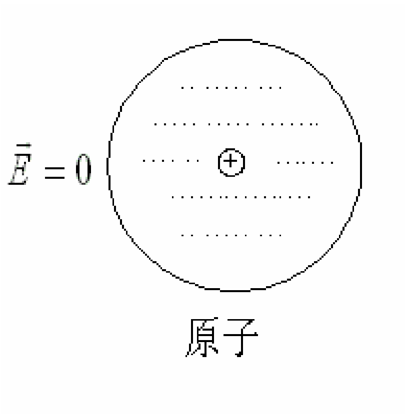
第二十三讲

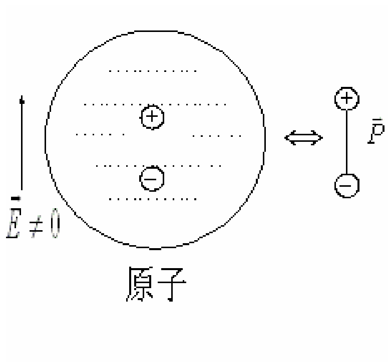
复习：

1. 动生电动势的物理实质：$\vec{E}_K = \vec{v} \times \vec{B}$（洛伦兹力产生的非静电等效场）；感生电动势的物理实质：$\oiint \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$（产生了一个有旋无源的性质类似静磁场$\vec{B}$的电场，非保守场。）
2. 磁偶极子$\vec{m}$与$\vec{p}$的相似性
   $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$　　$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B})$　　$U_B = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
3. （1）轨道磁矩
   $\mu_l = \frac{|e|}{2m} l = n\mu_B$　核子的磁矩　$m_P >> m_e$　　$\mu_P << \mu_e$可以忽略不计

（2）无磁性介质（组成单元没有固有磁矩）

与$\vec{E}$对没有固有$\vec{p}$ 的电介质的作用是产生偶极子，





$\vec{E} = 0$时，介质原子正负电荷中心重合

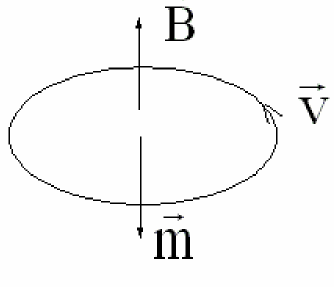
$\vec{E} \neq 0$时，介质原子正负电荷中心分离，此时该原子等效为电偶极子。

相似的　　$\vec{B} \Rightarrow \vec{m}$

完整的处理需要量子力学，因磁性的起源有许多种。

<u>举例</u>：

a) 均匀电子气



$\vec{B} = 0$时，当然电子无规运动，没有任何磁矩$\vec{m}$；

$\vec{B}$存在时，$\vec{m}$出现了，电子在磁场作用下打转，本质是 Lenz 定律（Lorentz 力）。朗道用量子力学解了这

个问题——朗道能级（量子 Hall 效应的中心原理）

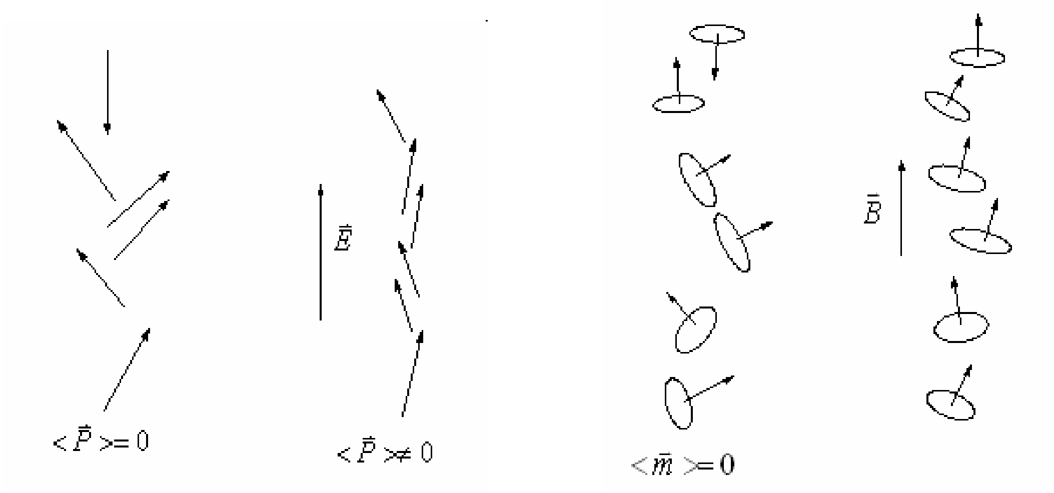
b) 无磁性原子

电子绕原子核运动,有分子环流，每个这样的分子环流都贡献一个磁偶极子。当电子数为一定的数目时（满壳层，2，10，…），在 B=0 时，因为左旋的电子和右旋的环流相等，因此相互抵消。 有外场时，因为$U=-\vec{m}\cdot\vec{B}$，原子中左旋的电子（从而产生于外磁场同向的环流）的数目增加，从而使得原子产生诱导磁矩。

（3）原子具有固有磁矩$\vec{m}$

对一些原子，不加外磁场就已有固有磁矩。产生磁矩的原因是：1）电子不是满壳层，因此原子内部的电子形成的分子环流不能互相抵消；2）电子本身有自旋（Spin）。当这些原子组合在一起形成宏观固体时，

固有$\vec{p}$在$\vec{E}$中　　　　　　若有固有$\vec{m}$，在$\vec{B}$中如何？



类似电介质，磁介质中的这些偶极子的方向完全杂乱无章；但有磁场时，磁矩在外场的力矩作用下向磁场偏转，因而产生宏观磁矩，如上图所示。

核心：　　$\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}$　　　　$\vec{\tau}=\vec{m}\times\vec{B}$

　　　　$\vec{p}$趋向$//\vec{E}$　　　　$\vec{m}$趋向$//\vec{B}$

综合上面各种情况，我们得到结论：$\vec{B}$的出现会产生$\vec{m}$，尽管$\vec{m}$ 可能平行于$\vec{B}$，亦可能反平行于$\vec{B}$。（不同的起源重要性在不同介质中各不相同）

为了研究磁介质中的磁场行为，下面我们将类比电场的情形，研究磁场如何磁化介质，磁化后的介质如何产生磁化电流，磁化电流又如何产生附加磁场，反馈回原来的磁场的。要做到这一点，我们要引入磁化强度、磁化电流、退磁场等概念。

（三）、磁化强度

对比电介质　　极化强度　　$\vec{P}(\vec{r})=\dfrac{\sum_i \vec{p_i}}{\Delta V}$

对磁介质定义　磁化强度　　$\overrightarrow{M}(\vec{r})=\dfrac{\Delta\overrightarrow{m_i}}{\Delta V}$

$\overrightarrow{M}$ 刻化了介质被磁化的大小的宏观量

对线性介质，$\overrightarrow{M}(\vec{r})$ 显然正比于 $\vec{B}(\vec{r})$ 　$\Leftrightarrow$　局域磁感应场

对比　$\vec{P}(\vec{r})=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}(\vec{r})$

应定义　$\overrightarrow{M}(\vec{r})=\chi_m\vec{B}(\vec{r})\big/\mu_0$

历史误会：$\boxed{\overrightarrow{M}(\vec{r})=\dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B}(\vec{r})}$　χ_m 称作磁化率，对大多数线性介质为常数，不依赖于 $\vec{B}$ 的大小。

（三）磁化电流

在电介质中　　极化强度　$\vec{P}$　$\Rightarrow$　　极化电荷 ρ_P

磁介质中　　　　磁化强度 $\overrightarrow{M}$　$\Rightarrow$　　磁化电流　I_m

完整的磁化图像　　$\vec{B}\rightarrow\overrightarrow{M}\rightarrow I_m\rightarrow B_m$

给定 $\overrightarrow{M}(\vec{r})$，如何求　I_m？

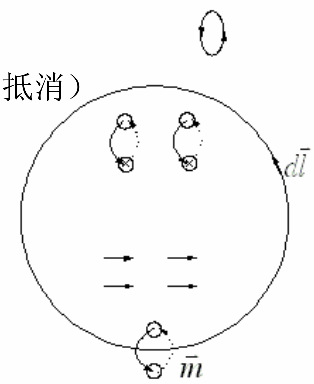
空间中任选一个 $\vec{S}$ 求通过此 $\vec{S}$ 的总磁化电流 I_m。注意到：

（1）　所有不在 $\vec{S}$ 的分子环流（即小的偶极子 $\vec{m}$ ）不计在内

（2）　所有在 $\vec{S}$ 内的分子环流（ $\vec{m}$ ）（因为通过 $\vec{S}$ 两次，正负抵消）不计在内

（3）　通过 $\vec{S}$ 一次的 $\vec{m}$ 可计，因此只有边界处有可能

问题变成只考虑 $\vec{S}$ 的边界。



看一个分子环流，定义为 $\vec{m}_j = i_j\vec{s}$ ，对 $d\vec{l}$ 长度边界的总的电流贡献可由下式计算：

$$\vec{m}_j \cdot d\vec{l} = i_j\vec{s}\cdot d\vec{l} = i_j \cdot d\Omega,$$

其中 $d\Omega$ 为以 s 为底以 $d\vec{l}$ 为高的柱体的体积。将所有与 $d\vec{l}$ 相交的分子环流考虑进来，则

$$\sum\overrightarrow{m_j}\cdot d\vec{l} = \sum i_j d\Omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\sum\overrightarrow{m_{\mathrm{j}}}}{d\Omega}\cdot d\vec{l} = \sum i_j = dI_m$$

即：

$$dI_m = \overrightarrow{M}\cdot d\vec{l} \qquad \leftarrow \text{磁偶极子对 } d\vec{l} \text{ 长度边界电流的贡献}$$

将整个边界考虑进去，则有总的极化电流及极化电流密度：

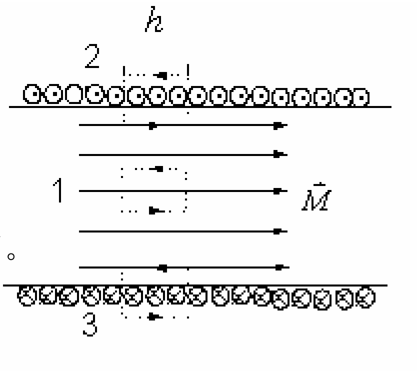
$$\boxed{\oint \overrightarrow{M}\cdot d\vec{l} = I_m = \int_S \overrightarrow{j_m}\cdot d\vec{S}}$$

作为对比，极化强度与极化电荷

$$\boxed{\oint \overrightarrow{P}\cdot d\vec{S} = -q_P = -\int_V \rho_P d\vec{r}}$$

举例应用： 应用时注意与安培环路定理 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_0$ 对比。

<u>例 1</u>．一均匀磁化的无限长圆柱磁化强度为 $\overrightarrow{M}$（来源不论）， 求空间的磁化电流分布？



解：如图作安培环路 1，2，3

（1）$I = 0$　　（2）$I_m = h\cdot M$　　（3）$I_m = -h\cdot M$

这样即可求出磁化电流分布。显然磁化电流为束缚在界面的电流，此时不宜再用体电流 j_m 刻画，可以用面电流密度刻画。

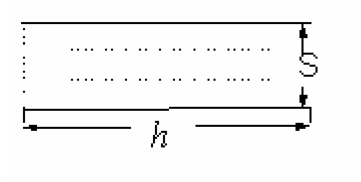
定义：面电流密度　　$J_m \cdot h = I_m \Rightarrow J_m = I_m / h$

其物理意义是：设电流均匀分布在表面的一个厚度为 δ 的薄层内，密度为 j_m，

则 $J_m \cdot h = j_m \cdot \delta \cdot h = I$，故 $J_m = j_m\delta$。

此时　$|J_m| = M$

对比　$|\sigma_P| = P$　　$\Leftarrow$　　均匀极化时极化电荷面分布



（四）介质中的磁场（完整的磁化图像）

得到了所有的碎片，与介质的极化过程类似，磁化的完整图象为：

$$\overrightarrow{B_f} \to \overrightarrow{M} = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \overrightarrow{B} \Big/ \mu_0 \to I_m = \oint \overrightarrow{M} \cdot d\vec{l} \to \overrightarrow{B_m}(I_m)$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_f} + \overrightarrow{B_m}$$

$$\overrightarrow{B_{\text{总}}} = \overrightarrow{B_f} + \overrightarrow{B_m} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_f d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_m d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$B-S$ 定理对不论传导电流（产生 $\overrightarrow{B_f}$ 的源电流或叫做传导电流），还是磁化电流（束缚电流）均成立。在稳恒条件下，安培环路定理为：

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_f + I_m) = \oint (\overrightarrow{B_f} + \overrightarrow{B_m}) \cdot d\vec{l}$$

注意到

$$\oint \overrightarrow{M} \cdot d\vec{l} = I_m$$

因此，

$$\oint \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} \right] \cdot d\vec{l} = I_f$$

引入辅助矢量 $\boxed{\overrightarrow{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M}}$

则 $\overrightarrow{H}$ 场满足的环路定理为

$$\boxed{\oint \overrightarrow{H} \cdot d\vec{l} = I_f} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{H} \text{ 场只与 } I_f \text{ 有关}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \qquad \text{与 } \vec{D} \text{ 相似，只与 } q_f \text{ 有关}$$

上面所有关系式是普适的，与介质的种类无关

对线性介质 $\overrightarrow{M} \propto \vec{B}$，根据定义 $\overrightarrow{M} = \dfrac{1}{\mu_0} \dfrac{\chi_m}{1+\chi_m} \vec{B}$，易得：

$$\overrightarrow{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \overrightarrow{M} = \frac{1+\chi_m}{\chi_m} \overrightarrow{M} - \overrightarrow{M} = \frac{1}{\chi_m} \overrightarrow{M}$$

即

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H}}$$

历史上误以为 $\overrightarrow{H}$ 为基本物理量，因此定义 $\overrightarrow{M}$ 与 $\overrightarrow{H}$ 的比为磁化率。$\overrightarrow{H}$ 的物理意义基本上可以理解成源电流产生的磁场，与 $\vec{D}$ 场在电学中的地位相似。

注意：χ_m, χ_e 的定义的不同！！

$$\overrightarrow{M} = \chi_m \overrightarrow{H} = ?\,\chi_m \frac{\overrightarrow{B_0}}{\mu_0} \qquad \leftarrow \text{ 源场}$$

$$\overrightarrow{P} = \chi_e \varepsilon_0 \overrightarrow{E} \qquad \leftarrow \text{总局域场}$$

尽管磁化强度对源场，或局域场都有线性依赖关系。显然，将 M 定义为正比于总局域场更合理、直接。进一步看 B 与 H 的关系：

$$\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{H} + \overrightarrow{M}) = \mu_0(\overrightarrow{H} + \chi_m \overrightarrow{H}) = \mu_0(1+\chi_m)\overrightarrow{H}$$

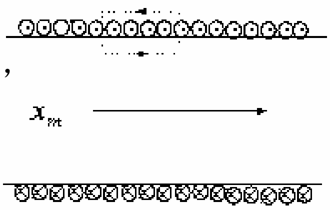
$$\overrightarrow{B} = \mu_0 \mu_r \overrightarrow{H} \qquad \mu_r = 1 + \chi_m \qquad \mu_r \text{ 是相对磁导率}$$

又一次，历史的误会，对比 $\overrightarrow{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \overrightarrow{E}$

$\left[\overrightarrow{B}, \overrightarrow{E}\right]$ 为真实场，可以产生力的场

$\left[\overrightarrow{D}, \overrightarrow{H}\right]$ 为辅助场，但 ε_r, μ_r 的定义因历史误会而不同

<u>**例 2.**</u> 将载流导线密绕在磁介质棒上，载流导线上的传导电流为 i_f，线圈密度为 n，圆柱形内部磁介质磁化率为 χ_m，求空间的 $\vec{B}$ 场分布?



解：（1）不用辅助场 $\vec{H}$ 。

求由传导电流产生的“源”磁场将介质磁化后产生的磁化电流

$$\overrightarrow{B_0} = \mu_0 n i_f \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \overrightarrow{B_0} \quad \rightarrow \quad J_m = M$$

磁化电流产生的附加磁场为：

$$\oint \vec{B}_m \cdot dl = \mu_0 I_m \quad \rightarrow \quad B_m = \mu_0 J_m = \mu_0 M$$

总磁场为源电流产生的磁场及磁化电流产生的附加场的总和：

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_m}$$

考虑到最后的磁化强度及磁化电流是由空间的总磁场决定的，故

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1+\chi_m} (\overrightarrow{B_0} + \overrightarrow{B_m}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{1+\chi_m} (\mu_0 n i_f + \mu_0 M) = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} (n i_f + M)$$

解上面这个自洽方程，得

$$M(1 - \frac{\chi_m}{1+\chi_m}) = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} n i_f \quad \Rightarrow \quad M \cdot \frac{1}{1+\chi_m} = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} n i_f$$

$$M = \chi_m \cdot n i_f$$

故空间的磁场为：

$$\vec{B} = \frac{1+\chi_m}{\chi_m}\mu_0 \vec{M} = (1+\chi_m)\mu_0 n i_f = \mu_0\mu_r n i_f = \mu n i_f$$

物理是：在这种条件下，磁化产生的磁化电流（束缚在磁介质的表面）与原来的传导电流同向，因此可以增强总磁感应场强度。

（2） 亦可应用$\vec{H}$，选取安培环路：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f \Rightarrow \vec{H} = n i_f$$

$$\vec{B} = \mu_0\mu_r \vec{H} = \mu_0\mu_r n i_f$$

用$\vec{H}$可以避免使用$\vec{M}$及i_m，及自洽过程，因而可大大简化处理。但缺点是物理意义不清晰。

习题：P820-821， Problems，4，6，9
P819， Excersies：11