

递推数列解题分析

南昌师范高等专科学校 高晓妹

[摘要]对于数列的通项公式而言其下标必须是正自然数,通项公式是关于自然数的函数,如果在解题过程中忽略了这些条件,不按照它的规律去做,就会产生错误。

[关键词]递推数列 下标特征 防缩法

最近看到这样一个题目,我们在解的时候发现这个题目前面两个小问题求解没有问题,但是在解答第三个问题时发现数列 $\{b_n\}$ 的各项如不是正整数,对于 a_n 就不能使用第一问求出的结果 $a_n=2n-\frac{3}{2}$ 加以解答。原题如下:

已知方程 $\sqrt{3}\tan^2\pi x-4\tan\pi x+\sqrt{3}=0$ 在区间 $[n-1, n](n\in\mathbb{N}^*)$ 内所有的根的和为 a_n 。

(1)求 a_1 及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)求 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和;

(3)假设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2, b_{n+1}\geq a_{b_n}$,证明

$$\frac{1}{2b_1-3}+\frac{1}{2b_2-3}+\frac{1}{2b_3-3}+\cdots+\frac{1}{2b_n-3}<2。$$

解:解方程 $\sqrt{3}\tan^2\pi x-4\tan\pi x+\sqrt{3}=0$ 得到方程的两个根是 $x=\frac{1}{6}$

+ k 或 $x=\frac{1}{3}+k, (k\in\mathbb{Z})$,于是

$$(1) \text{在区间}[0,1) \text{上 } a_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\text{在区间}[1,2) \text{上 } a_2=\left(\frac{1}{3}+1\right)+\left(\frac{1}{6}+1\right)=\frac{1}{2}+2$$

.....

$$\text{在区间}[n-1, n](n\in\mathbb{N}^*) \text{上 } a_n=\frac{1}{3}+(n-1)+\frac{1}{6}+(n-1)=2n-\frac{3}{2};$$

$$\text{即数列}\{a_n\} \text{的通项公式为 } a_n=2n-\frac{3}{2}$$

$$(2) \text{由}(1) \text{知 } a_n=2n-\frac{3}{2}$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{2^n}=\frac{2n-\frac{3}{2}}{2^n}=\frac{4n-3}{2^{n+1}}$$

于是数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\cdots+\frac{4n-7}{2^n}+\frac{4n-3}{2^{n+1}}$$

两边同乘以2得

$$2S_n=\frac{1}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\frac{13}{2^4}+\cdots+\frac{4n-3}{2^n}$$

两式错位相减得

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{4}{2^n} - \frac{4n-3}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + 4\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{4n-3}{2^{n+1}} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$(3) \text{已知 } b_1=2, b_{n+1}\geq a_{b_n}, \text{又由}(1) \text{知 } a_n=2n-\frac{3}{2}, \text{所以 } b_{n+1}\geq a_{b_n}=2b_n-\frac{3}{2},$$

$$\text{变形得 } 2b_{n+1}-3\geq 2(2b_n-3) \text{ 即 } \frac{1}{2b_{n+1}-3}\leq \frac{1}{2(2b_n-3)}$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \frac{1}{2b_1-3} + \frac{1}{2b_2-3} + \frac{1}{2b_3-3} + \cdots + \frac{1}{2b_n-3} \\ \leq \frac{1}{2b_1-3} + \frac{1}{2(2b_1-3)} + \frac{1}{2^2(2b_1-3)} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}(2b_1-3)} \\ = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2 \end{aligned}$$

题目解答至此,按正常思维好像没有问题,但实际上解答第三问时由于递推公式的下标必须为正整数的特征,而 b_n 没有说明是正整数,所以公式 $a_n=2n-\frac{3}{2}$ 是不能使用的,即 $a_n=2b_n-\frac{3}{2}$ 不成立,因为 b_n 作为 a 的

下标,必须是正整数。而且 $2b_n-3>0$ 是否正确还未知,公式 $\frac{1}{2b_{n+1}-3}\leq$

$\frac{1}{2(2b_n-3)}$ 不能成立。只有满足条件 b_n 为正整数,而且 $2b_n-3>0$ 这样的话

题目的第三问就可以做下去了。此时 b_1 依次取值 $b_2\geq 2b_1-3=3, \dots, b_2$

取最小值3, b_3 取最小值5, b_4 取最小值9, ..., 于是经过多次放缩以后得

$$\text{到 } \frac{1}{2b_1-3} + \frac{1}{2b_2-3} + \frac{1}{2b_3-3} + \cdots + \frac{1}{2b_n-3} < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} < 1 +$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2。$$

至此本题解答完毕。对于本题,不等式右边的值还可以比2小一些。

在遇到此类问题的时候,应该仔细分析题目条件特别是隐含的条件,才能在解答过程中做到心中有数。

(上接第109页)

3.2.3 软件的更改

原软件中不包含吹扫装置,本次在软件中又增加了吹扫的程序。为了屏蔽吹扫时声波信号的突升导致误报异常信号,在软件中增加了一个延时的模块,即当模拟量超过50%时超过四分钟报异常,当超过十二分钟时报泄露。这样有效的避免了误报的可能,经过投产后大约半年的观察,未发现吹扫程序和屏蔽程序有任何异常情况。

除此以外,还进行了通讯程序的更改,原我公司DCS中与四管泄露开关量的通讯设置的采集二进制号的位数设置分别为0、1、2,即0的时候为normal,1的时候为abnormal,2的时候为leakage,而南京国泰软件中送出的数值为十进制中的数字1、3、4,它们的二进制分别为:

1 001

2 010

3 011

4 100

当设置为1、3、4的时候,会出现一个问题是:当发生abnormal时,即二进制的011时,采集二进制的位数的DCS会认为第0位和第1位同时发1,也就是normal和abnormal同时发。这与我们的设计原则: normal、abnormal、leakage不同时为1相违背。

而当我们把通讯的输出设置为1、2、4时则不会出现这个问题(详见上面的十进制与二进制的转化)。当为1时,normal灯亮,而abnormal和

leakage不亮,当为2时,abnormal灯亮,normal和leakage灯不亮,当为4时,leakage灯亮,normal和abnormal灯不亮。这就符合了DCS与四管泄露检测装置之间的通讯。

4. 吹扫前后效果对比分析

在加装四管泄露报警装置前,炉管泄漏测点部分容易堵灰和结焦(尤其是个别鸭嘴形状的取样点),清理起来十分的消耗人力,不利于对泄露部分进行有力的监视,严重影响监测系统的灵敏性和正确性。

通过增加吹扫装置后,基本杜绝了炉管检测探头的堵灰和结焦情况的发生,使得监测装置的准确性和灵敏度得到了提高,增加了检测系统工作的可靠性,避免了炉管泄露装置误报和漏报情况的发生。实践证明,应用这套装置,可以及时判断炉管泄露和泄漏位置,跟踪测报泄露的程度和趋势,大大提高锅炉运行的安全性。锅炉炉管泄露的早期报警,有利于电厂的负荷调度,使机组的停运安排更为合理。

参考文献

[1]唐华. 锅炉炉管泄漏自动报警装置培训讲义[R]. 南京: 南京国泰电力技术有限公司, 2004: 5-12

[2]范从振. 锅炉原理[M]. 北京: 水利电力出版社, 2000: 121-130

[3]施仁等. 自动化仪表与过程控制[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003: 92-95