambda z}$ $\qquad f_Z(z)=F'(z)=\lambda p\cdot e^{\lambda z}$

当 $z\geq 0$ 时，$F(z)=P\{Z\leq z\}=P\{XY\leq z\}=P\{Y=1, X\leq z\}$

$=P\{Y=1\}\cdot P\{X\leq z\}$

$=(1-p)\cdot F_X(-z)=(1-p)\cdot(1-e^{-\lambda z})$

$f_Z(z)=F'(z)=\lambda(1-p)e^{-\lambda z}$

故 Z 的概率密度 $f_Z(z)=\begin{cases}\lambda p\cdot e^{-\lambda z}, z<0\\ \lambda(1-p)e^{-\lambda z}, z\geq 0\end{cases}$.

（2）$Cov(X,Z)=E(Y-EX)(Z-EZ)=E(X-EX)(XY-EXY)$

这里 $EX=\frac{1}{\lambda}, EY=(-1)\cdot P+1\cdot(1-P)=1-2P, EXY=EX\cdot EY=\frac{1}{\lambda}\cdot(1-2P)$，则

$Cov(X,Z)=E(X-\frac{1}{\lambda})\left[XY-\frac{1}{\lambda}(1-2P)\right]=EX^2Y-\frac{1}{\lambda}EXY-(EX-\frac{1}{\lambda})\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot(1-2P)$

$= EX^2 \cdot EY - \frac{1}{\lambda} \cdot EX \cdot EY$

$= \left[EX^2 - (EX)^2 \right] \cdot EY$

$= DX \cdot EY$

$= \frac{1}{\lambda^2} \cdot (1-2P)$

$= 0$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}$

故当 $P = \frac{1}{2}$ 时，X 与 Z 不相关

23. 【解析】（1）由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$，

即 $\int_{\mu}^{+\infty} \frac{A}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{A}{\sigma} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi} A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = A\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1$，所以 $A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（2）设似然函数 $L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \sigma^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，

取对数 $\ln L(\sigma^2) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2} \right]$，

求导数 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \left[-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} \right]$，

令导数为零解得 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$

故 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ 的最大似然估计为 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$