

西安交通大学研究生公共课最优控制 2005 试题

2005/07/04

一、(30 分) 证明题

1. 证明：有限时间线性二次型状态调节器问题中，矩阵 Riccati 微分方程的解 $P(t)$ 是对称、半正定的。

2. 证明：若可微泛函 $J[y(x)]$ 在 $y = y_0(x)$ 上达到极小(大)值，则在 $y = y_0(x)$ 上有 $\delta J = 0$ 。

二、(12 分)

已知 $\dot{x} = u, x(0) = 1$ ，求 t_1^* 和 $u^*(t)$ ，使

$$J = \int_0^{t_1} \left(1 + x + \frac{1}{2} u^2 \right) dt$$

为最小。

三、(13 分)

已知 $x(i+1) = x(i) + u(i), x(0) = 1$ ，求 $u^*(0), u^*(1), u^*(2)$ ，使

$$J = \sum_{i=0}^2 (x^2(i) + u^2(i)) + x^2(3)$$

取最小。

四、(15 分)

请推导如下离散系统最优控制问题极值存在的必要条件

$$\min_{u(k)} J = \theta[\mathbf{x}(k_f), k_f] + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \phi(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k)$$

$$s.t. \quad \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k), \quad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{N}[\mathbf{x}(k_f), k_f] = \mathbf{0}$$

式中， $\mathbf{x} \in R^n, \mathbf{u} \in R^m, k_0$ 及 k_f 固定。 $\mathbf{N} \in R^q, \mathbf{N}$ 为终端函数。

五、(15分)

一堆火柴共 14 根,两个人依次从中取走 1 根或 4 根,取走最后一根火柴者获胜。

应用动态规划方法证明先取火柴者总有策略可以胜出。

六、(15分)

A colony of insects consists of workers and queens, of numbers $w(t)$ and $q(t)$ at time t . If a time-dependent proportion $u(t)$ of the colony's effort is put into producing workers, ($0 \leq u(t) \leq 1$, then w, q obey the equations

$$\dot{w} = auw - bw, \quad \dot{q} = c(1 - u)w,$$

where a, b, c are constants, with $a > b$. The function u is to be chosen to maximize the number of queens at the end of the season. Show that the optimal policy is to produce only workers up to some moment, and produce only queens thereafter.

(补充: a, b, c 大于 0。)

* 考察的同学五、六题可选做一题。