2019 年北京市西城区高三期末数学（文科）逐题解析

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{x\,|\,x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$， $B=\{x\,|\,x^2\le 5\}$，那么 $A\cap B=$

A. $\{0,2,4\}$　　B. $\{-2,0,2\}$

C. $\{0,2\}$　　D. $\{-2,2\}$

【答案】B

【解析】因为 $B=\{x\,|\,x^2\le 5\}=\{x\,|-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}\}$，集合 A 中元素为偶数，所以 $A\cap B=\{-2,0,2\}$，故选 B.

2.下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=x^2+2x$　　B. $y=x^3$

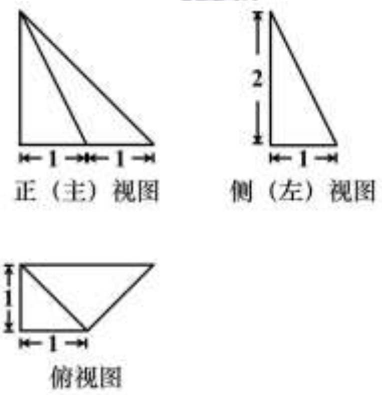
C. $y=\ln|x|$　　D. $y=\cos x$

【答案】C

【解析】A 和 B 不满足偶函数，D 选项 $y=\cos x$ 不满足在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故选 C.

3.一个四棱锥的三视图如图所示，

那么这个四棱锥最长棱的棱长为



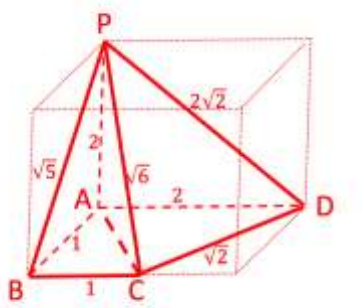
A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{10}$

【答案】C

【解析】由图知 PD 为最长棱，

且 $PD=2\sqrt{2}$，故选 C.

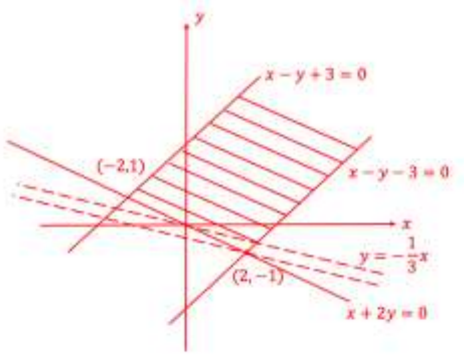


4.设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+3\geq 0, \\ x-y-3\leq 0, \\ x+2y\geq 0, \end{cases}$ 则 $z=x+3y$ 的最小值为

A. -1　　B. -2　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【解析】可行域如图所示，



最小值为直线 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{z}{3}$ 截距最小值的 3 倍，

当其过点 $(2,-1)$ 时，截距最小，

可知此时 $z=-1$，故选 A.

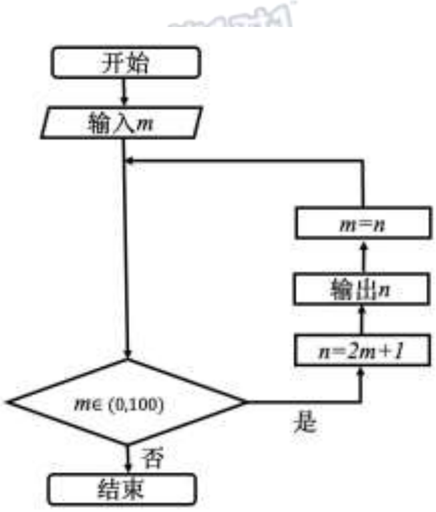
5.执行如图所示的程序框图，若输入的 $m=1$，则输出数据的总个数为

A.5

B.6

C.7

D.8



【答案】B

【解析】

（1）$m=1, m\in(0,100)$ 是，输出 $n=3, m=n=3$；

（2）$m=3, m\in(0,100)$ 是，输出 $n=7, m=n=7$；

（3）$m=7, m\in(0,100)$ 是，输出 $n=15, m=n=15$；

（4）$m=15, m\in(0,100)$ 是，输出 $n=31, m=n=31$；

（5）$m=31, m\in(0,100)$ 是，输出 $n=63, m=n=63$；

（6）$m=63, m\in(0,100)$ 是，输出 $n=127, m=n=127$；

（7）$m=127, m\in(0,100)$ 否 $\rightarrow$ 结束，所以输出数据总个数为 6，故选 B.

6.在等比数列$\{a_n\}$中，“$a_2>a_1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

等比数列$a_2>a_1$，当$a_1<0,q<0$时，$a_2>0>a_1$，

此时$\{a_n\}$为摆动数列，故“$a_2>a_1$”不是“$\{a_n\}$为递增数列”的充分条件.

$\{a_n\}$递增$\Rightarrow a_2>a_1$，故“$a_2>a_1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的必要条件.

因此为必要而不充分条件，故选 B.

7.设$\vec{a},\vec{b}$是不共线的两个平面向量，已知$\overrightarrow{PQ}=\vec{a}+k\vec{b},\overrightarrow{QR}=2\vec{a}-\vec{b}$，若$P,Q,R$三点共线，则实数$k$的值为

A. 2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】$\because P,Q,R$三点共线，$\therefore$存在唯一的实数λ使得$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{QR}$，

即$\vec{a}+k\vec{b}=\lambda(2\vec{a}-\vec{b})=2\lambda\vec{a}-\lambda\vec{b}$，$\therefore\begin{cases}2\lambda=1\\-\lambda=k\end{cases}$，解得$k=-\frac{1}{2}$，故选 D.

8.设双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左焦点为F，右顶点为A.若在双曲线C上，有且只有3个不同的点P使得$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PA}=\lambda$成立，则$\lambda=$

A. -2　　B. -1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 0

【答案】D

【解析】设 $P(x,y)$，

由 $F(-2,0)$， $A(1,0)$，得 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PA}=(-2-x,-y)\cdot(1-x,-y)=\lambda$，

即 $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\lambda+\frac{9}{4}$，

所以点 P 在“以点 $(-\frac{1}{2},0)$ 为圆心，半径 $r=\sqrt{\lambda+\frac{9}{4}}$ ”的圆 W 上，

又因为点 P 在双曲线 C 上，

有且只有 3 个交点，所以此圆过双曲线右顶点，

即半径 $r=\sqrt{\lambda+\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$，

所以 $\lambda=0$，故选 D.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 复数 z 满足方程 $1-i\cdot z=i$，则 $z=$______.

【答案】 $z=-1-i$

【解析】左右同乘 i 后， $i-i^2z=i^2$ 即 $i+z=-1$，所以 $z=-1-i$.

10. 以抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为圆心，且与直线 $y=x$ 相切的圆的方程为______.

【答案】 $(x-2)^2+y^2=2$

【解析】$y^2=8x$ 焦点为 $(2,0)$，设 $(x-2)^2+y^2=r^2$ ，切线 $y=x$ 到圆心的距离为 r.

所以 $r=\frac{|2-0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，即 $(x-2)^2+y^2=2$.

11. 能说明“设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 是奇函数”为假命题的一个函数是______.

【答案】$f(x)=x^2$（答案不唯一）

【解析】只需找出一个满足 $f(0)=0$ 的函数 $y=f(x)$ 不是奇函数即可. 故 $f(x)=x^2$（答案不唯一）.

12．在 $\triangle ABC$ 中，$a=3,b=2\sqrt{6},B=2A$，则 $\cos A=$______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

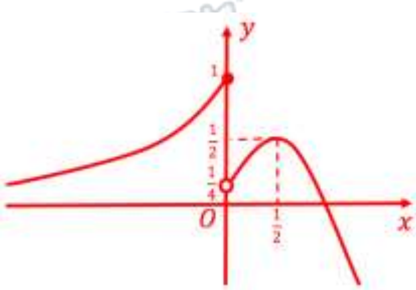
【解析】$\because B=2A$，$\therefore \sin B=\sin 2A=2\sin A\cos A$，$a=3,b=2\sqrt{6}$

由正弦定理可知，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{b}{2\sin A\cos A}$，$\therefore \cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

13.设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\le 0 \\ -x^2+x+\dfrac{1}{4}, x>0 \end{cases}$，则 $f[f(0)]=$______；若方程 $f(x)=b$ 有且仅有3个不同的实数根，则实数 b 的取值范围是______.

【答案】$\dfrac{1}{4}$，$(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$

【解析】$f[f(0)]=f(1)=\dfrac{1}{4}$.



当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f(x)\in(0,1]$，

当 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f(x)\in(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$，

当 $x\in[\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递减，$f(x)\in(-\infty,\dfrac{1}{2}]$，

函数 $f(x)$ 图象如右图所示，$f(x)=b$ 有且仅有3个不同的实数根，

即 $y=f(x)$ 与 $y=b$ 有三个不同的交点，$\therefore b\in(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$.

14.在某次国际交流活动中，组织者在某天上午安排了六场专家报告（时间如下，转场时间忽略不计），并要求听报告者不能迟到和早退.

报告名称	A	B	C	D	E	F
开始时间	8:00	8:10	8:45	8:40	9:15	9:25
结束时间	8:30	9:05	9:20	9:30	10:10	10:10

某单位派甲、乙两人参会，为了获得更多的信息，单位要求甲、乙两人所听报告不相同，且所听报告的总时间尽可能长，那么甲、乙两人应该舍去的报告名称为________.

【答案】D

【解析】经观察 D 段与其它段重复最多，若一个人去参加 D 段，则此人只能参加 AD 两个报告，此人的时间为80分钟，此时另一人则最多只能参加 BE 两会议，时间为110分钟，二人最大总和190分钟。若舍弃 D 段，则一人参加 ACF 报告，另一人参加 BE 报告，每个人时间都为110分钟，总和220分钟，实现了参会时间最长的目的，故应舍弃 D.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答题写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos x\sin(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）若直线 $x=\pi$ 为函数 $f(x+a)$ 图象的一条对称轴，求实数 a 的值.

【解析】

（I）因为 $f(x)=2\cos x(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\cos x\sin x+\sqrt{3}\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$.

（II）由（I）知，$f(x+a)=\sin(2x+2a+\frac{\pi}{3})$，

因为直线 $x=\pi$ 为函数 $f(x+a)$ 图象的一条对称轴，

所以 $f(\pi+a)$ 为函数 $f(x+a)$ 的最大值或最小值，

即 $f(\pi+a)=\sin(2\pi+2a+\frac{\pi}{3})=\sin(2a+\frac{\pi}{3})=\pm1$，

所以 $2a+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$， 其中 $k\in\mathbf{Z}$，

解得 $a=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$.

16.（本小题 13 分）

在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，$a_2=\frac{1}{4}$，且$a_4+a_5=6a_3$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）设数列$\{\log_2 a_n\}$的前n项和为S_n，求S_n的最小值.

【解析】

（I）设数列$\{a_n\}$的公比为q，

由$a_4+a_5=6a_3$，得$a_1q^3+a_1q^4=6a_1q^2$，

又因为$a_1\neq 0$，$q\neq 0$，所以$q^2+q-6=0$，

解得$q=-3$（舍），或$q=2$，

由$a_2=a_1q=\frac{1}{4}$，得$a_1=\frac{1}{8}$，

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-4}$.

（II）设$b_n=\log_2 a_n$，则$b_n=\log_2 2^{n-4}=n-4$，

所以$\{b_n\}$是首项为-3，公差为 1 的等差数列.

故当$n<4$时，$b_n<0$；当$n=4$时，$b_n=0$；当$n>4$时，$b_n>0$.

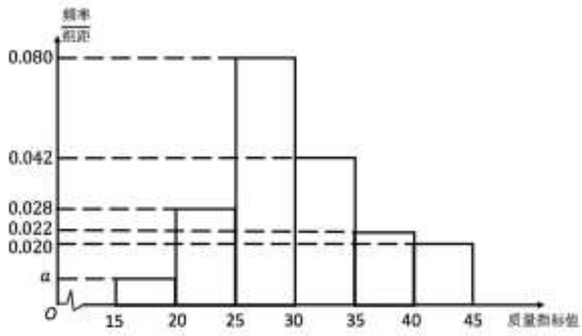
所以$n=3$或4时，S_n取到最小值$S_3=S_4=-6$.

17．（本小题 13 分）

为保障食品安全，某地食品监管部门对辖区内甲、乙两家食品企业进行检查，分别从这两家企业生产的某种同类产品中随机抽取了 100 件作为样本，并以样本的一项关键质量指标值为检测依据.已知该质量指标值对应的产品等级如下：

质量指标值	[15，20)	[20，25)	[25，30)	[30，35)	[35，40)	[40，45]
等级	次品	二等品	一等品	二等品	三等品	次品

根据质量指标值的分组，统计得到了甲企业的样本频率分布直方图和乙企业的样本频率分布表（图表如下，其中 $a>0$）.



甲企业

质量指标值	频数
[15，20)	2
[20，25)	18
[25，30)	48
[30，35)	14
[35，40)	16
[40，45]	2
合计	100

乙企业

（I）现从甲企业生产的产品中任取一件，试估计该件产品为次品的概率；

（II）为守法经营、提高利润，乙企业开展次品生产原因调查活动. 已知乙企业从样本里的次品中随机抽取了两件进行分析，求这两件次品中恰有一件指标值属于 $[40,45]$ 的产品的概率；

（III）根据图表数据，请自定标准，对甲，乙两企业食品质量的优劣情况进行比较.

【解析】

（Ⅰ）由 $(a+0.020+0.022+0.028+0.042+0.080)\times5=1$， 得 $a=0.008$，

则甲企业抽样的次品频率为 $(0.008+0.020)\times5=0.14$，

由频率估计概率，所以从甲企业生产的产品中任取一件产品为次品的概率为 0.14.

（II）记“从乙企业样本里的次品中任取两件产品，恰有一件产品是指标值属于 $[40,45]$ 的产品”为事件 M.

记质量指标值在 $[15,20)$ 内的 2 件产品样本分别为 A_1、A_2，质量指标值在 $[40,45]$ 内的 2 件产品样本分别为 B_1、B_2，

则从乙企业样本里的次品中任取两件产品，所有可能结果有 6 种，

即（A_1，A_2），（A_1，B_1），（A_1，B_2），（A_2，B_1），（A_2，B_2），（B_1，B_2），

事件 M 的结果有 4 种，是（A_1，B_1），（A_1，B_2），（A_2，B_1），（A_2，B_2），

所以 $P(M)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

即从乙企业样本里的次品中任取两件产品，恰有一件产品是指标值属于 $[40,45]$ 的产品的概率为 $\frac{2}{3}$.

（III）（标准不同，答案不唯一）

标准：次品率越高，企业越差.

由图表知，甲企业次品率为 0.14，乙企业次品率为 $\frac{2+2}{100}=0.04$，

因为 $0.14>0.04$，所以乙企业生产的食品质量要优于甲企业生产的食品质量.

18.（本小题 14 分）

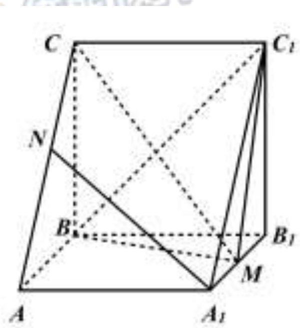
如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 B_1BCC_1 为正方形，M,N 分别是 A_1B_1，AC 的中点，$AB\perp$ 平面 BCM .

（I）求证：平面 $B_1BCC_1\perp$ 平面 A_1ABB_1；

（II）求证：$A_1N//$ 平面 BCM；

（III）若三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 10，求棱锥 C_1-BB_1M 的体积.

【解析】



（I）证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为侧面 B_1BCC_1 为正方形，

所以 $BC\perp BB_1$，

因为 $AB\perp$ 面 BCM， $BC\subset$ 面 BCM， 所以 $AB\perp BC$，

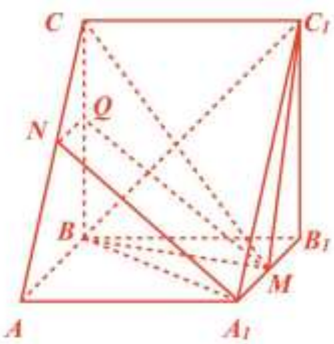
又因为 $BB_1\subset$ 面 A_1AB_1B， $AB\subset$ 面 A_1AB_1B， $BB_1\cap AB=B$，

所以 $BC\perp$ 面 A_1AB_1B，

又因为 $BC\subset$ 面 B_1BCC_1， 所以面 $B_1BCC_1\perp$ 面 A_1ABB_1.

（II）设 BC 中点为 Q， 连接 NQ,MQ，

由 Q,N 分别是 BC,AC 的中点， 得 $NQ//AB$， 且 $NQ=\frac{1}{2}AB$.



又因为 $AB//A_1B_1$，且 $AB=A_1B_1$，

所以 $NQ//A_1M$，且 $NQ=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}A_1B_1=A_1M$，

所以四边形 A_1MQN 为平行四边形，

所以 $A_1N//MQ$.

又因为 $MQ\subset$ 面 BCM， $A_1N\not\subset$ 面 BCM，

所以 $A_1N//$ 面 BCM.

（III）连接A_1B，根据棱柱和棱锥的体积公式，

得三棱锥$B-A_1B_1C_1$的体积$V_{B-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{10}{3}$，

又因为M为A_1B_1的中点，

所以棱锥$V_{C_1-BB_1M}=V_{B-C_1B_1M}=\frac{1}{2}V_{B-A_1B_1C_1}=\frac{5}{3}$.

19.（本小题 14 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，左、右顶点分别为$A,B$，点$M$是椭圆$C$上异于$A,B$的一点，直线$AM$与$y$轴交于点$P$.

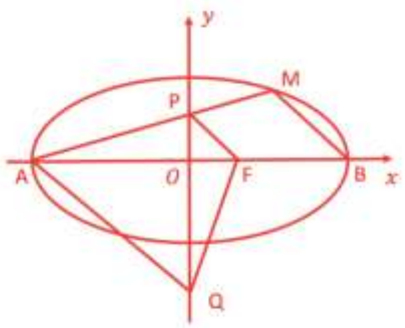
（I）若点P在椭圆C的内部，求直线AM的斜率的取值范围；

（II）设椭圆C的右焦点为F，点Q在y轴上，且$\angle PFQ=90°$，求证：$AQ//BM$.

【解析】

（Ⅰ）由$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b^2=a^2-c^2=2$，解得$a=2$，

故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.



由题意得直线AP的斜率存在，$A(-2,0)$，

故设直线$AP:y=k(x+2)$，

令$x=0$，得$y_P=2k$，

$\because P$在椭圆C的内部，$\therefore -\sqrt{2}<y_P<\sqrt{2}$，即$-\sqrt{2}<2k<\sqrt{2}$，

又$\because M$为异于A,B的一点，$\therefore k\in(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

（Ⅱ）由题意，直线BM的斜率存在且不为0，

故设直线$BM:y=k(x-2)$.

联立$\begin{cases}x^2+2y^2-4=0\\y=k(x-2)\end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2-8k^2x+8k^2-4=0$，

设$M(x_1,y_1)$，则$x_1\cdot 2=\dfrac{8k^2-4}{2k^2+1}$，$\therefore x_1=\dfrac{4k^2-2}{2k^2+1}$，

$\therefore y_1=k(x_1-2)=\dfrac{-4k}{2k^2+1}$，则$M(\dfrac{4k^2-2}{2k^2+1},\dfrac{-4k}{2k^2+1})$.

$\therefore k_{AM}=\dfrac{\dfrac{-4k}{2k^2+1}}{\dfrac{4k^2-2}{2k^2+1}+2}=-\dfrac{1}{2k}$，

$\because A(-2,0)$，$\therefore$ 直线 AM 方程为 $y=-\dfrac{1}{2k}(x+2)$，

令 $x=0$，得 $y=-\dfrac{1}{k}$，$\therefore P(0,-\dfrac{1}{k})$.

设 $Q(0,m)$，由 $F(\sqrt{2},0)$，得 $\overrightarrow{FP}(-\sqrt{2},-\dfrac{1}{k})$，$\overrightarrow{FQ}(-\sqrt{2},m)$.

$\because \angle PFQ=90^\circ$，$\therefore \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=(-\sqrt{2})^2+(-\dfrac{1}{k})\cdot m=0$，解得 $m=2k$.

$\therefore k_{AQ}=\dfrac{2k-0}{0+2}=k=k_{BM}$，

$\therefore AQ//BM$.

20.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-x+a$，其中 $a\in R$.

（I）如果曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，求 a 的值；

（II）若 $a=\ln 2e$，证明：$f(x)\le x$；

（III）如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上不是单调函数，求 a 的取值范围.

【解析】

（I）求导，得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

因为曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，所以此切线的斜率为 0，

由 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，

又由曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴相切，得 $f(1)=-1+a=0$，

解得 $a=1$.

（II）由题意，$f(x)=\ln x-x+\ln 2e$，

令函数 $F(x)=f(x)-x=\ln x-2x+\ln 2e$，

求导，得 $F'(x)=\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1-2x}{x}$，

由 $F'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{2}$.

当 x 变化时，$F'(x)$ 与 $F(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$F'(x)$	+	0	−
$F(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $F(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上单调递增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上单调递减，

故当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$F(x)_{\max}=F(\frac{1}{2})=\ln\frac{1}{2}-1+\ln 2e=0$，

所以任给 $x\in(0,+\infty)$，$F(x)=f(x)-x\le 0$，即 $f(x)\le x$.

（III）由题意，得 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}=\frac{\ln x-x+a}{x^2}$，

求导，得 $g'(x)=\frac{x-2\ln x+1-2a}{x^3}$.

因为 $x\in(1,e)$，所以 $g'(x)$ 与 $h(x)=x-2\ln x+1-2a$ 的正负号相同.

对 $h(x)$ 求导，得 $h'(x)=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$，

由 $h'(x)=0$，解得 $x=2$.

当 x 变化时，$h'(x)$ 与 $h(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(1,2)$	2	$(2,e)$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	极小值	↗

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，在 $(2,e)$ 上单调递增.

又因为 $h(1)=2-2a$，$h(e)=e-1-2a$，

所以 $h(x)_{\min}=h(2)=3-2\ln 2-2a$；$h(x)_{\max}=h(1)=2-2a$.

如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增，则当 $x\in(1,e)$ 时，$g'(x)\ge 0$. 所以 $h(x)\ge 0$ 在区间 $(1,e)$ 上恒成立，即 $h(x)_{\min}=h(2)=3-2\ln 2-2a\ge 0$.

解得 $a\le\dfrac{3}{2}-\ln 2$，且当 $a=\dfrac{3}{2}-\ln 2$ 时，$g'(x)=0$ 的解有有限个.

即当函数 $g(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递增时，$a\le\dfrac{3}{2}-\ln 2$；①

如果函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递减，则当 $x\in(1,e)$ 时，$g'(x)\le 0$，

所以 $h(x)\le 0$ 在区间 $(1,e)$ 上恒成立，即 $h(x)_{\max}=h(1)=2-2a\le 0$，

解得 $a\ge 1$，且当 $a=1$ 时，$g'(x)=0$ 的解有有限个，

所以当函数 $g(x)$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递减时，$a\ge 1$. ②

因为函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ 在区间 $(1,e)$ 上不是单调函数，

结合①②，可得 $\dfrac{3}{2}-\ln 2<a<1$，

所以实数 a 的取值范围是 $\dfrac{3}{2}-\ln 2<a<1$.