2018年暑期学校测试题

1. (15分)设$n \geq 1$, S是n阶实对称方阵, 定义实变量函数$f(x) = \det(I_n - xS)$. 求证: $x = 0$为函数$f(x)$的极大值点的充要条件是Tr $S = 0$.

2. (15分)设V是实线性空间, m为任意正整数, $W_i(1 \leq i \leq m)$是V的m个真子空间, 求证$V \neq \cup_{1\leq i\leq m} W_i$.

3. (20分)设$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$是d次有理系数的多项式, 如果对任意整数$n \in \mathbb{Z}$, 都有$f(n) \in \mathbb{Z}$则称$f(x)$是整值多项式. 求证$f(x)$是整值多项式当且仅当存在$a_0, \cdots, a_d \in \mathbb{Z}$, 使得$f(x) = \sum_{0\leq i\leq d} a_i \binom{x}{i}$, 其中$\binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}, i \geq 0$.

4. (25分)设$n > 1$, n阶可逆实方阵A的行向量两两之间的内积小于0(A的行向量之间夹角为钝角). 求证A^{-1}的列向量两两之间的内积大于0(A^{-1}的列向量之间夹角为锐角).

5. (25分)对$n \geq 1$, 设n阶整系数方阵的集合$\mathcal{A}(n) = \{A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{Z}^{n\times n} \mid a_{ij} = 0或1\}$. 定义

$$p_n = \frac{\#\{A \in \mathcal{A}(n) \mid \det A为奇数\}}{\#\mathcal{A}(n)}$$

为$\mathcal{A}(n)$中行列式为奇数的矩阵所占的比例.

(1)给出p_n的计算公式;

(2)证明$p = \lim_{n\to\infty} p_n$存在, 并计算$p$前5位有效数字.