2019 年北京市海淀区高三二模数学考试（理科）逐题解析

2019.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 5\}, B=\{x|3\le x\le 6\}$,则 $A\cap B=$

（A）$[1,3]$　　（B）$[3,5]$　　（C）$[5,6]$　　（D）$[1,6]$

【答案】B

【解析】本题考查集合的运算.

$\because A=\{x|1\le x\le 5\}, B=\{x|3\le x\le 6\}$,

$\therefore A\cap B=\{x|3\le x\le 5\}$,

即 $A\cap B=[3,5]$,

故选 B.

2. 复数 $z=a+\mathrm{i}\ (a\in \mathbf{R})$ 的实部是虚部的 2 倍,则 a 的值为

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）-2　　（D）2

【答案】D

【解析】本题考查复数的概念.

$\because z=a+\mathrm{i}(a\in \mathbf{R})$ 的实部为 a,虚部为 1,

实部是虚部的 2 倍,

$\therefore a=2$,

故选 D.

3. 若直线 $l:\begin{cases}x=1+t,\\ y=2+at\end{cases}$ （t 为参数）经过坐标原点,则直线 l 的斜率是

（A） -2　　（B） -1　　（C） 1　　（D） 2

【答案】D

【解析】本题考查直线的参数方程.

$\because l:\begin{cases}x=1+t,\\ y=2+at\end{cases}$ （t 为参数）, $\therefore l$ 的方程为 $y-2=a(x-1)$,

又 $\because l$ 过坐标原点, $\therefore a=2$,

即 l 的斜率为 2,

故选 D.

4. 在 $(x-2)^5$ 的展开式中, x^2 的系数是

（A） -80　　（B） -10　　（C） 5　　（D） 40

【答案】A

【解析】本题考查二项式定理.

$\because T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2)^r$,

$\therefore$ 当 $r=3$ 时, $T_4=C_5^3 x^2(-2)^3=-80x^2$,

$\therefore x^2$ 的系数为 -80,

故选 A.

5. 把函数 $y=2^x$ 的图象向右平移 t 个单位长度,所得图象对应的函数解析式为 $y=\dfrac{2^x}{3}$,则 t 的值为

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\log_2 3$　　（C）$\log_3 2$　　（D）$\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】本题考查函数图象变换.

由题: $y=2^x \xrightarrow[t\text{个单位}]{\text{向右平移}} y=2^{x-t}$,

$y=2^{x-t}=\dfrac{2^x}{2^t}=\dfrac{2^x}{3}$,

$\therefore 2^t=3$,

$\therefore t=\log_2 3$,

故选 B.

6. 学号分别为1,2,3,4的4位同学排成一排,若学号相邻的同学不相邻,则不同的排法种数为

（A）2　　（B）4　　（C）6　　（D）8

【答案】A

【解析】本题考查排列组合.

① 当 1 在第一位时,0 种;

② 当 1 在第二位时:3142,1 种;

③ 当 1 在第三位时:2413,1 种;

④ 当 1 在第四位时,0 种.

共有 2 种情况,

故选 A.

7. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$,则“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4},1)$”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2},0)$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】本题考查三角函数和充要条件.

充分条件:

$\because f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}\omega=1$,

$\therefore \frac{\pi}{4}\omega=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

$\omega=2+8k(k\in\mathbf{Z})$,

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时,

$f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}(2+8k)$

$=\sin(\pi+4k\pi)$

$=0$

$\therefore$ 充分条件成立;

必要条件:

$\because f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}\omega=0$,

$\therefore \frac{\pi}{2}\omega=k\pi$,

$\therefore \omega=2k(k\in\mathbf{Z})$,

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时,

$f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}\omega$

$=\sin(\frac{\pi}{4}\cdot 2k)$

$=\sin\frac{k\pi}{2}$

$\therefore$ 当 k 为偶数时 $f(\frac{\pi}{4})=0$,

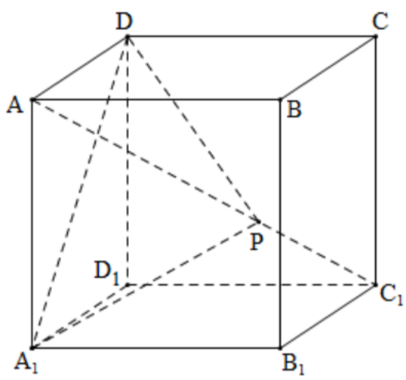
当 k 为奇数时 $f(\frac{\pi}{4})=1$ 或 -1,

$\therefore$ 必要条件不成立.

综上,“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{4},1)$”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2},0)$”的充分而不必要条件.

故选 A.

8. 如图,在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 P 是对角线 AC_1 上的动点（点 P 与 A,C_1 不重合）.则下面结论中错误的是



（A）存在点 P,使得平面 A_1DP // 平面 B_1CD_1

（B）存在点 P,使得 $AC_1\perp$ 平面 A_1DP

（C）S_1,S_2 分别是 $\triangle A_1DP$ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$,平面 BB_1C_1C 上的正投影图形的面积,对任意点 P,都有 $S_1\neq S_2$

（D）对任意点 P,$\triangle A_1DP$ 的面积都不等于 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

【答案】C

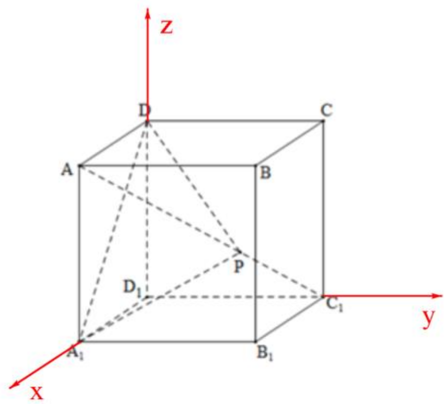
【解析】本题考查立体几何综合应用.

以 D_1 为原点, D_1A_1, D_1C_1, D_1D 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC_1}, \lambda\in(0,1)$,

$\therefore \overrightarrow{AP}=(-\lambda,\lambda,-\lambda)$,

$\therefore \overrightarrow{A_1P}=(-\lambda,\lambda,1-\lambda), \overrightarrow{DA_1}=(1,0,-1)$,



$\therefore$ 平面 A_1DP 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(1,\dfrac{2\lambda-1}{\lambda},1)$,

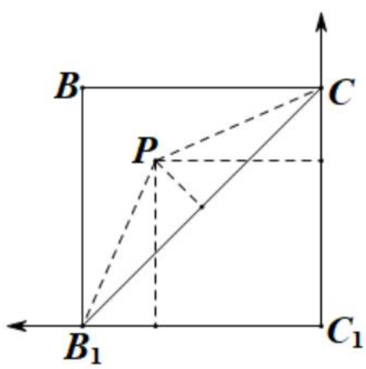
平面 B_1CD_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,1)$,

若 $\overrightarrow{n_1}//\overrightarrow{n_2}, \lambda=\dfrac{1}{3}$,成立,所以 A 正确;

$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,-1)$,若 $\overrightarrow{AC_1}//\overrightarrow{n_1}, \lambda=\dfrac{1}{3}$,成立,所以 B 正确;

由 P 点坐标 $(1-\lambda,\lambda,1-\lambda)$,

$\therefore S_1=\dfrac{\lambda}{2}, S_2=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times|\sqrt{2}(1-\lambda)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}|=|\dfrac{1}{2}-\lambda|$,



若 $S_1=S_2$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=1$(舍去),所以 C 错误;

设 A_1D 中点为 Q,

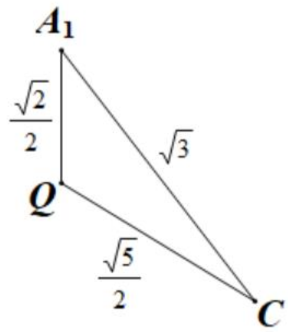
易证: $A_1D\perp$ 面 AQC_1,

$\therefore A_1D\perp PQ$,

$\therefore S_{\triangle A_1DP}=\dfrac{1}{2}\cdot A_1D\cdot PQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PQ$,

在$\triangle A_1QC_1$中,易得三边长$A_1Q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $A_1C_1=\sqrt{3}$, $QC_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,

易算得$\sin Q=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,



$\therefore S_{\triangle A_1QC_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}h$,

$h=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$即为PQ最小值,

$\therefore (S_{\triangle A_1DP})_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}>\dfrac{\sqrt{2}}{6}$,所以 D 正确.

故选 C.

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9.　已知直线 $l_1: x-y+1=0$ 与 $l_2: x+ay+3=0$ 平行,则 $a=$ ______ ,l_1 与 l_2 之间的距离为 ______ .

【答案】$-1;\sqrt{2}$

【解析】本题考查直线方程与两平行直线间距离.

$\because l_1 /\!/ l_2$,

$\therefore 1\times a-(-1)\times 1=0$,

$\therefore a=-1$.

$\therefore l_2: x-y+3=0$,

l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

10.　已知函数 $f(x)=(x+t)(x-t^2)$ 是偶函数,则 $t=$ ______ .

【答案】0或1

【解析】本题考查函数的性质.

$\because f(x)$ 为偶函数,

$\therefore f(x)=f(-x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

即 $f(x)=(x+t)(x-t^2)=x^2-t^2x+tx-t^3$; $f(-x)=(-x+t)(-x-t^2)=x^2+t^2x-tx-t^3$,

$\therefore -t^2x+tx=t^2x-tx$,

即 $2t(t-1)x=0$,解得 $t=0$ 或 1.

11. 若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-8n$,$n=1,2,3,\cdots$,则满足$a_n>0$的n的最小值为

______.

【答案】5

【解析】本题考查数列通项公式.

$\because S_n=n^2-8n$,

$\therefore$当$n=1$时,$a_1=S_1=-7$,当$n\geq 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-8n-[(n-1)^2-8(n-1)]=2n-9$,

若使得$a_n>0$,则$n>\dfrac{9}{2}$.

又$\because n$为正整数,

$\therefore$满足$a_n>0$的n的最小值为 5.

12. 已知圆$C:(x-1)^2+y^2=4$与曲线$y=|x-1|$相交于M,N两点,则线段MN的长度为

______.

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】本题考查直线与圆.

当$x>1$时,联立直线方程与圆的方程$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\ y=x-1\end{cases}$

解得$x=\pm\sqrt{2}+1$

$\because x>1$,

$\therefore x=\sqrt{2}+1$,

$\therefore N(\sqrt{2}+1,\sqrt{2})$.

当 $x<1$ 时,联立直线方程与圆的方程 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\ y=-x+1\end{cases}$

解得 $x=\pm\sqrt{2}+1$,

$\because x<1$,

$\therefore x=-\sqrt{2}+1$,

$\therefore M(-\sqrt{2}+1,\sqrt{2})$,

$\therefore |MN|=|x_M-x_N|=2\sqrt{2}$.

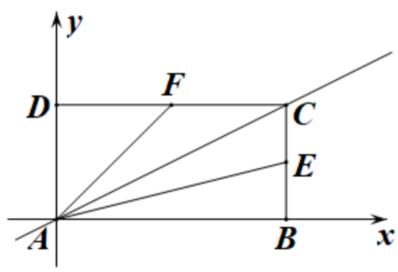
13. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, BC=1$,点 E 为 BC 的中点,点 F 在线段 DC 上.若 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}$,且点 P 在直线 AC 上,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$ ______.

【答案】 $\dfrac{5}{2}$

【解析】本题考查平面向量运算和数量积.

建立如图所示直角坐标系,

$\overrightarrow{AE}=(2,\dfrac{1}{2}), \overrightarrow{AF}=(x,1), \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}=(2\lambda,\lambda)$,



$\because \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}$,

即 $\begin{cases}2+x=2\lambda\\ \dfrac{1}{2}+1=\lambda\end{cases}$ 解得 $\lambda=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore \overrightarrow{AP}=(3,\dfrac{3}{2}), \overrightarrow{AF}=(1,1)$,

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=2\times1+\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{5}{2}$.

14. 已知集合 $A_0=\{x|0<x<1\}$.给定一个函数 $y=f(x)$,定义集合 $A_n=\{y|y=f(x),x\in A_{n-1}\}$,若 $A_n\cap A_{n-1}=\varnothing$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立,则称该函数 $y=f(x)$ 具有性质“ϑ”.

（Ⅰ）具有性质“ϑ”的一个一次函数的解析式可以是______;

（Ⅱ）给出下列函数:① $y=\dfrac{1}{x}$;② $y=x^2+1$;③ $y=\cos(\dfrac{\pi}{2}x)+2$,其中具有性质“$\vartheta$”的函数的序号是______.（写出所有正确答案的序号）

【答案】$y=x+1$（答案不唯一）;①②

【解析】本题考查函数的综合运用.

（Ⅰ）不妨设 $A_n=(x_1,x_2)$, $y=ax+b(a>0)$,

$\therefore A_{n+1}=(ax_1+b,ax_2+b)$, $A_{n+2}=(a^2x_1+ab+b,a^2x_2+ab+b)$,

$$\therefore\begin{cases}ax_1+b\geq x_2\\a^2x_1+ab+b\geq ax_2+b\end{cases}$$

又 $\because A_0=(0,1)$, $\therefore b\geq 1$,

$\therefore$ 可取 $a>0,b\geq 1$.

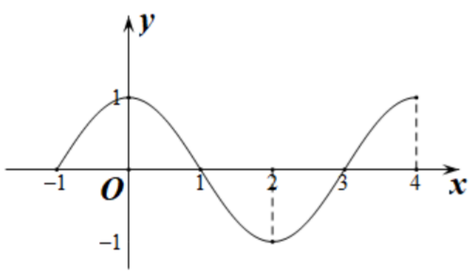
（Ⅱ）①易知 $A_1=\{x|x>1\}$, $A_2=A_0$, $\therefore A_3=A_1$,成立.

②由数学归纳法得, $A_0=(0,1)$, $A_1=(1,2)$.

若 $A_n=(x_1,x_2)$, $A_{n+1}=(x_1^{\ 2}+1,x_2^{\ 2}+1)$, $A_{n+2}=((x_1^{\ 2}+1)^2+1,(x_2^{\ 2}+1)^2+1)$,

若 $x_1^{\ 2}+1\geq x_2$,易得 $(x_1^{\ 2}+1)^2+1>(x_2^{\ 2}+1)^2+1$,成立.

③易知 $A_0=(0,1)$, $\therefore A_1=(2,3)$, $A_2=(1,2)$, $A_3=(1,2)$,



当 $n\geq 2$ 时, $A_n=(1,2)$,所以不具有性质“ϑ”,

$\therefore$ 填①②.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. （本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，$a=7, b=8, A=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅰ）求$\sin B$的值；

（Ⅱ）若$\triangle ABC$是钝角三角形，求BC边上的高.

【解析】

（Ⅰ）根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

整理得到$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

（Ⅱ）$\because A=\frac{\pi}{3}, b>a, \therefore B>\frac{\pi}{3}$，

$\therefore C=\pi-A-B<\frac{\pi}{3}$，

故B一定为钝角，

则$\cos B=-\sqrt{1-\sin^2 B}=-\frac{1}{7}$，

$\because$在$\triangle ABC$中，$C=\pi-A-B$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\frac{1}{7})+\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 8\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=6\sqrt{3}$，

设BC边上的高为h，

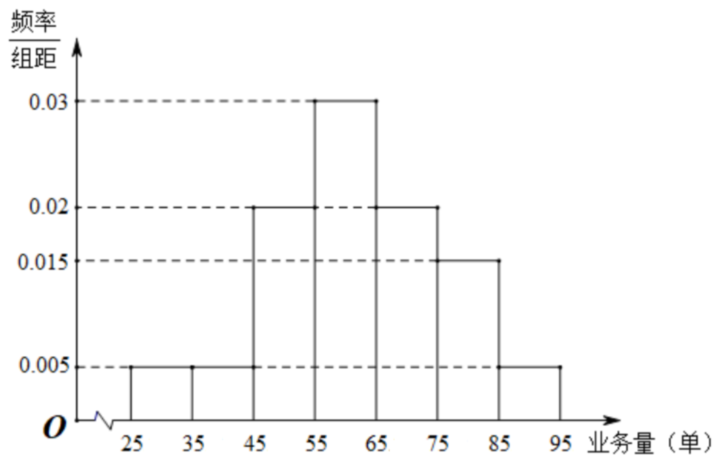
则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h$,

$h=\frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}=\frac{12\sqrt{3}}{7}$,

$\therefore BC$ 边上的高为 $\frac{12\sqrt{3}}{7}$.

16. （本小题满分 13 分）

某快餐连锁店招聘外卖骑手.该快餐连锁店提供了两种日工资方案:方案（1）规定每日底薪 50 元,快递业务每完成一单提成 3 元;方案（2）规定每日底薪 100 元,快递业务的前 44 单没有提成,从第 45 单开始,每完成一单提成 5 元.该快餐连锁店记录了每天骑手的人均业务量.现随机抽取 100 天的数据,将样本数据分为 $[25,35)$,$[35,45)$,$[45,55)$,$[55,65)$,$[65,75)$,$[75,85)$,$[85,95]$ 七组,整理得到如图所示的频率分布直方图.



（Ⅰ）随机选取一天,估计这一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单的概率;

（Ⅱ）从以往统计数据看,新聘骑手选择日工资方案（1）的概率为 $\frac{1}{3}$,选择方案（2）的概率为 $\frac{2}{3}$.若甲、乙、丙三名骑手分别到该快餐连锁店应聘,三人选择日工资方案相互独立,求至少有两名骑手选择方案（1）的概率;

（III）若仅从人均日收入的角度考虑,请你利用所学的统计学知识为新聘骑手做出日工资方案的选择,并说明理由.（同组中的每个数据用该组区间的中点值代替）

【解析】

（Ⅰ）记“一天该连锁店的骑手的人均日快递业务量不少于 65 单”为事件M,

由题意可得$P(M)=(0.02+0.015+0.005)\times10=0.4=\dfrac{2}{5}$;

（Ⅱ）由题意可知,甲、乙、丙三人选择日工资方案相互独立,且新聘骑手选择日工资方案（1）的概率为$\dfrac{1}{3}$,选择方案（2）的概率为$\dfrac{2}{3}$,

设“至少有两名骑手选择方案（1）”为事件A,则事件A包括两种情况:

① 两名骑手选择方案（1）、一名骑手选择方案（2）,

相应事件发生的概率为$C_3^2(\dfrac{1}{3})^2(\dfrac{2}{3})^1=\dfrac{6}{27}=\dfrac{2}{9}$,

② 三名骑手选择方案（1）,相应事件发生的概率为$C_3^3(\dfrac{1}{3})^3(\dfrac{2}{3})^0=\dfrac{1}{27}$,

所以,至少有两名骑手选择方案（1）的概率为$P(A)=\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{27}=\dfrac{7}{27}$;

（III）现用同组中的每个数据用该组区间的中点值代替,

由题意可得,每天骑手的人均业务量X可能为:30,40,50,60,70,80,90.

由表可得$P(X=30)=0.005\times10=0.05$,

$P(X=40)=0.005\times10=0.05$,

$P(X=50)=0.02\times10=0.2$,

$P(X=60)=0.03\times10=0.3$,

$P(X=70)=0.02\times10=0.2$,

$P(X=80)=0.015\times10=0.15$

$P(X=90)=0.005\times10=0.05$,

则 X 的分布列为:

X	30	40	50	60	70	80	90
P	0.05	0.05	0.2	0.3	0.2	0.15	0.05

所以 $E(X)=0.05\times30+0.05\times40+0.2\times50+0.3\times60+0.2\times70+0.15\times80+0.05\times90=62$,

按方案（1）计算日薪资期望值为:$50+62\times3=236$ 元,

按方案（2）计算日薪资期望值为:$100+(62-44)\times5=190$ 元,

因为 $236>190$,所以选择方案（1）比较好.

17.（本小题满分 14 分）

如图 1 所示,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$BC//AD$,$CE\perp AD$,垂足为 E,$AD=3BC=3$, $EC=1$.将 $\triangle DEC$ 沿 EC 折起到 $\triangle D_1EC$ 的位置,使平面 $D_1EC\perp$ 平面 $ABCE$,如图 2 所示,点 G 为棱 AD_1 上一个动点.

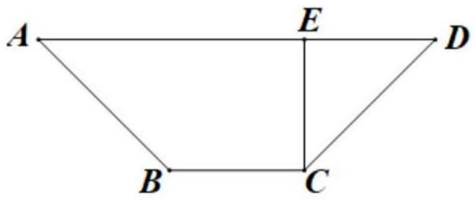


图1

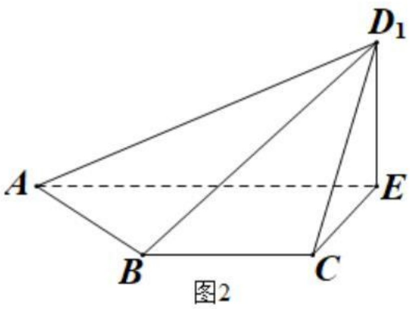


图2

（Ⅰ）当点 G 为棱 AD_1 中点时,求证:$BG//$ 平面 D_1CE;

（Ⅱ）求证:$AB\perp$ 平面 D_1BE;

（Ⅲ）是否存在点 G,使得二面角 $G-BE-D_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$?若存在,求出 AG 的长;若不存在,请说明理由.

【解析】

（Ⅰ）取 D_1E 中点为 M ,连结 BG,GM,CM ,

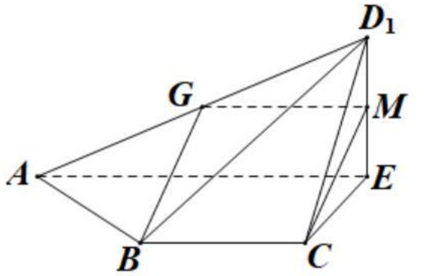
在等腰梯形 $ABCD$ 中,由 $BC // AD, CE \perp AD, AD = 3BC = 3, EC = 1$,

$\therefore MG // AE$, $MG = \dfrac{1}{2}AE$,且 $BC // AE$, $BC = \dfrac{1}{2}AE$,

$\therefore MG // BC$, $MG = BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCMG$ 为平行四边形,

$\therefore BG // CM$,



又$\because CM \subset$ 平面 D_1CE , $BG \not\subset$ 平面 D_1CE ,

$\therefore BG //$ 平面 D_1CE .

（Ⅱ）在等腰梯形 $ABCD$ 中, $BC // AD, CE \perp AD$,

$\therefore$ 折叠后 $CE \perp D_1E$.

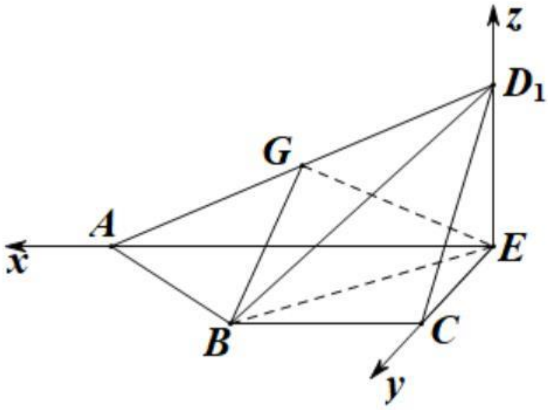
又$\because$ 平面 $D_1EC \perp$ 平面 $ABCE$,

且平面 $D_1EC \cap$ 平面 $ABCE = CE$,

$\therefore D_1E \subset$ 平面 D_1EC ,

$\therefore D_1E \perp$ 平面 $ABCE$,

$\therefore D_1E \perp AB$.



又$\because$ 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $BC // AD, CE \perp AD, AD = 3BC = 3, CE = 1$,

$\therefore AB = CD = \sqrt{2}, AE = 2, BE = \sqrt{2}$,

满足 $BE^2 + AB^2 = AE^2$, $\therefore AB \perp BE$,

又$\because BE \cap D_1E = E$, $BE \subset$ 平面 D_1BE , $D_1E \subset$ 平面 D_1BE ,

$\therefore AB \perp$ 平面 D_1BE .

（Ⅲ）存在点G,使得二面角$G-BE-D_1$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

以E为原点,分别以EA,EC,ED_1为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系$E-xyz$,

$\because AE=2,ED_1=1,EC=1,$

$\therefore E(0,0,0),A(2,0,0),C(0,1,0),B(1,1,0),D_1(0,0,1),$

$\therefore \overrightarrow{EB}=(1,1,0),\overrightarrow{BA}=(1,-1,0),\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,1),$

设$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD_1}(0\le\lambda\le1)$,则$\overrightarrow{AG}=(-2\lambda,0,\lambda)$,

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AG}=(2-2\lambda,0,\lambda),$

设平面GBE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EG}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0.\end{cases}$即$\begin{cases}(2-2\lambda)x+\lambda z=0,\\ x+y=0.\end{cases}$

即$\begin{cases}\lambda z=-(2-2\lambda)x,\\ y=-x.\end{cases}$

令$x=-\lambda$,则$y=\lambda,z=2-2\lambda$,

$\therefore \boldsymbol{n}=(-\lambda,\lambda,2-2\lambda)$.

由（Ⅱ）知平面D_1BE的一个法向量为$\overrightarrow{BA}=(1,-1,0)$,

设平面GBE与平面D_1BE所成角为θ,

$$\therefore |\cos\theta|=\left|\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|-2\lambda|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\lambda^2+(2-2\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

解得$\lambda=\dfrac{2}{3}$或$\lambda=2$（舍）,

$\therefore$点G存在,$\overrightarrow{AG}=(-\dfrac{4}{3},0,\dfrac{2}{3}),|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{(-\dfrac{4}{3})^2+(\dfrac{2}{3})^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

18. （本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左顶点 A 与上顶点 B 的距离为 $\sqrt{6}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和焦点的坐标;

（Ⅱ）点 P 在椭圆 C 上,线段 AP 的垂直平分线与 y 轴相交于点 Q,若 $\triangle PAQ$ 为等边三角形,求点 P 的横坐标.

【解析】

（Ⅰ）由题意可知 $A(-2,0),B(0,b)$,

$|AB|=\sqrt{2^2+b^2}=\sqrt{6}$,

$\therefore b^2=2$,

$\therefore$ 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$,

$\therefore$ 焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2},0)$.

（Ⅱ）设 $P(m,n)$，P 点在椭圆上, 则有 $\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{2}=1$,

AP 的中点 $M(\frac{m-2}{2},\frac{n}{2})$,

由题可知: AP 的斜率存在且不为 0,

$\therefore k_{AP}=\frac{n}{m+2}$.

又 $\because AP\perp MQ$,所以 $k_{AP}\cdot k_{MQ}=-1$,

$\therefore k_{MQ}=-\dfrac{m+2}{n}$,

$\therefore MQ$的方程为$y-\dfrac{n}{2}=-\dfrac{m+2}{n}(x-\dfrac{m-2}{2})$.

令$x=0$可得$y=-\dfrac{m+2}{n}\cdot(-\dfrac{m-2}{2})+\dfrac{n}{2}=\dfrac{m^2-4}{2n}+\dfrac{n}{2}=\dfrac{-2n^2}{2n}+\dfrac{n}{2}=-\dfrac{n}{2}$,

$\therefore Q(0,-\dfrac{n}{2})$,

$\because \triangle PAQ$为等边三角形,

$\therefore |AP|=|AQ|$,则有$(m+2)^2+n^2=4+\dfrac{n^2}{4}$,与$\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{n^2}{2}=1$联立,

得方程$5m^2+32m+12=0$,

解得$m=-\dfrac{2}{5}$或$m=-6$（舍去）,

$\therefore$点P的横坐标为$-\dfrac{2}{5}$.

19. （本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=e^{ax}(x^2-\dfrac{a+2}{a})$,其中$a\neq 0$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处切线的倾斜角;

（Ⅱ）若函数$f(x)$的极小值小于0,求实数a的取值范围.

【解析】

（Ⅰ）$f'(x)=ae^{ax}(x^2-\dfrac{a+2}{a})+2xe^{ax}=e^{ax}(ax^2+2x-a-2)$

$f'(1)=e^{a}(a+2-a-2)=0$

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 切线斜率为 0,倾斜角为 0°.

（Ⅱ） $f'(x)=e^{ax}(ax^2+2x-a-2)=e^{ax}(ax+a+2)(x-1)$,

$\because a\neq 0$,令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=1$ 或 $x_2=-\dfrac{a+2}{a}$,

①当 $a>0$ 时, $-\dfrac{a+2}{a}<1$,

$f'(x),f(x)$ 随 x 变化情况如下表

x	$(-\infty,-\dfrac{a+2}{a})$	$-\dfrac{a+2}{a}$	$(-\dfrac{a+2}{a},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

此时 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=e^a(1-\dfrac{a+2}{a})=-\dfrac{2}{a}e^a<0$,符合题意,

所以 $a>0$ 满足;

②当 $a<0$ 时,

（i）若 $-\dfrac{a+2}{a}=1$ 即 $a=-1$ 时,

$f'(x)=-e^{-x}(x-1)^2\leq 0$ 恒成立, $f(x)$ 单调递减,无极值,不合题意;

（ii）若 $-\dfrac{a+2}{a}<1$,即 $a<-1$ 时,

$f'(x), f(x)$ 随 x 变化情况如下表

x	$(-\infty,-\dfrac{a+2}{a})$	$-\dfrac{a+2}{a}$	$(-\dfrac{a+2}{a},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

此时 $f(x)$ 的极小值为 $f(-\dfrac{a+2}{a})=\dfrac{2a+4}{a^2}e^{-a-2}$,

由 $\dfrac{2a+4}{a^2}e^{-a-2}<0$ 得 $2a+4<0$,解得 $a<-2$ 满足;

（iii）若 $-\dfrac{a+2}{a}>1$ 即 $-1<a<0$ 时,

$f'(x), f(x)$ 随 x 变化情况如下表

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,-\dfrac{a+2}{a})$	$-\dfrac{a+2}{a}$	$(-\dfrac{a+2}{a},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

此时 $f(x)$ 有极小值 $f(1)=e^a(1-\dfrac{a+2}{a})=-\dfrac{2}{a}e^a>0$,不合题意.

综上所述,若函数 $f(x)$ 的极小值小于0,则实数 a 的范围是 $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

20.（本小题满分 13 分）

对于给定的奇数 $m(m\geq 3)$，设 A 是由 $m\times m$ 个数组成的 m 行 m 列的数表,数表中第 i 行,第 j 列的数 $a_{ij}\in\{0,1\}$，记 $c(i)$ 为 A 的第 i 行所有数之和，$r(j)$ 为 A 的第 j 列所有数之和,其中 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$.

对于 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}$，若 $|ma_{ij}-c(i)|<\dfrac{m}{2}$ 且 $|ma_{ij}-r(j)|<\dfrac{m}{2}$ 同时成立,则称数对 (i,j) 为数表 A 的一个"好位置".

（Ⅰ）直接写出右面所给的 3×3 数表 A 的所有"好位置"；

（Ⅱ）当 $m=5$，若对任意的 $1\leq i\leq 5$ 都有 $c(i)\geq 3$ 成立,求数表 A 中的"好位置"个数的最小值.

（Ⅲ）求证:数表 A 的"好位置"个数的最小值为 $2m-2$.

1	1	1
0	0	1
0	1	0

【解析】

（Ⅰ）"好位置"有:(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)

（Ⅱ）因为对于任意的 $i=1,2,3,4,5$，$c(i)\geq 3$；

所以当 $a_{i,j}=1$ 时，$|5-c(i)|\leq 5-3<\dfrac{5}{2}$，

当 $a_{i,j}=0$ 时，$|5a_{i,j}-c(i)|=c(i)>\dfrac{5}{2}$；

因此若 (i,j) 为"好位置",

则必有 $a_{i,j}=1$,且 $5-r(j)<\dfrac{5}{2}$,即 $r(j)\geq 3$,

设数表中共有 $n(n\geq 15)$ 个1,其中有 t 列中含1的个数不少于3,

则有 $5-t$ 列中含1的个数不多于2,所以 $5t+2(5-t)\geq n\geq 15$,$t\geq\dfrac{5}{3}$,

因为 t 为自然数,所以 t 的最小值为2,

因此该数表中值为1,且相应位置不为"好位置"的数个数最多不超过 $3\times 2=6$,

所以,该数表好位置的个数不少于 $15-6=9$ 个,而下面的 5×5 数表显然符合题意.

1	1	1	0	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1

此数表的"好位置"的个数恰好为9,

综上所述,该数表的"好位置"的个数的最小值为9.

（III）当 (i,j) 为"好位置"时,且 $a_{i,j}=1$时,

则有 $|m-c(i)|<\dfrac{m}{2}$,所以 $c(i)>\dfrac{m}{2}$,注意到 m 为奇数,$c(i)\in\mathbf{N}^*$,

所以有 $c(i)\geq\dfrac{m+1}{2}$,同理得到 $r(j)\geq\dfrac{m+1}{2}$ 当 (i,j) 为"好位置",且 $a_{i,j}=0$ 时,

则 $|m-c(i)|<\dfrac{m}{2}$,则必有 $c(i)<\dfrac{m}{2}$,注意到 m 为奇数,$c(i)\in\mathbf{N}^*$,所以有 $c(i)\leq\dfrac{m-1}{2}$,

同理得到 $r(j)\leq\dfrac{m-1}{2}$.

因为交换数表的各行,各列,不影响数表中"好位置"的个数,

所以不妨设 $c(i) \ge \frac{m+1}{2}, 0 \le i \le p, c(i) < \frac{m+1}{2}, p+1 \le i \le m$

$r(j) \ge \frac{m+1}{2}, 0 \le j \le q, r(j) < \frac{m+1}{2}, q+1 \le j \le m$，其中 $0 \le p,q \le m$，$p,q \in \mathbf{N}$

则数表 A 可以分成如下四个子表

A_1	A_3
A_2	A_4

其中 A_1 是 p 行 q 列，A_3 是 p 行 $m-q$ 列，A_2 是 $m-p$ 行 q 列，A_4 是 $m-p$ 行 $m-q$ 列，

设 A_1, A_2, A_3, A_4 中 1 的个数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4，

则 A_1, A_2, A_3, A_4 中 0 的个数分别为 $pq - x_1, q(m-p) - x_2$，

$p(m-q) - x_3, (m-p)(m-q) - x_4$，

则数表 A 中好位置的个数为 $x_1 + (m-p)(m-q) - x_4$ 个，

而 $x_1 + x_3 \ge p \times \frac{m+1}{2}, x_3 + x_4 \le (m-q) \times \frac{m-1}{2}$，

所以 $x_1 - x_4 \ge p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2}$，

所以 $x_1 + (m-p)(m-q) - x_4 \ge x_1 - x_4 \ge (m-p)(m-q) + p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2}$，

而 $(m-p)(m-q) + p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2}$

$= m^2 - pm - qm + pq + p \times \frac{m+1}{2} - (m-q) \times \frac{m-1}{2}$

$= p \times \frac{m-1}{2} - q \times \frac{m+1}{2} + pq + \frac{m^2+m}{2}$

$= (p - \frac{m+1}{2})(q - \frac{m-1}{2}) - \frac{m^2-1}{4} + \frac{m^2+m}{2}$

$=(p-\dfrac{m+1}{2})(q-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}$

显然当$(p-\dfrac{m+1}{2})(q-\dfrac{m-1}{2})$取得最小值时,上式取得最小值,

因为$0\le p,q\le m$,所以

$(p-\dfrac{m+1}{2})(q-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}\ge(m-\dfrac{m+1}{2})(0-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}$

$(p-\dfrac{m+1}{2})(q-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}\ge(0-\dfrac{m+1}{2})(m-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}$

当$p=m$时,数表A中至少含有$m\times\dfrac{m+1}{2}$个1,

而$m\times\dfrac{m+1}{2}>m+(m-1)\times\dfrac{m-1}{2}$,所以$q$至少为2

此时$(p-\dfrac{m+1}{2})(q-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}\ge(m-\dfrac{m+1}{2})(2-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}=2m-1$

当$p=m-1$时,数表A中至少含有$(m-1)\times\dfrac{m+1}{2}$个1,

而$(m-1)\times\dfrac{m+1}{2}>m\times\dfrac{m-1}{2}$,所以$q$至少为1,

此时$(p-\dfrac{m+1}{2})(q-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}\ge[(m-1)-\dfrac{m+1}{2}](1-\dfrac{m-1}{2})+\dfrac{m^2+2m+1}{4}=2m-2$

下面的数表满足条件,其“好位置”的个数为$2m-2$.

			$\frac{m-1}{2}$列					$\frac{m-1}{2}$列			
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\frac{m-1}{2}$行
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	1	1	⋯	1	1	0	0	⋯	0	0	
1	0	0	⋯	0	0	1	1	⋯	1	1	
1	0	0	⋯	0	0	1	1	⋯	1	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\frac{m-1}{2}$行
1	0	0	⋮	0	0	1	1	⋯	1	1	
1	0	0	⋮	0	0	1	1	⋯	1	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	