

HPM 通訊

第十一卷 第一期 目錄 (2008年元月)

發行人：洪萬生 (台灣師大數學系教授)
 主編：蘇惠玉 (西松高中) 副主編：林倉億 (家齊女中)
 助理編輯：李建勳、黃俊瑋 (台灣師大數學所研究生)
 編輯小組：蘇意雯 (成功高中) 蘇俊鴻 (北一女中)
 黃清揚 (福和國中) 葉吉海 (新竹高中)
 陳彥宏 (成功高中) 陳啓文 (中山女高)
 王文珮 (青溪國中) 黃哲男 (台南女中)
 英家銘 (台師大數學系) 謝佳叡 (台師大數學系)
 創刊日：1998年10月5日 每月5日出刊
 網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng>

- 《HPM 通訊》快滿十歲了
- 奎章閣記事
- 單設法及其演變

《HPM 通訊》快滿十歲了

洪萬生
 台灣師範大學數學系

時間過得真快！《HPM 通訊》已經發行將近十年了。這幾年來，我的周遭有非常多的人事地物之變化，然而，這一刊物至少證明了很多數學教師的理想與熱情，是滄海桑田中值得永遠珍惜的不變因子。

這一本集子（編按：即《HPM 十年風華》選輯）編選了過去將近十年內，曾經在《HPM 通訊》刊登過的文章，共計 45 篇，總字數達 30 萬之譜。其主題則遍及數學史、數學哲學與美學、HPM 與一般的數學教育等議題、中學數學教學之反思，以及數學科普書籍之推介與評論。整體看起來，這是數學教育的兩個面向－認知與歷史文化－之結合所產生的理論與實踐之動量，讓我們無法輕忽待之。我們竭誠地歡迎專家學者與數學教師的參與和指教。

所謂 HPM (International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics)，是指隸屬於國際數學教育委員會 (ICMI) 的一個研究群，專門推動數學史與數學教學之關聯的研究與教學。其實，如果我們將 HPM 視為一個學門，那麼，它就是數學史學對數學教育的一種應用，目的當然是利用數學史的研究成果、以及數學史與數學教育的互動，來提升數學教師的教學品質與學生的學習成效。

一九九六年七月下旬，我接受 HPM 主席 John Fauvel (任期 1992-1996，英國數學史家) 邀請，前往葡萄牙 Braga 城的 Minho 大學參加 "HPM 96 Braga"。這是我平生第一次參加這一類的國際學術活動，沒想到他與 Jan van Maanen (1996-2000 主席) 竟然邀請我承辦 "HPM 2000 Taipei"。這是由於第九屆國際數學教育會議 (ICME-9) 2000 年 8 月初預定在日本召開，因此，作為 ICME 的衛星會議之一的 HPM-9，選在鄰近國家舉行，是一個方便可行的策略。這也是為什麼 John Fauvel 與 Jan van Maanen (荷蘭數學史家) 從一開始就徵詢我承辦 HPM-9 意願的原因之一。他們兩位當然也考慮過其他國家或地區如中國、香港及南韓，但最後還是敲定台灣。我想我們三位都是專業的數學史家，或許同行的親切感可以超越其他的因素考量吧。

說起我與 HPM 的因緣，可以追溯到國科會科教處贊助我兩年獎學金，到紐約城市大學攻讀科 / 數學史博士學位。我依稀還記得我當時所撰寫的申請書，就是一個 HPM 的粗胚計畫。事實上，從 1980 年初我打算改行攻讀數學史，就一直注意 HPM 的相關議題—HPM 研究群是 ICMI 最早研究群，創立於 1972 年。正如大部分人的經驗吧，我年少時所參與的數學知識活動，總是缺乏人文歷史的意義與維度。後來，我決定獻身數學史研究，或多或少是相信我自己遲早可以回餽到數學教育這一邊來。可惜，1988 年從紐約返國後，立即全心投入數學社會史 (social history of mathematics) 的專題探討，始終無法隨便分心。直到 1996 年夏天遠赴葡萄牙，才正式地與 HPM 接上線。

不過，這一個與國際學界的接軌，還是多虧了國科會的大力支持。顯然是由於我決定承辦“HPM 2000 Taipei”，所以，科教處在林福來教授的大力推薦下，贊助我執行一個兩年期的特別研究計畫，讓我可以一方面訓練本土的 HPM 團隊，另一方面，也有一點起碼的基金，進行 HPM 的推動工作。其實，這一筆計畫經費就包括了一年的編輯印刷經費（稿費不在項目之內），也就是說，《HPM 通訊》的創辦費就是由國科會所贊助。當然，它能夠支撐到現在，也算是數學教育界的一個異數！我想一開始我們的願景就非常謙卑—以最樸拙的方式站在數學（教育）社群角落，希望它可以存活至少 20 年！現在看起來，我們似乎可以樂觀地預期：它可以再活另一個十年。屆時它將是一個 20 歲的年輕人，自立自強當然就不在話下了。

然則《HPM 通訊》的利基 (niche) 又是什麼呢？除了一路陪伴的貴人之外，我想我在〈發刊詞〉中所揭示的願景，應該是相當務實的策略：

本刊當然肩負著推動或促進 HPM 研究活動的使命。儘管如此，我們對於打算現身本刊的稿件，卻不設定所謂的「學術」門檻。撰稿者只要針對 HPM 或數學教育等議題，順手拈來，但求文句通順、語氣平和即可。這是專屬於數學教師的園地，大家儘可抒懷、敘事與詠物，不過，也請切記：如果有意月旦人物，則只能針對歷史上的數學家！我們無意標榜溫文儒雅，但是凡事自在，卻必須以不惹人是非為妙。

誠然，很多中學教師的習作儘管樸實無華，但卻包裝了非常紮實的內涵，十足雋永，令人回味無窮。現在，我們將這些作品獻給在第一線打拼的數學老師，作為 2008 的新年賀禮。希望大家的喜愛與回饋，可以讓我們分享，藉以豐富我們明年即將舉辦的 100 期慶祝活動。當然，這種因緣，還真是誠摯地感謝建中吳武雄校長的數學教育願景，以及數學學科中心同仁的牽線與付出。正是由於他們的體貼與週到，我們 HPM 團隊才得以從容地分享數學知識的價值與意義！

最後，請容許我改寫上引〈發刊詞〉中的最後一句話，來歡送這十年風華走到你（妳）的身邊：

總之，面對《HPM 通訊》選集，態度不妨嚴肅，心情且放輕鬆。讓我們開始暖身，一起進入 HPM 的天地之中。

真的，嘗試著讀讀看，說不定妳（你）會喜歡！

編按：本文原為《HPM 十年風華》選輯序文，特轉載於此。

奎章閣記事¹

洪萬生

台灣師範大學數學系

前言

這是我平生第一次訪問韓國，為期前後五天。2007 年 12 月 2 日下午抵達仁川國際機場後，直接趕搭計程車，住進首爾大學湖巖會館 (Haom Faculty House)。

此次訪問，主要接受奎章閣韓國學研究院院長金永植 (Kim Yung Sik) 教授之邀約，前來訪查這一研究機構從奎章閣 (朝鮮李朝皇宮圖書館) 所接收之算學古籍文本。本來，他打算要我發表一個有關韓國數學史之演講，由於我在週五前必須趕回台北，只好留待下次再說了。

有關奎章閣，曾經研究過韓國數學史 (東算史) 的本系所研究生一點都不陌生，他們完全不諳韓文，卻能利用搜尋引擎，進入它的網站提取所需資料 (譬如《經國大典》)，真是令人稱奇。他們的碩士論文 (總計十五篇，參看本文附錄)，是我這次帶來首爾的最佳伴手禮，相信 HPM 團隊成員都與有榮焉。

至於東算 (tongsan) 史為甚麼值得研究？從數學的在地性或脈絡性 (mathematics in context) 來看，這顯然是個多餘的問題，讀者或願參考拙文〈東算史研究與歷史論述之主題性〉。其實，韓國科學史家 Jeon Sang-woon 也有極貼近的論述，請看以下的引文：

Korean traditional science and technology is the melting pot of East Asian science. The Koreans create their own characteristic pattern by melting together the contexts of East Asian science, technology, idea and philosophy in their own crucible. So the Koreans, who have been active in a small peninsula to the north-east of the huge Chinese continent, gave significant influence to Chinese science and technology with their own model. However, this solemn fact has never been acknowledged by any scholar till recently. During the Sejong era of the fifteenth century in particular, Korean science and technology had reached its climax, thus its accomplishments could reveal themselves clearly in the history of world civilization, let alone of East Asian civilization.

同時，基於古代韓國科學技術成就與東亞地區的不可分離，他也相信：

[I]t is impossible to understand Chinese traditional science properly without exploring Korean and Japanese traditional science deeply. Therefore, we should appreciate fully Korean and Japanese scientific creativity and their accomplishments in history which appears on the scene of East Asian science.

其他科學史家如金永植教授，也在討論所謂的“the Problem of China”時，提出類似的看

¹ 本文是在筆者訪問奎章閣朝鮮學研究院的三天日記增補而成。此一訪問得以圓滿完成，必須特別感謝金永植教授的盛情邀約與接待。此外，筆者也得到國科會的贊助 (計畫編號：NSC 96-2511-S-003-021-)，謹此註記。又，本文定稿前獲得中研院文哲所楊晉龍副所長惠賜有關中國明代《算法統宗》之相關研究文獻，謹此申謝。另外，也感謝許進發協助搜尋文獻。

法：

[T]he problem of China is about the significance of the Chinese scientific ideas and technical artifacts that are apparently omnipresent in traditional Korean science and technology. What roles and meanings should be assigned to them in the history of Korean science? Would it be permissible for a historian of Korean science to neglect them and study only what is uniquely Korean? What should the historian do with those ideas and techniques that were straight importations from China? In other words, how should be the historian deal with theories and practices that were exactly the same as those of China except for the fact that they were discussed and carried out in Korea?

誠然，所謂的「中國問題」也是研究東算史所無法迴避的問題，而我們HPM團隊的研究成果，²則顯然作了極清楚的回應，請參考拙文及本文附錄所列之十五篇碩士論文。

十二月三日

晨起，天氣頗冷，大約已經降到攝氏零度以下，幸好芳玫幾年前訪問韓國釜山時，為我買了一件毛衣外套，穿在身上，甚能保暖。

今天在朴權壽 (Kwon Soo Park) 博士的陪同下，訪問奎章閣韓國學研究院 (Kyujanggak Institute for Korean Studies)，先是參觀他們的文物展覽，再進入檔案館查訪資料。結果，我發現了兩部未曾被研究過的算書文本，其一為《影數初學法》，另一則為《東國算書》(收藏章有農商工部商易局度量衡課部印)。看起來都是為初學者而寫(兩本都是寫本)，譬如它們的開宗明義都是〈九歸除法〉，不過，前者卻顯得深刻多了。其對比彷彿傳入韓國的中算書籍《算學啓蒙》vs.《詳明算法》，非常值得研究，可惜，兩書之作者都未詳。

有關中算典籍的收藏方面，有兩本與中國明代徐光啓有關。其中，《幾何原本》(利瑪竇、徐光啓合譯)前三卷(分裝兩冊)的文本，係由不知名的抄寫者所摹寫，尤其徐光啓序文的書法，臨摹得十分神似，相當有趣。再有，由掃葉山房所編輯出版的《中西算學四種》，其中收集了徐光啓的著譯集四種—《勾股義》、《測量異同》、《測量法義》及《圓容較義》，竟然在首頁出現「李善蘭先生校正」之字樣，此一有關李善蘭(1811-1882)之史料迄今首見，有待釐清與理解，可惜，複本還無法取得，只好俟諸來日了。此外，還有一本潘逢禧所撰述的《算學發蒙》，按本書作者是清代舉人，他在光緒七年(1882)完成本書，內容包括珠算、筆算、納丕爾籌算(Napier bones)、尺算等單元。其中筆算、籌算、尺算各卷，以梅文鼎的《曆算全書》有關內容為藍本，參以各家之說而編成。在珠算五卷中，他注重指法練習，對四種乘法均附有圖解說明，並進一步指出其優缺點，此外，本書還附有梁上三珠、梁下五珠的算盤圖。在〈珠算事略〉一節中，他則推斷算盤起源於宋代，從而否定了梅文鼎的算盤起源於元末明初之說，這是頗為獨到的見地。

² 所謂HPM團隊，是指《HPM通訊》(<http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng>)的駐校聯絡員，這一期刊是以推動數學史如何融入數學教學為職志。本來，HPM專指International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics。現在，它也代表前述之學術活動。

中午，由金永植教授作東，我們三人在校內餐廳享用日本料理，³風味極佳。不過，首爾的物價比台北高，一定讓他破費不少。

下午，我繼續留在檔案館查閱文本，看看有沒有新的發現。結果，發現忠南大學校圖書館藏有似乎是由安鍾和 (1860-1924) 所撰寫的《數學正徑節要括集》(1882)，以及李相說的《新訂算術》(1901)，其中國、漢文互用，將來或有希望一睹為快。

另一方面，我倒是重溫了洪大容的《湛軒書》，希望有機會盡快與洪宜亭合作（她的碩士論文即以洪大容為主題），深入研究洪大容的儒學與數學。此外，李瀛（字星湖，1681-1763）在他的《星湖僊說》中，⁴也引用了徐光啓之〈幾何原本雜議〉，作為鼓勵學生數學學習之修辭，而非訴諸中國傳統數學的說法，值得引述如下：

徐光啟有言曰：算學能令學理者，祛其浮氣，練其精心。學事者，資其定法，發其巧思。蓋欲其心思細密而已。此說極是。始學童幼，心志浮動，不在於書卷，且誨之算術，渠亦樂從，因以安定。習於究索，故亦能身喻經義，每試之果驗。

針對這一段文字，李瀛自注曰：

余每教小兒暮三百註說，其功與讀誦等焉。許魯齋教蒙古生習算術，乃自唐堯戊辰距至元壬申，凡三千六百五年編，其世代歷年為一書，令諸生誦其年數而加減之，其意亦由是也。今人每以技數而賤之，悉可哉？

由此可見，他對於「今人」之鄙視算學，也相當不以為然。以他與洪大容為例，算學始終與儒學關係密切。而這，正是東算史研究者可以好好著力之處。其實，李瀛是朝鮮英祖朝的著名實學家，他的《星湖僊說》分天地、萬物、人事、經史、詩文五門，內容涵蓋典章文物、曆算、地理、農工、國防及四學，共有三千五十七則，頗相類似中國明代的顧炎武的《日知錄》，因此，李瀛也被史家比喻為朝鮮之顧炎武。⁵

十二月四日

今天前往奎章閣檔案館，設法確認中國明代程大位的《重訂算法統宗大全》一書（書本開式為 22.6×13.4 cm，崇文堂藏版，僅存兩卷，據館員稱餘卷或毀於 1970 年）之版本，目前可以確認它是 1593 年問世的明代盜版，⁶可惜，當時無法利用網際網路進入台灣國家

³ 12月2日從仁川機場進入首爾市區時，計程車司機向我介紹一家 24 小時營業的海鮮市場，印象十分深刻。

⁴ 史家李元淳在有關「朝鮮西學的實學性」之研究中，特別以李瀛為例，可見李瀛在韓國科學史上的重要地位。參見李元淳，《朝鮮西學史研究》，頁 97-138。

⁵ 這種比喻對於敘事當然不無啟發性，不過，方法論上的陷阱有時很難以避免，譬如李約瑟 (Joseph Needham) 就將宋應星比喻為中國的 Georgius Agricola (1494 -1555)，如此一來，西方科技文化本位的「偏見」就有可能不自覺地滲透進來，而不易為史家所察覺。

⁶ 崇文堂為中國明末清初著名的坊刻堂號。根據葉瑞汶、方曉華的研究，《算法統宗》「十二卷本是『崇文堂』刻書坊的盜版本。它以『十七卷本』為藍本，內容與十七卷本完全相同。只是改變了分卷和分冊的數目而已。鑑於它是四百年來新發現的惟一的明代改編本，在版本學上仍然具有重要的學術價值和珍藏價值。」參考葉瑞汶、方曉華，〈明代程大位《算法統宗》的盜版問題〉。至於奎章閣所藏之崇文堂版，應該是同一版本（亦即十二卷本）。有關盜版問題，程大位《算法纂要》「後識語」：「先是萬曆壬辰，余編統宗算法……明年癸巳書坊射利，將版翻刻，圖像字義具舛，致誤後學，買者須認本舖原版，方不差謬。」史家嚴敦傑與梅榮照認為這一盜版書坊為「王振華的三桂堂號」，因為萬曆癸巳版扉頁有「三桂堂王振華梓」字樣。按王振華三桂堂從萬曆年起，直到天啓年間還有刊書。此外，參與盜印者還有榮觀堂號。參考嚴敦傑、梅榮照，〈程大位

圖書館的收藏檔案（藏有很多明朝刊本），進行比對與確認。⁷

由於時間充裕，今天也查閱了幾部中國算書，其中發現清代李潢所撰之《緝古算經攷記》一書中，李潢之案語相當豐富，值得深入研究。另外，在《測圓海鏡》同文館集〔聚〕珍版中，李善蘭刻意在收入〈四庫全書提要〉之外，也納進阮元序（為李銳校訂版而寫），當然也包括李治以及他自己的序，此一策略顯然相當重要，因為本書是同文館天算科的教科書之一，而李善蘭正是該科的教習(1868-1882)。請引述李善蘭序如下：

魯論記孔子之言曰：……顧聖學始於志道，終於遊藝，故不獨道有一貫，藝亦有焉！元李敬齋先生著《測圓海鏡》每題皆有法有草。法者本題之法也，草者用天元一曲折以求本題之法，乃造法之法，法之源也。且算術大至纏離交食、細至米鹽瑣屑，法甚繁也，以天元一演之，莫不能得其法，故立天元一者，算學中之一貫也。明顧應祥《海鏡釋術》但演諸開方法而去其細草，重積輕珠，殊可笑也。善蘭少習《九章》，以為淺近無味，及得讀此書，然後之算學之精深，遂好之至今。後譯西國代數、微分、積分諸書，信筆直書了無疑義者，此書之力焉。今來同文館，即以此書課諸生，令以代數演之，則合中西為一法矣！

本檔案館也收藏了中國明代王徵與鄧玉函合譯的《遠西奇器圖說錄最》的一部寫本，⁸特別地，它還與《幾何原本》寫本同時為一位叫作延浚的收藏家所擁有（蓋兩書都有其私印故也），不過，此一收藏家的背景為何，則還有待考證。又，《遠西奇器圖說錄最》有「引取」書目一節，似乎也成為後來中、韓算書著述的模仿對象。此外，中國晚清華蘅芳(1833-1902)與傅蘭雅(John Fryer)合譯的《代數難題解法》(1879)也很值得注意，⁹從前我沒有機會閱讀，今天大致瀏覽了一下，竟然發現它包括了〈決疑數〉一節。儘管本書比起《代數學》(De Morgan原著，偉烈亞力(Alexander Wylie)、李善蘭合譯)更容易被推薦給初學者，¹⁰然而，「決疑數」(probability)(亦見華蘅芳與傅蘭雅合譯之《決疑數學》)卻是嶄新的數學知識，不知道十九世紀末、二十世紀初的中國人有無能力掌握？

還有一本西學譯書，由韓國學者白南奎、李明翔同譯，金澤榮所撰的《土民必知》，這是一本有關西方各國的地理風土誌之簡介。本書一開始還納入自然哲學針對一些自然現象（如潮汐）之簡短說明。它出現在十九世紀末，又強調是士民「必知」（按「必知」似

及其數學著作)。不過，根據前引業瑞汶、方曉華論文，這十二卷本「也是以王振華刊本為祖本的一個改編本，是盜版的盜版者」。由於《算法統宗》之暢銷，康熙五十五年(1716)海陽率濱維新堂重鑄版時，還特別在所附賓渠小像上，由龔顯寫下：「近因翻刻圖像，字義訛舛，致誤後學。本宅特出家藏善本，逐一校對，識者辨之。」引梅榮照、李兆華，《算法統宗校釋》，頁46。或許基於這一事實，所以，奎章閣之崇文堂版本之未附「賓渠小像」。

⁷ 這是因為我們無法在他們的電腦界面上書寫中文的緣故。返台後，我進入國家圖書館中文古籍書目資料庫中查詢，結果發現奎章閣韓國學研究院藏有《重訂算法統宗大全》與《新增算法統宗大全》二書。不過，我在該院的書目中，則未見後書之登錄。

⁸ 筆者對「錄最」一詞還不知如何解釋。

⁹ 本書作者為 Thomas Lund (1805-1877)，英文原著為 A Companion to Wood's Algebra, 1879 年中譯本似乎是根據倫敦 Longman 1878 年出版的第四版。可參考 Hu Mingjie, *Merging Chinese and Western Mathematics: The introduction of algebra and the calculus in China, 1859-1903*.

¹⁰ 有關《代數學》，可參考拙文，〈《代數學》：中國近代第一本西方代數學譯本〉，收入拙著，《孔子與數學》（台北：明文書局，1999），頁205-240。

乎是十九世紀韓國學者相關著述的通用名詞)，可見，在朝鮮半島自然知識的世俗化，¹¹已經進入一個新的階段了。

另一方面，我在奎章閣所編輯的《古文書》27中，也發現中人階級的考試紀錄。譬如任職於觀象監的洪川居，分別在甲午年、乙丑年參加陰陽科初試與覆試，其中初試考題範圍出自《步天歌》、《天文》、《曆法》、《大典通編》、《時憲法七政籌》以及《時憲法交食籌》，總共得十八分。顯然他通過了初試，所以，他才能在乙丑年（增廣別試）參加覆試，這一次他獲得總分二十一分。在這兩份試卷上，我們也可以確認他出自中人階級，因為其上附錄了他的出身背景：「父：通訓大夫行天文學教授，祖：朝散大夫行觀象監直長，曾祖：朝散大夫行典醫監直長，外曾祖：宣略將軍行龍驤衛副司果金爾吉吉本金海。」

晚上，再由金永植教授作東，在湖巖會館餐廳與他的徒弟一起用餐，其中丁元 (Wong Jung) 曾參加 2004 HPM 台中研討會，他與另一位研究生正在進行數學史研究，真是令人高興。按金教授（兼任首爾大學科學史與科學哲學所所長）所領導的科學史研究團隊，在亞洲學界算是數一數二，十幾年來，他辛勤的努力與奉獻，早已開花結果。有鑑於目前我們的 HPM 團隊已經完成了十五篇研究韓國數學史之碩士論文，因此，金教授特別提出召開台韓雙邊「韓國數學史研討會」之構想，邀請參加對象專門以韓國與台灣之學者（或研究生）為主。我當然欣然同意，也希望屆時我們的 HPM 團隊成員可以共襄盛舉。此外，我也向他提及我們有一位博士生準備以東算史研究做為博士論文，並且已經開始學習韓文，他顯然十分開心。

最後，丁元等研究生也十分注意 HPM 的研究動態，他們極希望能在下一屆 HPM 衛星會議（2008 年在墨西哥舉行）中，爭取露臉的機會，可見，HPM 的國際盛會，已經成為數學史家矚目的焦點了。

十二月五日

今天早上，還是去了一趟奎章閣韓國學研究院，主要拜訪行政秘書 Annie Koh 小姐（她為了我這一趟短暫訪問，幫了很多忙），並向金永植教授辭行。之後，再度到檔案館看書。主要查閱到的古籍有下列三本：

- 《儒胥必知》(1872)
- 《新式儒胥必知》(1901)
- 《新撰理科初步》(1902)

前兩本是相當有趣的對照，如果史家未及注意，我們倒是可以撰寫一篇小文章，以「儒胥必知」作為指標，考察韓國的現代化之歷程。其中，後書（寫本）作者為黃泌秀，他另著有《斥邪論》（也是寫本，1936），更是值得注意。

至於第三本（寫本），則由吳聖根輯述，尹榮泰參訂、尹泰懋攷閱。在凡例中，吳聖根指出本書是他根據韓、日、清、英現行理科初等、中等最精之內容輯述而成。粗略來看，本書有幾點值得注意：

- 吳聖根認為「學業有虛名、實狀之別」，而本書是實狀之學。

¹¹ 「世俗化」一詞需要進一步釐清，深入研究也十分必要。當然，這與中人階級對於自然知識的看法之轉變有關。

- 書名稱理科，作者又曾翻譯日本理科書籍，因此，儘管提及韓、日、清、英，但顯然最受日本現代科學著述影響。
- 本書書寫工整，圖畫精美，何以沒有機會出版？
- 本書國、漢文並用，顯示朝鮮原有漢文已不足以著述理科著作？

我想這幾個問題的回答，再加上作者身份之釐清，一定可以幫助我們理解韓國科學教育現代化的歷程。

今天下午抽空參訪景福宮，離開湖巖會館之後，由於不確定是否走對了前往地鐵車站的方向，於是，途中向兩位高中小女生問路，她們非常好心地陪我走到落星台 (Nakseongdae) 地鐵車站。一路上的閒聊有一搭沒一搭，因為她們的英文不是很流利（而我相當遺憾尚未學會韓語），不過，好奇與自信洋溢著她們甜甜的笑臉，讓我們感受到燦爛的明天，真是替韓國友人高興。

景福宮佔地五十公頃，今天沒有從容時間走完。不過，其中有些建築物倒是相當眼熟，原來那些都是韓劇《明成皇后》的取景所在（事實上，也是實景）。在 2004 年台灣社會最動盪不安的時候，那一系列連續劇，曾經陪我渡過一段非常焦慮的時光。撫今憶昔，看著慶會樓結冰的湖面，映照著寒冬蕭瑟的枯樹，耳中卻傳來觀光客的嬉鬧聲，感覺頗為突兀！

儘管如此，這一趟短暫的訪韓之行收穫頗豐。我除了查訪東算（韓國數學）典籍並順便參閱台灣罕見的中算典籍之外，也藉此機會尋求首爾、台北兩個團隊的合作機會。希望將來我個人經常性的訪問之外，我們還可以輪流舉辦台韓雙邊東算史研討會，並且選派博士生互訪（為期至少半年），為東算史之研究，建立一個可長可久的學術合作橋樑。

參考文獻

- 李元淳 (2001). 《朝鮮西學史研究》，北京：中國社會科學出版社。
- 李成茂（楊秀芝譯）(1996). 《朝鮮初期兩班研究》，台北：中華民國韓國研究學會。
- 李瀾 (1976). 《星湖僊說類選》，首爾：景文社。
- 金容雲、金容局 (1978). 《韓國數學史》，東京：真書店。
- 洪萬生 (1999). 〈《代數學》：中國近代第一本西方代數學譯本〉，收入拙著，《孔子與數學》（台北：明文書局），頁 205-240。
- 洪萬生 (2000). 〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點〉，《科學教育學刊》8 (3): 215-224。
- 洪萬生 (2002). 〈十八世紀東算與中算的一段對話：洪正夏 vs. 何國柱〉，《漢學研究》20(2): 57-80。
- 洪萬生 (2002). 〈朝鮮儒家讀九章：以趙泰耆〈九章問答〉為例〉，《國史館學術集刊》第二期: 294-324。
- 洪萬生 (2002). 〈中日韓數學文化交流的歷史問題〉，王玉豐主編《科技，醫療與社會研討會論文集》（高雄：高雄科學工藝博物館），頁 61-70。
- 洪萬生 (2002/2003). 〈數學文化的交流與轉化：以南秉吉 (1820-1869) 的《算學正義》為例〉，提交第六屆科學史研討會，南港：中央研究院數學研究所，3 月 30-31 日。刊《師大學報：人文與社會類》48(1)(2003): 21-38。

- 洪萬生 (2003).〈東算史研究與歷史論述之主題性〉,《台灣歷史學會會訊》第 16 期:73-76。
- 洪萬生 (2005).〈從古今翻譯看數數學文化交流〉,黃毅英主編,《迎接新世紀:重新檢視香港數學教育 -- 蕭文強教授榮休文集》(香港:香港數學教育學會),頁 364-386。
- 洪萬生 (2005/2007).(與李建宗合撰)〈從東算術士慶善徵看十七世紀朝鮮一場數學研討會〉,提交『傳統東亞文明與傳統科技(自然)知識的傳承與演變』研討會,7月21-22日,台北:台大東亞文明研究中心。刊《漢學研究》25(1)(2007):313-340。
- 程大位著、李培業校釋 (1986).《算法纂要校釋》,合肥:安徽教育出版社。
- 郭世榮 (2000).《算法統宗導讀》,武漢:湖北教育出版社。
- 梅榮照、李兆華 (1992).《算法統宗校釋》,台北:九章出版社。
- 華印椿 (1987).《中國珠算史稿》,北京:中國財政經濟出版社。
- 葉瑞汶、方曉華 (2001).〈明代《算法統宗》的盜版問題〉,《金華職業技術學院》2001 年 01 期:84-86, 58。
- 蔡茂松 (1995).《韓國近世思想文化史》,台北:東大圖書公司。
- 蘇意雯 (2001).〈從一封函札看中韓儒家明算者的交流〉,《HPM 通訊》4 (8/9): 3-6。
- 嚴敦傑 (1992).〈《新編直指算法統宗》一書的流傳〉,收入梅榮照、李兆華,《算法統宗校釋》(台北:九章出版社),頁 1-5。
- 嚴敦傑、梅榮照 (1990).〈程大位及其數學著作〉,收入梅榮照主編,《明清數學史論文集》(蘇州:江蘇教育出版社),頁 26-52。
- Horng, Wann-Sheng (1991). *Li Shanlan: The Impact of Western Mathematics in China during the Late 19th Century China*. Ph.D. thesis, City University of New York.
- Horng, Wann-Sheng (1993). "Hua Hengfang (1833-1902) and His Notebook on Learning Mathematics - *Xue Suan Bi Tan*", *Philosophy and the History of Science: A Taiwanese Journal* 2(2): 27-76.
- Horng, Wann-Sheng (2000). "Sino-Korean Transmission of Mathematical Texts in the 19th Century: A HPM reflection", presented to HPM 2000 Taipei Conference – "History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium", Taipei: National Taiwan Normal University, August 9-14, 2000.
- Horng, Wann-Sheng (2001). "An Eighteenth-Century Sino-Korean Dialogue on Mathematics: He Gouzhu versus Hong Chong-ha", presented to the XXI International Congress of History of Science, Mexico City 8-14 July, 2001.
- Horng, Wann-Sheng (2001/2002). "Sino-Korean Transmission of Mathematical Texts in the 19th Century: A case with Nam Pyong-gil's *Kugo Sulyo Tohae*", presented to the XXI International Congress of History of Science, Mexico City 8-14 July, 2001. published in *Historia Scientiarum* 12(2)(2002): 87-99.
- Horng, Wann-Sheng (2005). "History of Korean Mathematics in the Choson Period: An Overview", presented to 11th International Conference on the History of Science, Technology and Medicine in East Asia, August 15-20, Deutsches Museum, Munich.
- Hu Mingjie (1998). *Merging Chinese and Western Mathematics: The introduction of algebra and*

- the calculus in China, 1859-1903*. Ph.D. dissertation thesis, Princeton University.
- Jeon, Sang-woon (1998). *A History of Science in Korea*. Seoul: Jimoondang Publishing Company.
- Jun, Yong Hoon (2006). "Mathematics in Context: A Case in Early Nineteenth-Century Korea", *Science in Context* 9(4): 475-512
- Kawahara, Hideki (1998). "Tongsan and Chonwonsul – Choson's Mathematics in the Middle 17th through Early 18th Century" (in Japanese), *Chosen Gakuho* (Journal of the Academic Association of Koreanology in Japan) No. 169 (October): 35-71.
- Kim, Yung Sik (1998). "Problems and Possibilities in the Study of the History of Korean Science", *Osiris* 13: 48-79.
- Lee, Ki-baik (1984). *A New History of Korea*. Cambridge, Massachusetts / London: Harvard University Press.
- Martzloff, Jean-Claude (1997). *A History of Chinese Mathematics*. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag.
- Oh, Young Sook (2004). *The Changes of the Knowledge of "Ku-go" (勾股) from the late 17th century to the middle century in Korea*. Master thesis, Program in History and Philosophy of Science, Seoul National University, August, 2004.

附錄：台灣師範大學數學系所有關東算史之碩士論文 (2002-2007)

1. 葉吉海 (2002). 《李朝世宗時期的朝鮮數學》，台北：國立台灣師範大學數學系所碩士論文。
2. 李建宗 (2003). 《朝鮮算學家·慶善徵《默思集算法》初探》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
3. 洪宜亭 (2003). 《從《籌解需用》看洪大容的數學與實學思想》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
4. 周宗奎 (2003). 《黃胤錫《算學入門》探源》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
5. 吳秉鴻 (2003). 《李尙嫻《借根方蒙求》初探》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
6. 孫梅茵 (2003). 《朴縉《籌學本原》初探》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
7. 陳冠良 (2003). 《《東算抄》之內容分析》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
8. 謝佩珍 (2003). 《韓國勾股術發展之研究》台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
9. 蕭文俊 (2003). 《朝鮮算學家學習中國古代數學文本的轉化：以南秉哲 (1817-1863)《海鏡細草解》為例》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
10. 林肯輝 (2004). 《《書計瑣錄》之內容分析》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。

士論文。

11. 張復凱 (2005).《從南秉吉 (1820-1869)《緝古演段》看東算史上天元術與借根方之「對話」》，台北：國立台灣師範大學數學系所碩士論文。
12. 謝三寶 (2005).《李尚燠《算術管見》初探》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
13. 吳建任 (2007).《東算家趙泰考《籌書管見》之內容分析》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
14. 郭守德 (2007).《朝鮮算學家南秉吉《測量圖解》初探》，台北：國立台灣師範大學數學系所教學碩士論文。
15. 陳春廷 (2007).《東算家南秉吉《算學正義》之內容分析》，台北：國立台灣師範大學數學系所碩士論文。

1. 為節省影印成本，本通訊將減少紙版的發行，請讀者盡量改訂PDF電子檔。要訂閱請將您的大名，地址，e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
2. 本通訊若需影印僅限教學用，若需轉載請洽原作者或本通訊發行人。
3. 歡迎對數學教育、數學史、教育時事評論等主題有興趣的教師、家長及學生踴躍投稿。投稿請e-mail至 suhui_yu@yahoo.com.tw
4. 本通訊內容可至網站下載。網址：<http://math.ntnu.edu.tw/~horng/letter/hpmlatter.htm>
5. 以下是本通訊在各縣市學校的聯絡員，有事沒事請就聯絡

《HPM 通訊》駐校連絡員

- 日本東京市：陳昭蓉（東京 Boston Consulting Group）、李佳燁（東京大學）
- 台北市：楊淑芬（松山高中） 杜雲華、陳彥宏、游經祥、蘇慧珍（成功高中）
 蘇俊鴻（北一女中） 陳啓文（中山女高） 蘇惠玉（西松高中） 蕭文俊（中崙高中）
 郭慶章（建國中學） 李秀卿（景美女中） 王錫熙（三民國中） 謝佩珍、葉和文（百齡高中）
 彭良禎（麗山高中） 邱靜如（實踐國中） 郭守德（大安高工） 余俊生（西松高中）
 張美玲（景興國中） 黃俊才（麗山國中） 文宏元（金歐女中） 林裕意（開平中學）
 林壽福（興雅國中）、傅聖國（健康國小） 李素幸（雙園國中）
- 台北縣：顏志成（新莊高中） 陳鳳珠（中正國中） 黃清揚（福和國中） 董芳成（海山高中） 林旻志（錦和中學） 孫梅茵（海山高工） 周宗奎（清水中學） 莊嘉玲（林口高中） 王鼎勳、吳建任（樹林中學） 陳玉芬（明德高中） 羅春暉（二重國小）
- 宜蘭縣：陳敏皓（蘭陽女中） 吳秉鴻（國華國中） 林肯輝（羅東國中）
- 桃園縣：許雪珍（陽明高中） 王文珮（青溪國中） 陳威南（平鎮中學） 洪宜亭（內壢高中）
 鐘啓哲（武漢國中） 徐梅芳（新坡國中） 郭志輝（內壢高中） 程和欽（永豐高中）、
 鍾秀瓏（東安國中） 陳春廷（楊光國民中小學）
- 新竹縣：洪誌陽、李俊坤、葉吉海（新竹高中） 陳夢琦、陳瑩琪、陳淑婷（竹北高中）
 洪正川（新竹高商）
- 苗栗縣：廖淑芳（照南國中）
- 台中縣：洪秀敏（豐原高中） 楊淑玲（神岡國中）
- 台中市：阮錫琦（西苑高中） 歐士福（五權國中）
- 嘉義市：謝三寶（嘉義高工）
- 台南市：林倉億（家齊女中）
- 台南縣：李建宗（北門高工）
- 高雄市：廖惠儀（大仁國中）
- 屏東縣：陳冠良（枋寮高中） 楊瓊茹（屏東高中）
- 澎湖縣：何嘉祥（馬公高中）
- 金門：楊玉星（金城中學） 張復凱（金門高中） 馬祖：王連發（馬祖高中）

附註：本通訊長期徵求各位老師的教學心得。懇請各位老師惠賜高見！

單設法及其演變

黃清揚

台北縣立福和國中

壹、前言

所謂的單設法，是採用「假設法」解題，最早見於埃及的《萊茵紙草》中。而相較於單設法的雙設法，即「盈不足術」，是中國數學中的特色之一。歷史上最早提出並使用雙設法的著作，是成書於公元前 186 年之前的《筭數書》，而此後不久的《九章算術》更特設一章來討論盈不足術。至此以後一直到清末，許多中國數學家陸續針對盈不足術做過研究。中國之外對雙設法的研究，則遲至九世紀才見諸阿拉伯的文本中。歐洲這方法的出現，則更遲至十三世紀。教師講述利用未知數解方程式的概念時，若搭配這段歷史，可要求學生思考古今數學方法的優劣，進而加深學生在這方面的概念。

貳、單設法的發展

《萊茵紙草》最初發現於埃及底比斯（Thebes）古都廢墟中，1858 年為蘇格蘭收藏家萊茵（A. H. Rhind）購得而得名。該紙草現藏倫敦大英博物館，長 525 釐米，寬 33 釐米，中間有少量缺失，缺失部分 1922 年意外地在紐約一私人收藏的埃及醫學紙草中被發現，現藏美國布魯克林博物館。

《萊茵紙草》又稱為《阿姆士紙草》，是公元前 1650 年左右一位叫阿姆士（A'h-mose）的人用僧侶文抄錄的。由阿姆士所加的前言可知，他抄錄的是一部已經流傳了約兩個世紀的著作。該紙草的結構，在前言之後，是一張型如 $\frac{2}{k}$ （為 101 以內的奇數）的分數表，分數表之後為主體部分—84 個數學問題（最後還有一段難以解釋的文字，即一般所稱的問題 85）。這些問題使《茵因紙草》成為現存最豐富的古埃及數學文獻。

以下介紹問題 24，此題與單設法有相關：

問題 24 · 某數與他的 $\frac{1}{7}$ 相加得 19，求該數。假設該數為 7

$$\begin{array}{r} \backslash 1 \\ 7 \end{array} \quad 7$$

$$\begin{array}{r} \backslash \frac{1}{7} \\ 7 \end{array} \quad 1$$

$$\text{和數} \quad 8$$

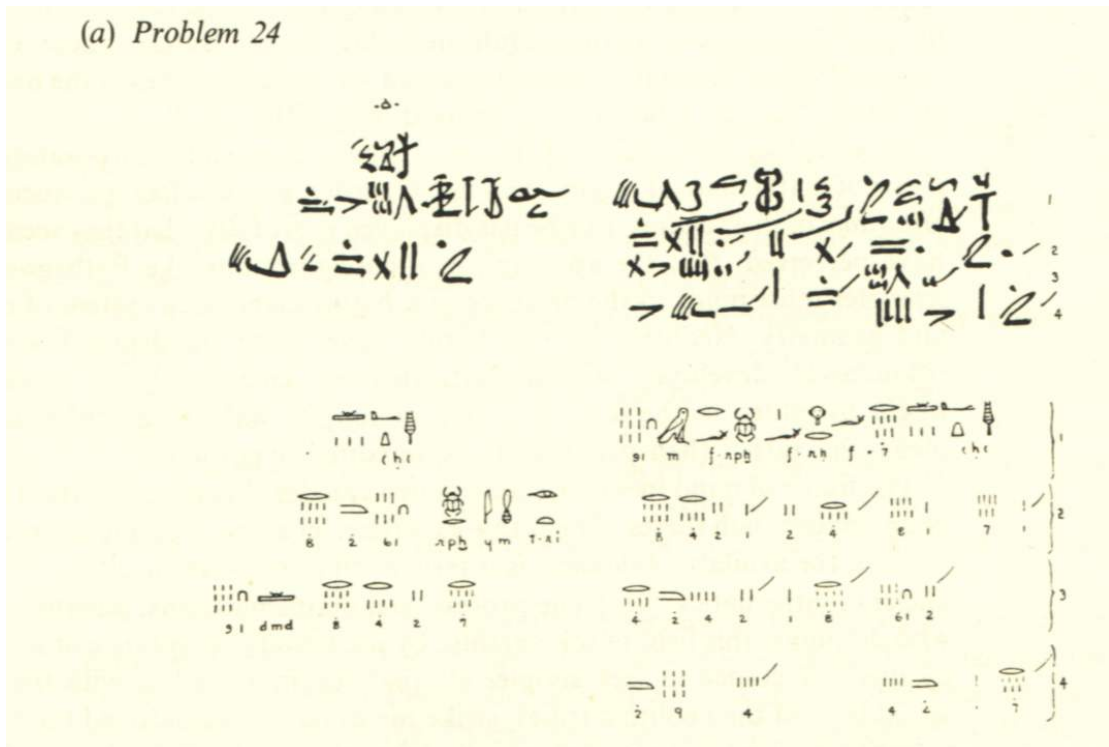
然後計算何數乘以 8 能得 19，再將該數乘以 7 就得到所求數。

$$\begin{array}{r} 1 \\ \backslash 2 \end{array} \quad 8$$

$$\quad \quad \quad 16$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} \\ \backslash 4 \end{array} \quad 4$$

$\backslash \frac{1}{4}$	2
$\backslash \frac{1}{8}$	1
和數 $2\frac{1}{48}$	
$\backslash 1$	$2\frac{1}{48}$
$\backslash 2$	$4\frac{1}{24}$
$\backslash 4$	$9\frac{1}{2}$
驗證如下：所求數	$16\frac{1}{28}$
$\frac{1}{7}$	$2\frac{1}{48}$
和數	19



此例乃是採用「假設法」解題的典型例題，這種方法實質上相當於：對方程式 $Ax=B$ ，任設一值 x' 為其解，然後計算 $Ax' = B'$ 及比值 $k = \frac{B}{B'}$ ，則解得 $x = kx'$ 。

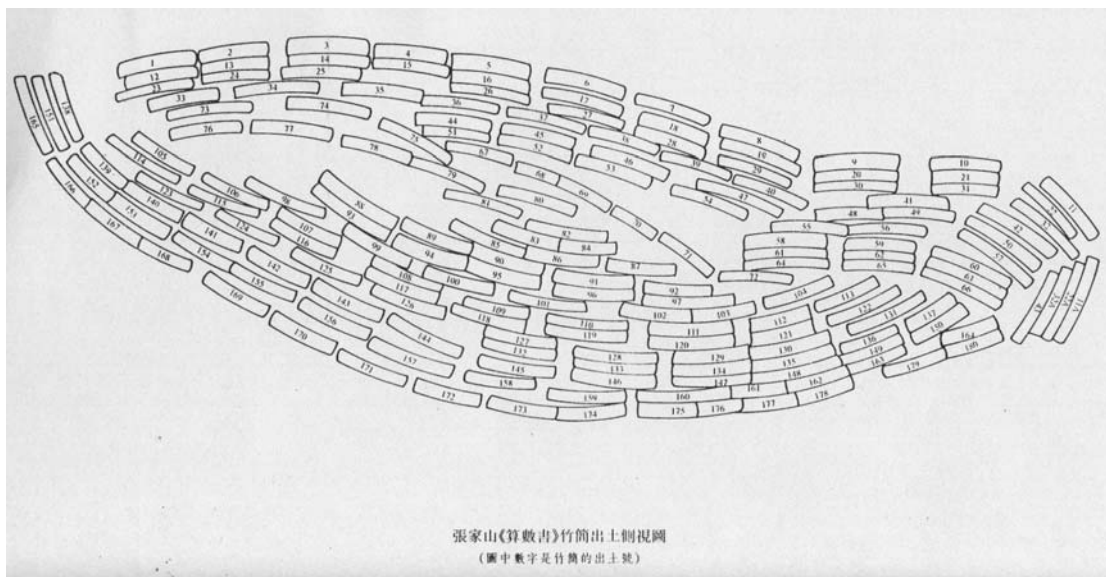
在此之後，西方數學對單設法的研究便屢屢出現，諸如巴比倫泥版、丟番圖（公元 250 年前後）的《數論》（*Arithmetica*）、阿拉伯數學著作等等。但雙設法則遲至九世紀阿拉伯的著作中才出現，而中國對雙設法的研究早在公元前 186 年前就開始了。

參、中國在盈不足術的發展

盈不足章的精神，是針對問題先估計兩個近似解，然後依題意求出盈或不足，再用盈不足術來解出真正的答案。從數學發展來看，盈不足術誠然是一種頗為傑出的方法，其估計近似解的構想更是符合「逐步逼近」的精神。事實上，盈不足術本質上就是一種線性（或稱一次）內插法。而歷史上最早出現盈不足術的文獻則見於《算數書》。

一、《算數書》

《算數書》竹簡於一九八四年出土於湖北省江陵縣（今荆州市荊州區）張家山二四七號墓中，同出的竹簡有一千二百餘枚。經過整理，這批竹簡含：《二年律令》、《奏讞書》、《蓋廬》、《脈書》、《引書》、《算數書》、曆譜和遺策。《算數書》竹簡則位於同墓的一千兩百餘枚竹簡的下部。根據與《算數書》共存的一份曆譜，其所記載最後一年是西漢呂后二年（公元前 186 年），墓主可能於此後不久去世。因此，《算數書》成書年代的下限是西漢呂后二年，即及公元前 186 年。《算數書》中有關盈不足的題目共有三個：「分錢」（題 51）、「米出錢」（題 52）、「方田」（題 53）。題 51 內容如下：



分錢（題 51） 分錢人二而多三，人三而少二，問幾何人、錢幾何？得曰：五人，錢十三。贏（盈）不足互乘母為實，子相從為法。接贏（盈）若不足，子互成母而各異直（置）之，以子少者除子多者，餘為法，以不足為實。

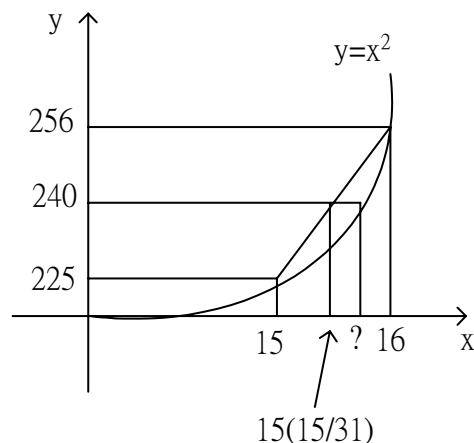
這是「盈」與「不足」並列的典型代表題，同型題目亦見於《九章算術》（第七章）「盈不足」第一題。這三題中最有趣的是《算數書》題 53：

方田（題 53） 田一畝方幾何步？曰：方十五步三十一分步十五。術曰：并贏（盈）、不足為法，不足子乘贏（盈）母，贏（盈）子乘不足母，并以為實，復之，如啟廣之術。

題意是說一畝田（240 平方步）如作正方形，求邊長為若干步。一般的解法是把 240 平方步開平方，但用算籌演算較為複雜。此題作法通過兩次假設，把它改寫成盈不足問題。其解法如下（附圖）：

$$240 = 15^2 + 15 = 16^2 - 16$$

$$\frac{16 \times 15 + 15 \times 16}{16 + 15} = \frac{480}{31} = 15 \frac{15}{31}$$



這一題的「盈不足術」，提供了求平方根近似值的另類解法，等價於逼近公式

$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a+1}$ 。相較於《九章算術》第七章，固然《九章算術》有非線性代數方程的求解例題，但此一類型的題目並未再現。至於其原因究竟，或許與《九章算術》第四章中完全成熟的「開方術」有關。接下來我們來看看較《算數書》更為成熟的《九章算術》如何處理盈不足問題。

二、《九章算術》

《九章算術》第七章乃在利用「盈不足術」來處理問題。它將「盈不足術」分為盈不足、兩盈、兩不足、盈適足及不足適足數五種術文，含有 8 個例題。後有 11 問是用盈不足術解決的一般問題。另有一玉石隱互問，列入此章，但未用盈不足術求解。在此介紹典型的盈不足術問題，即共買物問題：

（第一問）今有共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。問人數、物價各幾何？

答曰：七人、物價五十三。

術文則是：

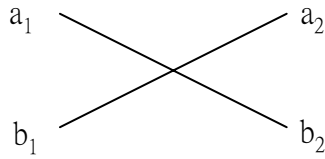
盈不足術曰：置所出率，盈、不足各居其下。另維乘所出率，并，以為實。并盈、不足為法。實如法而一。有分者，通之。盈、不足相與同其買物者，置所出率，以少減多，餘，以約法實。實為物價，法為人數。

另有一法為：

其一術曰：并盈、不足為實。以所出率，以少減多，餘為法。實如法得一人。以所出率乘之，減盈、增不足即為物價。

就是說，假設兩次付款數（所出率）分別是 a_1 、 a_2 （ $a_1 > a_2$ ），盈、不足數分別是 b_1 、 b_2 ，則上述術文可分成三段：

(1)「置所出率，盈不足各居其下」，即將已知四數排成下圖。



「維乘」就是交叉相乘。「并以爲實」就是以 $a_1b_2+a_2b_1$ 作爲被除數；「并盈、不足爲法」即以 b_1+b_2 爲除數；「實如法而一」即爲 $x = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1 + b_2}$

(2)「置所出率，以少減多」，即 a_1-a_2 ；「餘、以約法（ b_1+b_2 ）、實（ $a_1b_2+a_2b_1$ ）。實爲物價、法爲人數」即物價及人數則別是：

$$\text{物價} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_1 - a_2}$$

$$\text{人數} = \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2}$$

(3)「其一術」提供了另外兩個物價公式，其中較大「所出率乘之（人數）」則「減盈」，較小「所出率乘之」則「增不足」，於是

$$\text{物價} = a_1 \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} - b_1$$

$$\text{物價} = a_2 \frac{b_1 + b_2}{a_1 - a_2} + b_2$$

另外，值得研究的是劉徽對以上述文的解釋，劉徽用齊同術解釋（1）他說：

盈朒維乘兩設者，欲為同齊之意。據共買物，人出八，盈三；人出七，不足四。齊其假令，同其盈、朒。盈、朒俱十二，通計齊則不盈不朒之正數，故可并之為實，并盈、不足為法。齊之三十二者，是四假令，有盈十二；齊之二十一者，是三假令，亦朒十二。并七假令合為一實，故并三、四為法。

若把兩次付款數（假令）和相對應的盈、不足（朒）數，看做兩組率（ a_1, b_1 ）和（ a_2, b_2 ），「其其假令，同其盈朒」即將兩組上面兩組率化爲（ a_1b_2, b_1b_2 ）和（ a_2b_1, b_1b_2 ）。根據題意，在齊同之後解釋如下：如果買 b_2 次物品，每人付錢 a_1b_2 則多出 b_1b_2 錢；如果買 b_1 次物品，每人付錢 a_2b_1 則差 b_1b_2 錢，那麼如果每人付錢 $a_1b_2 + a_2b_1$ 共買 $b_1 + b_2$ 次物品，盈不足恰好抵銷，因此，買一次物品每人應出錢數就是 $x = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1 + b_2}$ 。針對（2）中的公式。劉徽則說：

所出率以少減多者，餘，謂之設差，以為少設。則并盈、朒，是為定實。故以少設約定實，則法，為人數；適足之實故為物價。盈、朒當與少設相通。不可遍約，亦當分母乘，設差為約法、實。

另外，對於非線性問題，本章也採用盈不足術來解，計有：指數函數題兩題，二次式一題。除此之外，本卷中部分即使用普通的算法來處理都很麻煩的算題，經過兩次假設後就能藉助現成的公式求出答案，而這也正是中算家所擅長的。正因為盈不足術其應用範圍廣，所以，它成為歷代數學著作相當重要的內容，成書年代較後的《孫子算經》、《張丘建算經》以及宋元算書中，都有精彩的呈現。

肆、盈不足術的傳播

一、阿拉伯的著作

早在九世紀初，阿拉伯著作似乎就已開始探討雙設法，但目前文獻不足無法對其內容作詳細的討論。從二手文獻中來看，對雙設法是否從中國傳至阿拉伯有爭議。如英國科學史家李約瑟（Joseph Needham）認為西方的雙設法可能是中國傳過去的，他認為阿拉伯人將雙設法稱為 *regola elchataym* 而 *elcataym* 來自契丹之名，當時阿拉伯人稱西遼人為契丹。另外，錢寶琮指出這個方法是中國的盈不足術，因為：

盈不足術曰：hasib al Khataayn，其拉丁譯名為 *elchataym*、*el cataym* 等……阿拉伯人呼西遼人曰「契丹」（*Khitan*）。中古歐洲人因稱中國人曰 *Cathay*……所謂 *hasibal Khataayn* 當只「契丹算法」而言。

而不同意見見於馬若安（Jean-Claude Martzloff），他則指出，阿拉伯人稱 *elchataym* 一詞的意思，是兩次誤差的法則（*rule of two errors*），與契丹沒有關連。

綜觀這些學這的說法，所謂雙設法乃中國傳到阿拉伯的說法並沒有定論，其間的爭議還有待因更新的證據。雖然如此，阿拉伯人對西歐數學的貢獻是無可置疑的。

二、西歐的發展

正當阿拉伯人如火如荼吸收古希臘精髓並做出偉大貢獻的同時。歐洲數學則長期處於停滯的狀態，這種情況一直到了十二世紀才有進展。藉著翻譯及傳播阿拉伯人的著作，加上對希臘及東方數學進一步的發掘、探討最終導致文藝復興時期（15~16世紀）歐洲數學的高度發展。

而此時的義大利，正由於其地理位置特殊加上商業貿易發達，而成為東西文明的交匯點。義大利學者在12~13世紀時便開始翻譯、介紹希臘及阿拉伯的數學文獻。此時第一位具有影響力的數學家就是斐伯那契。

斐伯那契，即比薩的李奧那多（Leonardo of Pisa, or Fibonacci, 約1170~1250），他生於義大利的比薩。斐伯那契的父親是一位商業家，小時候他就跟隨他的父親在 Bugia（阿爾吉利亞，北非）從師阿拉伯人學習算學，後又遊歷地中海沿岸（埃及，敘利亞，拜占庭，西西里及佛羅倫斯），也因此他有機會接觸到各地優秀的數學著作。回義大利後完成《計算書》（*Liber*



Abbaci, 1202)、《實用幾何》(*Practica geometriae*, 1220)、《花朵》(*Flos*, 1225) 及《平方數之書》(*Liber quadratorum*, 1225) 等著作。雖如此，但他在數學史上的地位遠遠被忽視，長期以來相當多的著作都會提到斐波那契數列—兔子問題，卻沒有提到他對歐洲數學後來的發展有多大的貢獻。事實上，他將印度—阿拉伯數碼帶到歐洲，進而加速歐洲的發展，也因此影響了相當多的數學家。另外，他在《平方數之書》中討論不定方程的解，對數論研究也極具影響力。以他對數論的貢獻來說，我們可以直接將他排在丟番圖及費瑪兩人之間，並且他還是個承先啓後關鍵性的角色。雖然當時他的數學著作主要用於商業上，但在後世的發展才應是值得關注的問題。

《計算書》包含了 15 個章節，處理了算術和代數的問題，經由一些實際的問題以及解答，應用算術到商業的用途。以下介紹與「盈不足」相關的問題，首先，看書中對雙設法的說明：

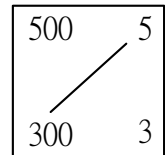
阿拉伯文的 *elchataoeym* 譯成拉丁文是 *duarum falsarum posicionum regula* (英文是 the rule of double false)。藉助於此法幾乎所有問題都能求解。隨意取二次假設。這意味著有時兩者都小於真值，有時都大於，有時一個大於、一個小於(真值)。從二次假設差的比列以獲得準確解。這就是從第四比例法則求出。這裡包含有三個數，解此列出第四個(未知)數，這就是所求準確解，第一個是數是二次假設差。第二個數是藉助於假設差使其成為準確值的近似數。第三個數是使近似於真值的差數。吾人希望能表達他們怎樣用天平秤法則解題因此用以闡明這些差在平衡中所起的巧妙作用，使你理解用雙假設法巧妙地解決其他問題。

在說明之後，我們來看看他如何將這個方法用到實際問題，以下為書中的一個題目：

兩座塔，高度分別是 40 步及 30 步，底部相距 50 步。這兩座塔中間有一噴泉，有兩隻鳥同時分別從塔頂用同樣的速度可在同一時間到達此噴泉。請問此噴泉全距離兩塔底分別是多少？

利用雙設法，其解題過程如下：

若較高的塔距離噴泉 10，10 乘以 10 等於 100，與高塔高度自乘 1600 相加，得到 1700，我們必須將剩下距離自乘，加上低塔高度自乘，也就是 900，得到 2500。這個和與前者相差 800。我們必須將噴泉移動遠離高塔。以 5 為例，也就是說，全部是 15，自乘是 225，加上高塔自乘得到 1825，剩下距離自乘加上低塔高度自乘得到 2125。兩個和相差 300。而之前的差為 800。所以，當我們增加 5 步，差就減少 500。如果我們乘 300 再除 500，得到 3，加上 15 步得到 18，這就是噴泉離高塔的距離。



用現代符號則可以寫成：

$$\begin{aligned} 10^2+40^2 &= 100+1600=1700 \\ (50-10)^2+30^2 &= 40^2+30^2=1600+900=2500 \\ 2500-1700 &= 800 \end{aligned}$$

$$15^2+40^2=225+1600=1825$$

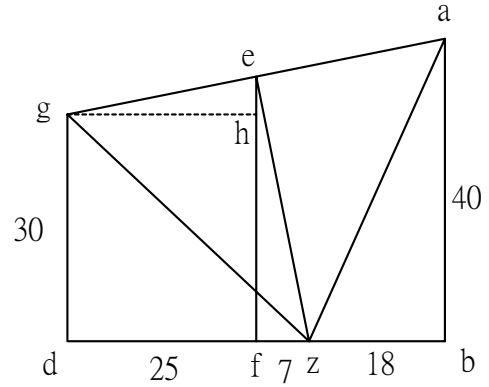
$$(50-15)^2+30^2=1225+900=2125$$

$$2125-1825=300$$

$$(5 \times 300) / 500 = 3$$

$$3 + 15 = 18$$

另外，斐伯那契還給了另一種幾何解法（如右圖）。在說明 $\triangle agz$ 是一個等腰三角形（ $az=gz$ ）後，他說：



40 加 30 為 70，70 的一半為 35，事實上就是直線 ef。線段 df 與 fb 長度為 25，35 與低塔的差為，乘 35 得到 175，除以兩塔之間距離的一半，事實上為 25，得到 7（線段 fz）。因此，線段 dz 為 32 且線段 zb 為 18。

用我們熟悉的數學語言來說明，就是：

$$\triangle efz \text{ 相似於 } \triangle ghe, \text{ 在此 } gh \text{ 垂直 } ef \text{ 且 } gh \text{ 平行 } db. \text{ 所以 } \frac{fz}{ef} = \frac{eh}{gh}, \frac{fz}{35} = \frac{5}{25}, fz = \frac{5 \times 35}{25} = 7.$$

這裡我們必須要注意到，十三世紀時代數並未發展健全，幾何則與我們中學生現在所使用的技巧相當。而他所使用的雙設法，從上面可得知他是從阿拉伯人所學習來的。同時，我們也要注意斐伯那契所使用的解題策略並不是只有一種而已，值得我們在教學上多所參考。

自斐伯那契之後，雙設法漸為西歐所採用，不久即普及西歐各國。在十六、七世紀時期，歐洲人的代數還未發展到充分利用符號的階段，這種算法便長期統治了他們的數學王國。令人玩味的是，此法後來還經由耶穌會傳教士回傳至中國呢。

伍、結論

從上述內容來看，各文化對於相同的數學知識在解釋的方向就有所不同。我們可這樣說：數學知識在兩種文化下的交流情形並不是一成不變的抄襲，這中間還經過吸收、轉換、沈澱等等作用。這種現象在前面所介紹的各個版本中，就可以很清楚的看到。除此之外，我們也不可忽略印刷術的發展，對數學文本的保存及知識的交流所扮演的角色，例如從手抄本到印刷術這中間，各文本呈現方式就有所不同。最後，從 HPM 的面向來看，若能將這些珍貴的遺產呈現給我們的莘莘學子，或許會對他們會有所啟發，並減少數學與他們的隔閡，這也是本文的初衷。

參考文獻

- 江陵張家山漢簡整理小組 (2000). 〈江陵張家山漢簡《算數書》釋文〉,《文物》2000 年第九期,頁 78-84。
- 李文林主編 (23000).《數學珍寶》,台北：九章出版社。
- 林力娜 (Karine Chemla) (1997). 〈盈不足數的世界傳播管見〉,《科史薪傳》(瀋陽：遼寧

教育出版社)，頁 122-131。

洪萬生 (1985). 〈盈不足術—古中國的一種巧妙算「術」〉，《代數》(台北：正中書局)，頁 67-73。

洪萬生 (2000). 〈《算術書》初探〉，《師大學報：科學教育類》45(2): 77-91。

洪萬生 (2000). 〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點〉，《科學教育學刊》8(2): 215-224。

洪萬生 (2006). 〈十三世紀西歐的數學百科全書：斐波那契的《計算書》〉，洪萬生，《此零非比 0》(台北：商務印書館)，頁 123-136。

紀志剛主編 (1999). 《孫子算經、張邱建算經、夏侯陽算經導讀》，武漢：湖北教育出版社。

郭書春 (1992). 《古代世界數學泰斗劉徽》，濟南：山東科學技術出版社。

郭書春譯注 (1998). 《九章算術》，瀋陽：遼寧教育出版社。

彭浩 (2000). 〈中國最早的數學著作《算數數》〉，《文物》2000 年第九期：85-90。

彭浩 (2001). 《張家山漢簡《算數書》註釋》，北京：科學出版社。

康熙御制 (1993). 《數理經蘊》，收入郭書春主編，《中國科學技術典籍通匯》數學卷第三分冊，鄭州：河南教育出版社。

錢寶琮 (1998). 〈《九章算術》盈不足術流傳歐洲考〉，收入《李儼錢寶琮科學史全集》第九卷 (瀋陽：遼寧教育出版社)，頁 35-49。

蘇意雯等 (2000). 〈《算數書》校勘〉，《HPM 通訊》第三卷第十一期。

Gillings, Richard J. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publications, Inc.

Grugnetti, Lucia (2000). "The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems", in Victor Katz (ed.) *Using History to Teach mathematics: An International Perspective* (Washington: MAA), pp. 29-35.

Martzloff, Jean-Claude (1997). *A History of Chinese Mathematics*, Berlin: Springer-Verlag.