第18卷第1期 1998年2月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 18 No. 1 Feb. 1998

关于 Prüfer 环的特征刻画*

曾姣华
(湖北大学数学与计算机科学学院, 武汉430062)

摘要 本文用可除模给出了 Prüfer 环的一个充分必要条件.

关键词 正合列, 可除模, 内射模, Prüfer 环.
分类号 AMS(1991) 16E60/CCL O153.3

如众周知, 赋值环、代数整数环、Dedekind 环以及非紧致 Riemann 面上的复解析函数环都是 Prüfer 环. 因此 Prüfer 环的研究对赋值论、代数数论以及复分析等数学分支都是有意义的. 由于Dedekind 环是 Prüfer 环, 因此 Prüfer 环必有一些与Dedekind 环相类似的性质. 比如, 整环 R 是Dedekind 环当且仅当它的每一个可除模都是内射模(见[1]中p220定理18). 自然会问, 对于 Prüfer 环能否利用其上的可除模所满足的性质来加以刻画? 本文就此给出了一个充要条件, 肯定地回答了这一问题, 同时也推广了Dedekind 环上的一些相应结论.

本文中环 R 指有单位元的结合环, 模指左酉模, 整环指有单位元、无零因子可换环.

为后文所需, 先给出以下的三条引理.

引理1[1] 设 R 为整环, I 为 R 的一个非零理想, 则 I 为投影 R-模的充要条件是 I 为可逆的.

引理2[2] 设 M 为一 R-模, I 为 R 的一个理想, 则 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$ 当且仅当 $\forall f\in\mathrm{Hom}(I,M)$, $\exists g\in\mathrm{Hom}(R,M)$ 使得 $g|_I=f$ ($g|_I$ 为 g 在 I 上的限制).

引理3 设 R 为任一环, A 为任一 R-模, 则对任一内射模的同态象 D 恒有 $\mathrm{Ext}_R^1(A,D)=0$ 的充要条件是对任一 R-模 M, 恒有 $\mathrm{Ext}_R^2(A,M)=0$.

证明 必要性. 因对任一 R-模 M 有正合列

$$0\to M\to Q\to D\to 0,$$

其中 Q 为内射模, $D=Q/M$ 为 Q 的同态象.

用 $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ 函数作用于这个正合列, 得长正合列

$$\cdots\to\mathrm{Ext}_R^1(A,Q)\to\mathrm{Ext}_R^1(A,D)\to\mathrm{Ext}_R^2(A,M)\to\mathrm{Ext}_R^2(A,Q)\to\cdots.$$

由于 Q 为内射的, 必有 $\mathrm{Ext}_R^2(A,Q)=0$. 由已知 $\mathrm{Ext}_R^1(A,D)=0$, 故 $\mathrm{Ext}_R^2(A,M)=0$. 反过来, 由以上正合列并注意 Q 的内射性也使 $\mathrm{Ext}_R^1(A,Q)=0$, 由上述长正合列及 $\mathrm{Ext}_R^2(A,M)=0$ 即知 $\mathrm{Ext}_R^1(A,D)=0$. □

下面证明本文的一个主要定理, 从中可以看出 Prüfer 环与Dedekind 环的一个差距.

* 1995年3月11日收到

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理4 整环 R 为 Prüfer 环当且仅当 R 上的任一可除模 M 满足 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$, 其中 I 为 R 的任一有限生成理想

证明 必要性 若 R 为 Prüfer 环, M 为可除 R-模, I 为 R 的任一有限生成理想, 则 I 为投射 R-模, 由引理1知 I 可逆 于是存在 $q_1,\cdots,q_n\in Q(R)$ (R 的商域), $a_1,\cdots,a_n\in I$, 使得 $\sum_{i=1}^{n} q_i a_i=1$, 且 $q_i I\subseteq R$, $i=1,2,\cdots,n$.

对 $\forall f\in \mathrm{Hom}(I,M)$, 因 M 为可除模, 故有 $x_i\in M$, 使得 $a_i x_i=f(a_i)$.

$$\forall \beta\in I,\ \beta=\sum_{i=1}^{n}\beta q_i a_i,\ f(\beta)=\sum_{i=1}^{n}\beta q_i f(a_i)=\beta\sum_{i=1}^{n} q_i a_i x_i.$$

令 $x=\sum_{i=1}^{n} q_i a_i x_i$, 取 $g: R\to M$ 使 $g(\alpha)=\alpha x$, $\forall \alpha\in R$. 则 $g\in \mathrm{Hom}_R(R,M)$, 且 $g|_I=f$. 由引理2, $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$.

充分性 设 I 为 R 的任一有限生成的理想, 若 Q 为任一内射模, 则 Q 可除, 从而其商模 D 可除 由假设知 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,D)=0$. 由 D 的任意性及引理3知, 对任一 R-模 M, 均有 $\mathrm{Ext}_R^2(R/I,M)=0$, 由此得 $pd(R/I)\le 1$ (pd 表示投射维数). 从而 $pd(I)=0$, 即 I 为投射模, 故 R 为 Prüfer 环. □

显然, 若 M 为一 R-模, 且对 R 的任一有限生成理想 I 恒有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$, 则 M 是可除模 事实上, 对 $\forall r\in R$, $r\neq 0$, $\forall a\in M$, 令 $I=(r)$ (由 r 所生成的理想), 则有 $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$. 取 $f\in \mathrm{Hom}(I,M)$ 使得 $f(r)=a$, 由引理2, 存在 $g\in \mathrm{Hom}(R,M)$ 使得 $g|_I=f$. 令 $g(1)=x$, 则 $rx=rg(1)=g(r)=f(r)=a$. 故 M 为可除模

于是, 定理4可改写成下列形式:

定理4′ 设 R 为整环, 则下列两点等价:

(1) R 是 Prüfer 环;

(2) M 是可除模当且仅当对所有有限生成的理想 I, $\mathrm{Ext}_R^1(R/I,M)=0$.

注意到 Dedekind 环的另一特征性质: 对无零因子可换环 R, R 为 Dedekind 环的充分必要条件是一切可除 R-模都是内射的, 由定理4立得如下推论

推论1 Prüfer 环 R 为 Dedekind 环的充分必要条件是 R 为 Noether 环.

由此可以看出 Prüfer 环与 Dedekind 环的又一差距

作者对佟文廷教授的指导深表谢意

参 考 文 献

[1] 周伯埙, 同调代数, 科学出版社, 1988.

[2] P. Vamos, *Ideals and modules testing injectivity*, Comm. in Alg., 11: 22(1983), 2495-2505.

[3] J. P. Jans, *Rings and homology*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.