2019 年春季学期应用随机分析课程作业

June 10, 2019

参考教材: 《随机微分方程及其应用概要》2014 年 1 月第三次印刷版本
课本习题以此版本为准.

每单周周二交作业, 双周周二或周四发作业

Contents

1　2 月 19 日

1. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间，证明：事件域 $\mathcal{F}$ 的一个等价定义为

   (1) $\mathcal{F}$ 非空;

   (2) 若 $A \in \mathcal{F}$，则 $A^c \in \mathcal{F}$;

   (3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{F}$，对于任意 $n \geq 1$，$\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$。

2. 设 $\mathcal{F}$ 为一个事件域，证明：对于 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$，则 $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$，$A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$。(**注意事项:** $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_n \cup A_n \cdots$)

3. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间，证明：$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ 两两不交，即互不相容，则

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

2 2 月 26 日

1. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots .\xi_n, \cdots$ 是同分布的随机变量序列, 满足 $E\xi_i^2 < \infty$, 且对于任意的 $n \neq m$, $\mathrm{cov}(\xi_\mathrm{n}, \xi_\mathrm{m}) = 0$. 证明: $\xi_1, \xi_2, \cdots .\xi_n, \cdots$ 满足弱大数律。

   (**注意事项:** 若不假设同分布性质，这个命题还成立吗？或者问可以在什么条件下成立？)

2. 设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$, $P(\{\omega_1\}) = p, 0 < p < 1$. 证明: 在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 不存在两个非平凡独立同分布的随机变量.

3　2 月 28 日

1. 阅读参考教材 1.3.3 节内容, 或 2019 版讲义 1.5 节内容.
2. 证明：2019 版讲义命题 1. 2 中 (1)(2) 等价.
3. 证明：2019 版讲义命题 1.1(4).
4. **参考教材第 19 页第 23 题, 即**

   设 X, Y, Z, W 是相互独立的标准正态随机变量. 设 $a, b \geq 0$, 证明：
   $$P\big(a\sqrt{X^2+Y^2} > b\sqrt{Z^2+W^2}\big) = \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$
5. 设 X, Y 是两个零均值独立的 Gauss 随机变量，设 A 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 可测集. $f(x) = \mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_{A^c}(x)$. 证明: $f(Y)X$ 是与 Y 独立的 Gauss 随机变量，而且与 $f(Y)X$ 与 $f(Y)$ 也独立. 进一步求出 $f(Y)X$ 的数学期望与方差.

4　3 月 5 日

1. 设 $X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\in A^c\end{cases}$，$A\in\mathcal{F}$，$Y$ 为一个离散型随机变量，其分布列为 $P(Y=y_i)=p_i,\ \ i=1,2,\cdots,n\cdots$。证明

$$E[X|Y](\omega)=\begin{cases}P(A|Y=y_i), & Y(\omega)=y_i\text{ 且 }p_i>0\\ c_i(c_i\text{为任一常数}), & \text{若}p_i=0\end{cases}.$$

(提示：可以用定义直接验证。)

2. 在先后独立地掷两次均匀硬币这个试验中，设 $X=\begin{cases}1, & \text{第一次出正面}\\ 0, & \text{第一次出反面}\end{cases}$，$Y$ 表示两次中出现正面的总次数。求 $E[X|Y]$ 以及它的分布列。

3. 设 (X,Y_1,Y_2) 服从联合密度为 $p(x,y_1,y_2)$ 的连续型随机向量，$EX^2<\infty$。求 $E[X|Y_1,Y_2]$。**(注意：此题中并没有假设对于任意的 (x,y_1,y_2)，$p(x,y_1,y_2)>0$．)**

4. (X_1,X_2,X_3) 服从三元正态分布 $N(\vec{a},\Sigma)$，其中 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)^T$，$\Sigma=(\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$。若 $\sigma_{12}=0$，求 $E[X_3|X_1,X_2]$ 以及它的密度函数。

5　3 月 12 日

1. 设随机向量 (X,Y) 的密度函数是 $p(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$. 求 $E[Y|X]$ 的密度函数。

2. (**即参考教材第 31 页第 4 题，但多一问**)
   设 $\eta \sim U[0,1]$, 记
   $$\eta_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n} \le \eta < \frac{k+1}{2^n}\}}.$$
   (1) 求 η_n 的分布；
   (2) 给定 $\eta_1 = 1/2$ 的条件下，η_2 的条件分布律.
   (3) 求 $E[\eta_2|\eta_1]$.

3. (**即参考教材第 31 页第 5 题**)
   设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，而在随机变量 $X=x$ 条件下，随机变量 Y 的条件分布为二项分布 $B(n,x)$.
   (1) 求 $EY, \mathrm{var}(Y)$.
   (2) 求随机变量 Y 的分布.

4. (**即课本第 18 页第 16 题**)
   证明：$\mathrm{var}(Y) \ge E\big(\mathrm{var}(Y|X)\big)$, 其中 $\mathrm{var}(Y|X) = E\big[\big(Y - E[Y|X]\big)^2|X\big]$ 称为 Y 关于 X 的条件方差。

5. (X,Y) 服从二维正态分布，求 $\mathrm{var}(Y|X)$。

6　3 月 14 日

1. 设 $\{X_n\}_{n\geq 1}$ 是独立同分布的随机变量，服从参数为 λ 的指数分布。$S_n=\sum_{k=1}^n X_k$。证明；$\{S_n\}_{n\geq 1}$ 是一个连续状态空间上的马氏链，即证明对于任意的有界 Borel 函数 f，下式成立：
$$E[f(S_{n+1})|S_1,S_2\cdots,S_n]=E[f(S_{n+1})|S_n].$$
并求出这个马氏链的转移密度函数。

2. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准的布朗运动,$(X_t=B_t+at)_{t\geq 0}$ 是所谓的漂移布朗运动,$\mathcal{F}_t=\sigma(B_s,s\leq t)$。证明：$(X_t)_{t\geq 0}$ 是关于 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 的马氏过程，即证明：对于任意的有界 Borel 函数 f，$s<t$，
$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s]=E[f(X_t)|\sigma(X_s)].$$
并求出 $(X_t)_{t\geq 0}$ 的转移密度函数。

7 3 月 19 日

1. $(\xi_n)_{n\geq 1}$ 关于 σ-域流 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 适应，证明下列两个命题等价：

   (a) 对任意的 n, m，$E[\xi_{n+m}|\mathcal{F}_n] = \xi_n$，即 $(\xi_n)_{n\geq 1}$ 为 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 鞅;

   (b) 对任意的 n，$E[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \xi_n$。

2. (即参考教材第 48 页第 2 题)
   若 $\{\xi_n\}$ 是鞅列，而且 $E\xi_n^+ < +\infty$，则 $\{\xi_n^+\}$ 也是下鞅列. 对应地, 又若 $E\xi_n^- > -\infty$, 则 $\{\xi_n^-\}$ 也是上鞅列。

3. (即参考教材第 48 页第 4 题)
   设 $\xi_n = \sum_{k=1}^n X_k$ 是 $(\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n))_{n\geq 1}$ 的鞅列，且其方差有限，则序列 $\{X_k\}$ 中的随机变量两两不相关。

4. (即参考教材第 48 页第 8 题)

   假定随机序列 $(\xi_n, n \geq 0)$ 有数学期望, 且满足

   $$E[\xi_{n+1}|\xi_n, \cdots, \xi_0] = \alpha\xi_n + \beta\xi_{n-1}, \quad (\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1).$$

   能否选取 c，使 $\eta_n = c\xi_n + \xi_{n-1} (n \geq 1, \eta_0 = \xi_0)$ 是 $(\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, \cdots, \xi_n))_{n\geq 0}$ 鞅列？

5. (即参考教材第 48 页第 8 题)

   设 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ 是简单随机徘徊.$X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} (q = 1 - p)$ 且独立同分布.
   证明 $\xi_n = (pz^{2q} + qz^{-2p})^{-n} z^{S_n - n(p-q)}$ 是鞅列.

8　3 月 26 日

1. 阅读讲义例 3.7，例 3.10，例 3.11 及其证明.
2. 证明 Doob 下鞅列分解定理.
3. 设 (ξ_n) 相互独立，$E|\xi_n| < \infty$，$E\xi_n = \mu_n > 0$，证明:$X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ 为 $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 下鞅，并求出 (X_n) 的 Doob 下鞅分解；

   若进一步 $E\xi_n = \mu_n = 0$, $E\xi_n^2 < \infty$, $\forall n$, $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ 为鞅列. 证明: X_n^2 为下鞅列, 并求出 X_n^2 的 Doob 下鞅分解。

9　3 月 28 日

1. 设 $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 是 i.i.d 的随机变量序列，$P(\eta_n=1)=p$, $P(\eta_n=-1)=1-p$，$0<p<1$，$\mathcal{F}_n=\sigma(\eta_1,\cdots,\eta_n)$。

$$\xi_n=\sum_{k=1}^{n}\eta_k,\quad M_n=\frac{1}{[4p(1-p)]^{\frac{n}{2}}}\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{\frac{\xi_n}{2}}.$$

   (a) 证明: $(M_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 是鞅；

   (b) 证明: $(M_n\xi_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 是鞅；

   (c) 设 $(R_n)_{n\geq 1}$ 是一个 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 适应的过程，而且 $R_1=M_1$。若 $(R_n)_{n\geq 1}$ 和 $(R_n\xi_n)_{n\geq 1}$ 都是关于 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 的鞅，证明：对于任意的 n，$R_n=M_n$.

10　4 月 2 日

1. 设 $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 是相互独立的随机变量序列，η_n 服从 $N(0,\sigma_n^2)$，ξ_0 是与 $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 相互独立的随机变量，$\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$n=0,1,2,\cdots$。当 $n\geq 1$ 时，a_n 是关于 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测的有界随机变量。

   (a) 证明：
   $$E\Big[\exp\big(a_n\eta_n\big)\Big|\mathcal{F}_{n-1}\Big]=\exp\big(\frac{1}{2}a_n^2\sigma_n^2\big).$$

   (b) 设
   $$z_n=\exp\Big(-\sum_{k=1}^n\frac{a_k}{\sigma_k^2}\eta_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{a_k^2}{\sigma_k^2}\Big).$$
   证明：$(z_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 是鞅。

2. (Girsanov-Cameron-Martin 定理)

   设 $(\xi_0,\eta_n,\ n\geq 1)$ 相互独立，$\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$，$E|\xi_0|<\infty$，$\eta_n\sim N(0,\sigma_n^2)$，$b_n\neq 0$，$\frac{c_n}{b_n}$ 是有界 Borel 可测函数。

   $$\begin{aligned}\xi_n &= \xi_0+\sum_{k=1}^n b_k(\xi_0,\ldots,\xi_{k-1})\cdot\eta_k+\sum_{k=1}^n c_k(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{k-1})\\ &= \xi_0+\sum_{k=1}^n b_k(\xi_0,\ldots,\xi_{k-1})\Big[\eta_k+\frac{c_k(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{k-1})}{b_k(\xi_0,\xi_1\ldots,\xi_{k-1})}\Big].\end{aligned}$$

   $$z_n=\exp\Big(-\sum_{k=1}^n\frac{c_k(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{k-1})}{b_k(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{k-1})\sigma_k^2}\eta_k-\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}\big(\frac{c_k(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{k-1})}{b_k(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{k-1})\sigma_k}\big)^2\Big).$$

   对于任意的 $A\in\mathcal{F}_n$，定义新的概率 $\hat{P}(A)=E(\mathbf{1}_A z_n)$，则在 $\hat{P}$ 下，
   $$(\eta_1+\frac{c_1}{b_1},\cdots,\eta_n+\frac{c_n}{b_n},\cdots)$$
   是相互独立的随机变量序列，而且 $\eta_n+\frac{c_n}{b_n}\sim N(0,\sigma_n^2)$。更进一步，$(\xi_n,\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 在 $\hat{P}$ 下是鞅。

   (a) 设 $(\xi_0,\eta_n,\ n\geq 1)$ 相互独立，$E|\xi_0|<\infty$，$\eta_n\sim N(\mu_n,\sigma_n^2)$。设 $f(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 是有界 Borel 函数。$\mathcal{F}_n=\sigma(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_n)$，证明：
   $$\begin{aligned}&E\big[\exp\big(f(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\eta_n\big)\big|\mathcal{F}_{n-1}\big]\\ =\ &\exp\Big(f(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\mu_n+\frac{1}{2}f^2(\xi_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1})\sigma_n^2\Big).\end{aligned}$$

   (b) 证明 Girsanov-Cameron-Martin 定理

3. 若 τ,σ 都是 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 停时，证明：$\tau\vee\sigma=\max(\tau,\sigma)$ 和 $\tau+\sigma$ 也是 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 停时。

4. 设 $(\xi_n)_{n\geq 1}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1},P)$ 上适应的随机序列，τ 是关于 σ-域流 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 的停时，设 τ 处处取有限值，即 $\forall\omega\in\Omega$，$\tau(\omega)<\infty$. 定义 $(\xi_\tau)(\omega)=\xi_{\tau(\omega)}(\omega)$，证明：$\xi_\tau$ 是 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上的随机变量。

5. 设 $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F})_{n\geq 1},P)$，$\tau$ 是关于 $(\mathcal{F})_{n\geq 1}$ 停时，证明: 此时 τ 的等价定义是：$\forall n\geq 0$，$\{\omega:\tau(\omega)=n\}\in\mathcal{F}_n$。

11　4 月 9 日

1. (利用选样定理证明 Wald 等式) 设 $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 是 i.i.d 的随机变量序列，$E|\eta_1| < \infty$，设 $\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_1, \cdots, \eta_n)$，$\tau$ 是 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ 停时，满足 $E\tau < \infty$，$\xi_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$，证明：

$$E\xi_\tau = E\tau E\eta_1.$$

若进一步 $E\eta_1 = 0,\ E\eta_1^2 = \sigma^2 < \infty$，证明：

$$E\xi_\tau^2 = \sigma^2 E\tau.$$

12　4 月 11 日

1. $(\eta_n)_{n\geq 1}$ 是 i.i.d 的随机变量序列，η_1 服从 $[0,1]$ 的均匀分布，$\xi_n=\sum_{k=1}^n \eta_k$. $\tau=\inf\{n,\xi_n\geq 1\}$. 求 $E\tau$ 和 $E\xi_\tau$.

2. (**此题是选作题**) 设 $(X_n)_{n\geq 0}$ 是有限状态空间 S 上的不可约马氏链，转移矩阵为 $\mathbf{P}$，设 A 是 S 的子集。$F:A\to\mathbb{R}$ 与 $g:S\setminus A\to\mathbb{R}$ 是两个给定的函数。设 $\tau=\inf\{n,X_n\in A\}$，$\tau_n=\tau\wedge n$. 设函数 $f:S\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(x)=F(x),\quad x\in A;$$

$$\big((\mathbf{P}-\mathbf{I})f\big)(x)=g(x),\quad x\in S\setminus A,\quad \mathbf{I}\text{是单位矩阵}.$$

   (a) 证明：$M_n=f(X_{\tau_n})-\sum_{j=0}^{\tau_n-1}g(X_{\tau_j})$ 是鞅；

   (b) 利用选样定理证明

$$f(x)=E\Big[F(X_\tau)-\sum_{j=0}^{\tau-1}g(X_j)\Big|X_0=x\Big].$$

   参考建议：也许参考一下讲义第三章例 3.11 和定理 3.7 会有帮助。这道题的背景是来源于二阶椭圆方程边值问题的概率解。

   而且首先要证 $E\tau<\infty$

3. 设 τ 和 σ 为 $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ 停时。证明：若 $\tau\leq\sigma$，则 $\mathcal{F}_\tau\subset\mathcal{F}_\sigma$.

4. 若 $(\xi_n)_{n\geq 0}$ 为 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 适应过程，τ 为 $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ 停时. 证明: 则 ξ_τ 为 $\mathcal{F}_\tau$ 可测的随机变量;

13 4 月 16 日

1. 对于运动 $(B_t, t \geq 0)$, 设 $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, \quad s \leq t)$，证明：

   (1) $(B_t, t \geq 0)$ 是 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 鞅;

   (2) $(z_t = e^{cB_t - \frac{c^2 t}{2}}, t \geq 0)$ 是 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 鞅.

2. 设 $\{p(t,x,y), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^n\}$ 为 n 维标准布朗运动的转移密度，证明：

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_x p(t,x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta_y p(t,x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial y_i^2}. \tag{2}$$

   (2) 式被称为 Kolmogorov 向前方程 (第二方程) 或者 Fokker-Planck 方程; (1) 式被称为 Kolmogorov 向后方程 (第一方程).

3. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为漂移布朗运动，即

$$B_t = B_0 + A \cdot \bar{B}_t + b \cdot t,$$

   其中 A 为一个 $n \times r$ 非零常数矩阵，$\bar{B}_t$ 为 r 维标准布朗运动，$b = (b_1, \cdots, b_n)$ 为一个 n 维非零常数向量。设 AA^T 是正定矩阵, A^T 表示 A 的转置。

   (1) 求出 $(B_t)_{t\geq 0}$ 的转移密度 $p(t,x,y)$;

   (2) 求出 $p(t,x,y)$ 满足的 Kolmogorov 向前方程 (第二方程或者 Fokker-Planck 方程) 和 Kolmogorov 向后方程。

   (3) 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上充分光滑具有紧支撑的函数，求

$$\lim_{\tau \downarrow 0}\frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x}f(B_{s+\tau}) - E^{s,x}f(B_s)\Big).$$

14　4 月 23 日

1. 设 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是一个时间齐次取值在有限状态空间 S 的马氏链，它的转移速率矩阵记为 $\mathbf{Q}$。f 是 S 上的函数。求：
$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x}f(X_{s+\tau})-E^{s,x}f(X_s)\Big).$$

2. 设 $(X_n)_{n\geq 0}$ 是 i.i.d 的随机变量序列，X_0 的密度函数为 $p(x)$，$(\xi_t)_{t\geq 0}$ 是与 $(X_n)_{n\geq 0}$ 独立的 Poisson 过程，其参数为 λ。设 $Y=\sum_{n=0}^{\xi_t}X_n$，则 $(Y_t)_{t\geq 0}$ 是一个时间齐次的独立增量过程，称为复合 Poisson 过程。f 为 $\mathbb{R}$ 上充分光滑具有紧支撑的函数，求
$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x}f(Y_{s+\tau})-E^{s,x}f(Y_s)\Big).$$

3. 若 $(X_t)_{t\geq 0}$ 是平稳 OU 过程,
$$X_t=\frac{\sqrt{c}B_{e^{2\beta t}}}{e^{\beta t}},$$
其中 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是标准布朗运动。f 为 $\mathbb{R}$ 上充分光滑具有紧支撑的函数，求
$$\lim_{\tau\downarrow 0}\frac{1}{\tau}\Big(E^{s,x}f(X_{s+\tau})-E^{s,x}f(X_s)\Big).$$

15　4 月 25 日

1. 阅读参考教材《随机微分方程及其应用概要》p72-78 的内容。

2. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维 Brown 运动。设 $[s_1, s_2]$ 的 2^n 等分点为

$$s_1 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{2^n}^{(n)} = s_2.$$

设 $1 \leq p < \infty$，$\Delta B_{t_k^{(n)}} = B_{t_{k+1}^{(n)}} - B_{t_k^{(n)}}$。请讨论 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} \left|\Delta B_{t_k^{(n)}}\right|^p$ 的敛散性。

16　5 月 7 日

1. 设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准 Brown 运动，$0=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{N_n}^{(n)}=T$ 是 $[0,T]$ 的划分，$\lambda_n=\max_i\{t_{i+1}^{(n)}-t_i^{(n)}\}$.

   (a) 设
$$\tilde{\phi}_t^{(n)}=\sum_k B_{t_{k+1}^{(n)}}\mathbf{1}_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t).$$
$$H_n^{\tilde{\phi}}\equiv\sum_k B_{t_{k+1}^{(n)}}\Delta B_{t_k^{(n)}}=\sum_{k=0}^{N_n-1}B_{t_{k+1}^{(n)}}\left(B_{t_{k+1}^{(n)}}-B_{t_k^{(n)}}\right),$$
   证明：当 $\lambda_n\to 0$ 时
$$H_n^{\tilde{\phi}}\xrightarrow{L^2}\frac{1}{2}B_t^2+\frac{1}{2}t.$$

   (b) 设
$$\Psi_t^{(n)}=\sum_{k=0}^{N_n-1}\frac{B_{t_k^{(n)}}+B_{t_{k+1}^{(n)}}}{2}\mathbf{1}_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$
   证明：当 $\lambda_n\to 0$ 时
$$H_n^{\Psi}\equiv\sum_{k=0}^{N_n-1}\frac{B_{t_k^{(n)}}+B_{t_{k+1}^{(n)}}}{2}\Delta B_{t_k^{(n)}}\xrightarrow{L^2}\frac{1}{2}B_t^2.$$

   (c) 设
$$\xi_t^{(n)}=\sum_{k=0}^{N_n-1}B_{\frac{t_k^{(n)}+t_{k+1}^{(n)}}{2}}\mathbf{1}_{(t_k^{(n)},t_{k+1}^{(n)}]}(t),$$
   证明：当 $\lambda_n\to 0$ 时
$$H_n^{\xi}\equiv\sum_{k=0}^{N_n-1}B_{\frac{t_k^{(n)}+t_{k+1}^{(n)}}{2}}\Delta B_{t_k^{(n)}}\xrightarrow{L^2}\frac{1}{2}B_t^2.$$

2. 设 $(\xi_n)_{n\geq 0}$ 是 i.i.d. 随机变量序列, 满足 $E\xi_1=0, E\xi_1^2<\infty$. $S_n=\sum_{k=0}^n\xi_n$.. 设 $K_t=S_n$, 当 $t\in[n,n+1)$, $Q_t=\xi_n$, 当 $t\in[n,n+1)$, $Q_t=\xi_n$. 设 $\tilde{Q}_t=\xi_n$, 当 $t\in(n,n+1]$, $\tilde{Q}_0=\xi_0$. $\mathcal{F}_t=\sigma(K_s,s\leq t)$. 对于任意的 ω, $K_t(\omega)$ 关于 t 是右连续有界变差函数，因此可以定义 $K_t(\omega)$ 的 Lebesgue-Stieljes 积分. 按照这种方式可以定义如下的两个 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 适应过程
$$(L_t=\int_{[0,t]}Q_s dK_s)_{t\geq 0}\quad 和\quad (\tilde{L}_t=\int_{[0,t]}\tilde{Q}_s dK_s)_{t\geq 0}.$$
   求出 $(L_t)_{t\geq 0}$ 和 $(\tilde{L}_t)_{t\geq 0}$ 的具体表达，并判断它们是否是 $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 鞅.

   (**如果没有学过《测度论》，不了解 Lebesgue-Stieljes 积分可以不做这道题.**)

17　5 月 9 日

1. (即主要参考书第 99 页习题 9)
   判别下列是否为鞅 (需要证明): $t^2B_t - 2\int_0^t s dB_s$, $B_t^3 - 3tB_t$.

2. (即主要参考书第 99 页习题 13)
   设 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是一维标准布朗运动，设 $g_k(t) = E|B_t^k|, k = 0, 1, 2\cdots$。利用 Itô 公式证明

$$g_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t g_{k-2}(s)ds, \quad k \geq 2.$$

   并于此计算 $E(|B_t|^k)$, $k = 1, 2\cdots$.

   ($f(x) = |x|^k, k = 3, 4, \cdots$ **是二次连续可微的**)

18　5 月 14 日

1. 设 $c, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是常数，$\mathbf{B}_t = (B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(n)})$ 是 n-维布朗运动

$$X_t = \exp\Big(ct + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j B_t^{(j)}\Big).$$

证明:

$$dX_t = \big(c + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2\big) X_t dt + X_t \big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j dB_t^{(j)}\big).$$

2. (即主要参考书第 99 页第 10 题, 但请注意与课本上题目的不同)

设 $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ 是二维布朗运动，$(B_0^{(1)})^2 + (B_0^{(2)})^2 \neq 0$. 判断 $(B_t^{(1)} B_t^{(2)})_{t\geq 0}$ 与 $\Big(\ln\big[(B_t^{(1)})^2 + (B_t^{(2)})^2\big]\Big)_{t\geq 0}$ 是否是 $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\geq 0}$ 鞅，是否是 $(\mathcal{F}_t^{\mathbf{B}})_{t\geq 0}$ 局部鞅，并请写出你的判断的数学证明。

19　5 月 21 日

1. (即主要参考书第 139 页第 3 题, 参看主要参考书第 110 页例 6.7 的内容)
   求证方程
   $$d\xi_t = [c(t) + b(t)\xi_t]dt + \sum_{i=1}^{m}[\sigma_i(t) + a_i(t)\xi_t]dB_t^{(i)},$$
   $$\xi_0 = \xi_0,$$
   的解是
   $$\xi_t = F(t)\Big[\xi_0 + \int_0^t F(s)^{-1}\Big(c(s) - \sum_{i=1}^{m}\sigma_i(s)a_i(s)\Big)ds + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} F(s)^{-1}\sigma_i(s)dB_s^{(i)}\Big],$$
   其中
   $$F(t) = e^{\int_0^t [b(s) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m a_i^2(s)]ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m a_i(s)dB_s^{(i)}}.$$

2. (即主要参考书第 139 页第 8 题)
   证明方程
   $$\begin{aligned} d\xi_t &= -\frac{1}{2}\xi_t dt - \eta_t dB_t, \\ d\eta_t &= -\frac{1}{2}\eta_t dt + \xi_t dB_t. \end{aligned}$$
   有解 $(\xi_t, \eta_t) = (\cos B_t, \sin B_t)$. 而且其任意一个解满足 $\sqrt{\xi_t^2 + \eta_t^2} = \sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$.

3. (即主要参考书第 139 页第 11 题)
   对于光滑函数 $\sigma(x)$, 证明 $g(B_t)$ 是方程
   $$\begin{aligned} d\xi_t &= \frac{1}{2}\sigma'(\xi_t)\sigma(\xi_t)dt + \sigma(\xi_t)dB_t, \\ \xi_0 &= 0. \end{aligned}$$
   的解，其中 $g(x)$ 是函数 $\int_0^x \frac{du}{\sigma(u)}$ 的反函数。

20　5 月 23 日

1. (即主要参考书第 138 页第 1 题)

   给出一般的形式随机微分方程

$$\frac{d^2\xi_t}{dt^2} = -\lambda^2\xi_t - b\frac{d\xi_t}{dt} + \sigma\dot{B}_t,$$

$$\xi_0 = x,\ \frac{d\xi_t}{dt}\ |_{t=0} = v_0,$$

   严格的数学形式，并求显式解.

2. (即主要参考书第 139 页第 5 题)

   求解方程 $d\xi_t = -\frac{1}{2}e^{-2\xi_t}dt + e^{-\xi_t}dB_t$, 并证明它在一个有限的随机时间爆炸.

   (设 ζ 是 $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ 停时，$\xi = (\xi_t)_{t<\zeta}$ 称为上面方程的以 ξ_0 为初值，以 ζ 为爆炸时的局部解，如果

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \frac{1}{2}e^{-2\xi_s}dt + \int_0^t e^{-\xi_s}dB_s$$

   对于 $t < \zeta$ 恒成立，其中

$$\int_0^t e^{-\xi_s}dB_s = \int_0^t e^{-\xi_s}\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)dB_s.$$

   (这里 $\tau_n = \inf\{t, |\xi_t| \geq n\}$), 而且 (ξ_t) 在 $(\zeta - \epsilon, \zeta)$ 上几乎处处无界.)

21　5 月 28 日 (有答案提示)

1. 请写出 OU 方程，Black-Scholes 方程和随机调和振子的 Kolmogorov 向前，向后方程。

   答案提示：套公式计算.

2. 设 $(\xi_t)_{t\geq 0}$ 是一个 2-维扩散过程，

   $$d\xi_t = \mathbf{b}(t,\xi_t)dt + \Sigma(t,\xi_t)d\mathbf{B}_t,$$

   其中

   $$\mathbf{b}(t,x) = \begin{pmatrix} b_1(t,x) \\ b_2(t,x) \end{pmatrix}, \qquad \Sigma(t,x) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t,x) & \sigma_{12}(t,x) \\ \sigma_{21}(t,x) & \sigma_{22}(t,x) \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

   请形式的推导 ξ_t 应该满足的 Kolmogorov 向前，向后方程。

   答案提示：按照讲义上一维时的方法计算.

3. (主要参考书第 163 页第 2 题)
   假定 $u(t,x)$ 满足向后方程

   $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

   证明: $Eu(t,B_t) = u(0,0)$.

   答案提示：此题应该设 B_t 是标准布朗运动，对 $u(t,B_t)$ 利用 Itô 公式，并证明 $E\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x}(s,B_s)dB_s = 0$(证明可参见下题).

4. (主要参考书第 164 页第 4 题)
   求一维终值问题

   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(T,x) = f(x) \end{cases}$$

   的解 $u(t,x)$, $0 \leq t \leq T$, 再将结果推广至多维。

   答案提示：设 $p(t,x,y)$ 是 n-维布朗运动的转移密度, 设 $u(t,x) = E[f(B_{T-t})|B_0 = x] = \int f(y)p(T-t,x,y)$. 可以直接验证（假设积分号求导可以交换顺序）.

22　6 月 4 日 (有答案提示)

1. 设 n-维扩散过程 $(\xi_t)_{t\geq 0}$ 满足

$$d\xi_t = \mathbf{b}(\xi_t)dt + \Sigma(\xi_t)d\mathbf{B}_t, \quad (a_{ij}) = \Sigma\Sigma^T.$$

$f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $q(x)$ 连续有下界。设

$$v(t,x) = E\Big[\exp\Big(-\int_0^t q(\xi_s)ds\Big)f(\xi_t)\Big|\xi_0 = x\Big].$$

若已经验证 $v(t+\Delta,x) = E\Big[\exp\Big(-\int_0^\Delta q(\xi_s)ds\Big)v(t,\xi_\Delta)\Big|\xi_0 = x\Big]$。形式地证明：

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\big[v(t+\Delta,x) - v(t,x)\big]\\ =\ &\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}(t,x) + \sum_{i=1}^j b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(t,x) - q(x)v(t,x).\end{aligned}$$

答案提示：上课时已经计算，再简要提示：利用上式可以计算出

$$v(t+\Delta,x) = E[e^{-\int_0^\Delta q(\xi_s)ds}v(t,\xi_\Delta)|\xi_0 = x].$$

假设求导与积分可以交换，直接计算。

2. 设 $\mathbf{B}_t$ 是 n 维布朗运动，$B(0,R) = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$. 设 $x\in\mathbb{R}^n$, $\tau_x = \inf\{t > 0, \mathbf{B}_0 = x, \mathbf{B}_t \notin B(0,R)\}$. 求 B_{τ_x} 的分布。

   答案提示：可以参考周蜀林老师编著的《偏微分方程》(北大出版社) 第 50-53 页的内容.

   参看主要参考书第 158 页问题 1(定理 7.14) 和问题 2(定理 7.15), 再求解定理 7.15 中的偏微分方程. 这个偏微分方程的显式解可以用球面上的 Poisson 核表示出来，这就是周老师书上第 53 页的定理 2.18.

23　6 月 8 日 (有答案提示)

1. 设 n-维扩散过程 $(\xi_t)_{t\geq 0}$ 满足

$$d\xi_t = \mathbf{b}(t,\xi_t)dt + \Sigma(t,\xi_t)d\mathbf{B}_t.$$

设 $\mathcal{L}_t = \frac{1}{2}\sum_{ij}^n a_{ij}(t,\mathbf{x})\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i}$, $(a_{ij}) = \Sigma\Sigma^T$. 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开区域。若方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}_t u = 0, & \mathbf{x}\in D, \quad t\leq T, \\ u(T,\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x}\in D \\ u(t,\mathbf{x}) = 1, & \mathbf{x}\in \partial D, \quad s\leq t\leq T \end{cases},$$

有对 t 一次连续可微，对 $\mathbf{x}$ 二次连续可微的唯一解。记 $u_T(t,\mathbf{x})$，$\tau_{\mathbf{x}} = \inf\{t>0,\ \xi_t^{\mathbf{x}}\notin D\}$, $\mathbf{x}\in D$. 证明:

$$P(\tau_x < T) = u_T(s,\mathbf{x}).$$

答案提示：参看主要参考书第 156-157 页问题 2(定理 7.13) 及其证明以及第 157 页的注

2. 设

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t,\ r>0.$$

$f(x)$ 连续有界, 对于任意的 $t<T$, 设

$$v(t,x) = E\big[f(S_T)e^{-r(T-t)}\big|S_t = x\big].$$

利用非齐次扩散过程的 Feynman-Kac 公式写出 $v(t,x)$ 应该满足的偏微分方程, 以及 $V(T,S_T)$ 的值. 利用 $(S_t)_{t\geq 0}$ 的显式解, 写出 $v(t,x)$ 的显式表达式.

答案提示：$v(t,x)$ 应该满足的 PDE:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx\frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0 \\ v(T,x) = f(x) \end{cases},$$

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f\big(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}}z\big)e^{\frac{-z^2}{2}}dz.$$

$$V(T,S_T) = f(S_T).$$