

# 2018年普通高等学校招生全国统一考试

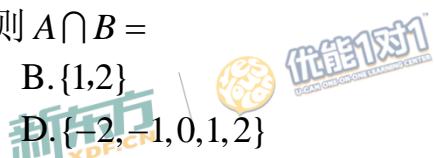
## (全国I卷)

### 文科数学

一. 选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{0, 2\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , 则  $A \cap B =$

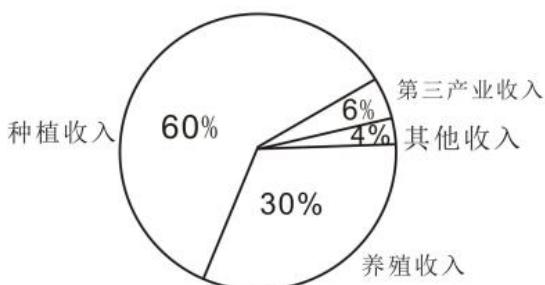
- A.  $\{0, 2\}$   
B.  $\{1, 2\}$   
C.  $\{0\}$



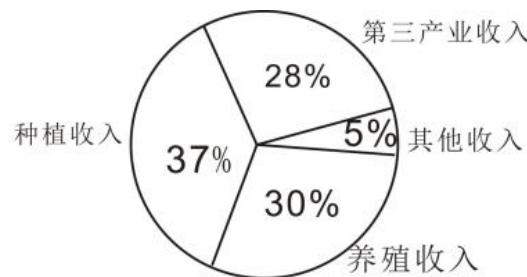
2. 设  $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$ , 则  $|z| =$

- A. 0                              B.  $\frac{1}{2}$                               C. 1                              D.  $\sqrt{2}$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍, 实现翻番, 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例



建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是

- A. 新农村建设后, 种植收入减少  
 B. 新农村建设后, 其他收入增加了一倍以上  
 C. 新农村建设后, 养殖收入增加了一倍  
 D. 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

4. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$  的一个焦点为  $(2, 0)$ , 则  $C$  的离心率为

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为  $O_1, O_2$ , 过直线  $O_1O_2$  的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形, 则该圆柱的表面积为

- A.  $12\sqrt{2}\pi$       B.  $12\pi$       C.  $8\sqrt{2}\pi$       D.  $10\pi$

6. 设函数  $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$ , 若  $f(x)$  为奇函数, 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 0)$  处的切线方程为

- A.  $y = -2x$       B.  $y = -x$       C.  $y = 2x$       D.  $y = x$

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $AD$  为  $BC$  边上的中线,  $E$  为  $AD$  的中点, 则  $\overrightarrow{EB} =$

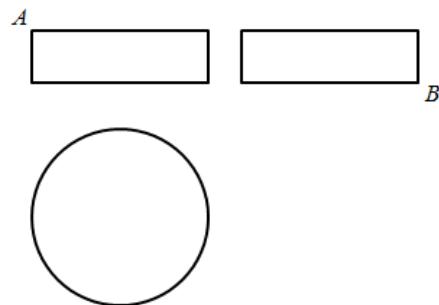
- A.  $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$   
 B.  $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$   
 C.  $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$   
 D.  $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

8. 已知函数  $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2$ , 则

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ , 最大值为 3  
 B.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ , 最大值为 4  
 C.  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ , 最大值为 3  
 D.  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ , 最大值为 4

9.某圆柱的高为2，底面周长为16，其三视图如右图.圆柱表面上的点M在正视图上的对应点为A，圆柱表面上的点N在左视图上的对应点为B，则在此圆柱侧面上，从M到N的路径中，最短路径的长度为

- A.  $2\sqrt{17}$       B.  $2\sqrt{5}$   
C. 3      D. 2



10.在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=2$ , $AC_1$ 与平面 $BB_1C_1C$ 所成的角为 $30^\circ$ ，则该长方体的体积为

- A. 8      B.  $6\sqrt{2}$       C.  $8\sqrt{2}$       D.  $8\sqrt{3}$

11.已知角 $\alpha$ 的顶点为坐标原点，始边与 $x$ 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$ ,  $B(2,b)$ ，且 $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$ ，则 $|a-b| =$

- A.  $\frac{1}{5}$       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$       D. 1

12.设函数 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ ，则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 $x$ 的取值范围是

- A.  $(-\infty, -1]$       B.  $(0, +\infty)$       C.  $(-1, 0)$       D.  $(-\infty, 0)$

## 二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$ ，若 $f(3)=1$ ，则 $a=$ \_\_\_\_\_.

14.若 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z=3x+2y$ 的最大值为\_\_\_\_\_.

15. 直线  $y = x + 1$  与圆  $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$  交于  $A, B$  两点, 则  $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$ .

16.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边为  $a, b, c$ , 已知

$b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$ ,  $b^2 + c^2 - a^2 = 8$ , 则  $\triangle ABC$  的面积为  
 $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 60 分。

17. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$ , 设  $b_n = \frac{a_n}{n}$ .

(1) 求  $b_1, b_2, b_3$ ;

(2) 判断数列  $\{b_n\}$  是否为等比数列, 并说明理由;

(3) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

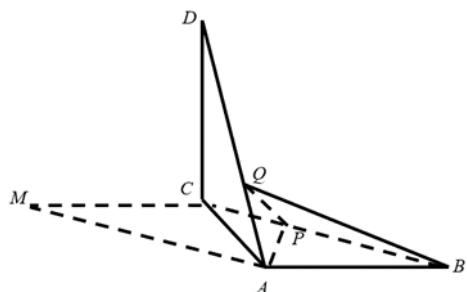
18.(12 分)

如图, 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AB = AC = 3$ ,  $\angle ACM = 90^\circ$ . 以  $AC$  为折痕将  $\triangle ACM$  折起, 使点  $M$  到达点  $D$  的位置, 且  $AB \perp DA$ .

(1) 证明: 平面  $ACD \perp$  平面  $ABC$ ;

(2)  $Q$  为线段  $AD$  上一点,  $P$  为线段  $BC$  上一点, 且  $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$ , 求三

棱锥  $Q-ABP$  的体积.



19.(12 分)

某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据(单位:  $m^3$ )和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

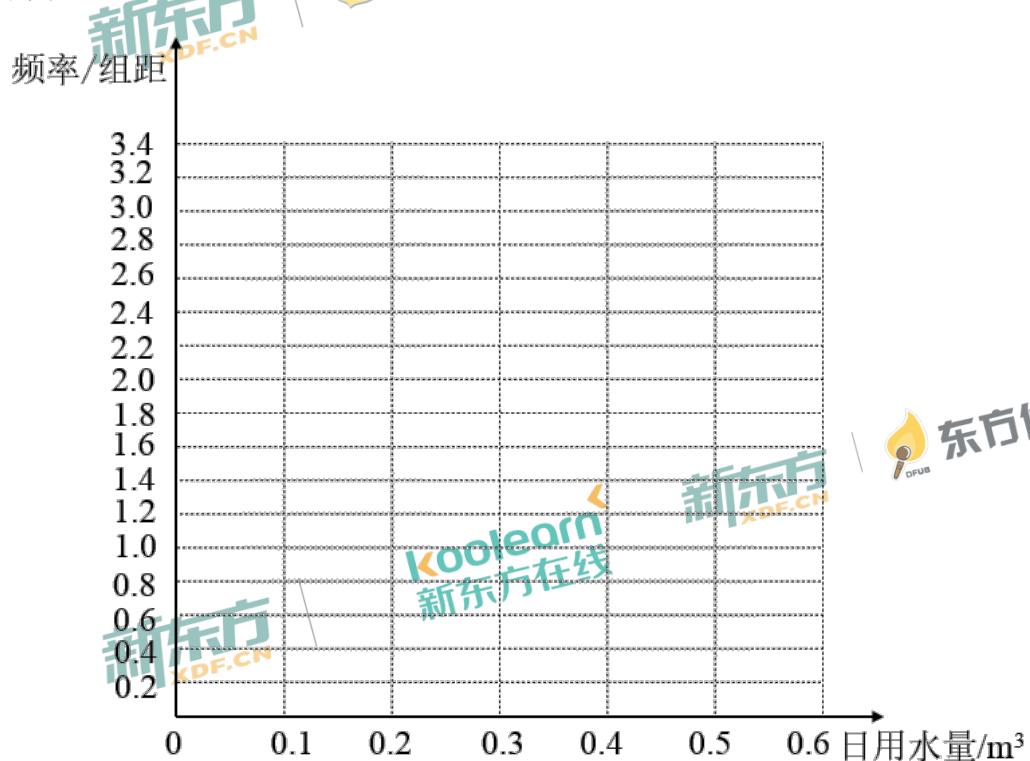
未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	[0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)
频数	1	3	2	4	9	26	5

使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	[0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	[0.5,0.6)
频数	1	5	13	10	16	5

(1)在答题卡上作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图



(2)估计该家庭使用节水龙头后, 日用水量小于  $0.35 m^3$  的概率;

(3)估计该家庭使用节水龙头后, 一年能节省多少水? (一年按 365 天计算, 同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表.)

20.(12 分)

设抛物线  $C : y^2 = 2x$ , 点  $A(2,0)$ ,  $B(-2,0)$ , 过点  $A$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $M$ ,  $N$  两点.

(1) 当  $l$  与  $x$  轴垂直时, 求直线  $BM$  的方程;

(2) 证明:  $\angle ABM = \angle ABN$ .

21.(12 分)

已知函数  $f(x) = ae^x - \ln x - 1$

(1) 若  $x = 2$  是  $f(x)$  的极值点, 求  $a$ , 并求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 证明: 当  $a \geq \frac{1}{e}$  时,  $f(x) \geq 0$ .



(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C_1$  的方程为  $y = k|x| + 2$ . 以坐标原点为极点，

$x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线  $C_2$  的极坐标方程为

$$\rho^2 + 2\rho \cos\theta - 3 = 0.$$

(1)求  $C_2$  的直角坐标方程；

(2)若  $C_1$  与  $C_2$  有且仅有三个公共点，求  $C_1$  的方程



优能1对1  
U-CAN ONE-ON-ONE LEARNING CENTER

23. [选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知  $f(x) = |x+1| - |ax-1|$ .

(1)当  $a=1$  时，求不等式  $f(x) > 1$  的解集；

(2)若  $x \in (0,1)$  时不等式  $f(x) > x$  成立，求  $a$  的取值范围



## 【参考答案】

### 一、选择题

#### 1. 【答案】A

**【解析】**  $A = \{0, 2\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  所以  $A \cap B = \{0, 2\}$ , 所以选 A

#### 2. 【答案】C

**【解析】**  $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + 2i = i$ , 设  $z = a + bi$ , 则  $a = 0, b = 1$ ,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1, \text{ 故选 C}$$

#### 3. 【答案】A

**【解析】**

A 项中, 假设原来的农村经济收入是 1, 则实现翻番后, 农村经济收入变成 2, 则种植收入由  $1 \times 0.6 = 0.6$  变为  $2 \times 0.37 = 0.74$ , 种植收入是增长的, 故 A 项错。

B 项中, 原来的其他收入是  $1 \times 0.4 = 0.4$ , 新农村建设后, 其他收入是  $2 \times 0.5 = 1.0$ , 则其他收入增加了一倍以上, 故 B 项正确。

C 项中, 原来的养殖收入是  $1 \times 0.3 = 0.3$ , 新农村建设后, 养殖收入是  $2 \times 0.3 = 0.6$ , 则养殖收入增加了一倍, 故 C 项正确。

D 项中, 新农村建设后, 其中的养殖收入与第三产业收入的总和达到了  $28\% + 30\% = 58\%$ , 超过了经济收入的一半, 故 D 项正确。

#### 4. 【答案】C

解析: 由题意知,  $b^2 = 4, c^2 = 4, a^2 = b^2 + c^2 = 8$ ,  $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

#### 5. 【答案】B

解析: 由题意知, 正方形边长为  $2\sqrt{2}$ , 故圆柱高  $h = 2\sqrt{2}$ , 底面半径

$$r = \sqrt{2}, S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi + 8\pi = 12\pi$$

## 6. 【答案】D

【解析】根据题意，由奇函数性质知， $f(-x) = -f(x)$ ，解得  $a=1$ 。又

$f'(x) = 3x^2 + 1$ ，得  $k = f'(0) = 1$ 。故  $f(x)$  在点  $(0,0)$  处的切线方程为  $y = x$ 。

## 7. 【答案】A

【解析】

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

## 8. 【答案】B

【解析】由二倍角公式可得  $f(x) = \cos 2x + 1 + \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ，化简可得

$$f(x) = \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{5}{2}$$

$$f(x)_{\max} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$$

## 9. 【答案】B

【解析】由圆柱的三视图，可还原圆柱的立体图形如图，则点 A 点 B 的位置如图所示，两点间线段最短， $ABC$  构成直角三角形， $AC$  长为圆柱的高， $CB$  的长为底面周长的  $\frac{1}{4}$ ，由勾股定理得  $AC =$

$$\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

## 10. 【答案】C

【解析】在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB \perp$  平面  $BB_1C_1C$ , 如图,

连接  $AC_1, BC_1$ ,  $\therefore AB \perp BC_1$ ,  $\angle AC_1B$  为  $AC_1$  与平面  $BB_1C_1C$  所成角,

$$\therefore \angle AC_1B = 30^\circ$$

$$\therefore \text{在 } Rt\Delta ABC_1 \text{ 中, } AC_1 = \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4,$$

$$BC_1 = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3},$$

又在长方形  $BB_1C_1C$  中,  $C_1C \perp BC$ ,

$$\text{由勾股定理得 } CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - BC^2} = \sqrt{12 - 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = AB \cdot BC \cdot CC_1 = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

所以本题选 C

## 11. 【答案】B

【解析】设 A、B 所在的直线为  $y = kx$ , 则  $k = \tan \alpha$ ,

$$\therefore a = \tan \alpha, b = 2 \tan \alpha \therefore |a - b| = |\tan \alpha|, \text{ 而 } \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2}{3}, \text{ 解出}$$

$$|\tan \alpha| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

## 12. 【答案】D

【解析】分段函数抽象不等式问题根据分段点分类讨论  $x+1, 2x$

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$\begin{cases} x+1 \leq 0 \\ 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq -1 \\ 2x < x+1 \end{cases}$$

综上， $a \in (-\infty, 0)$



## 二、填空题

13. 【答案】-7

【解析】 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$

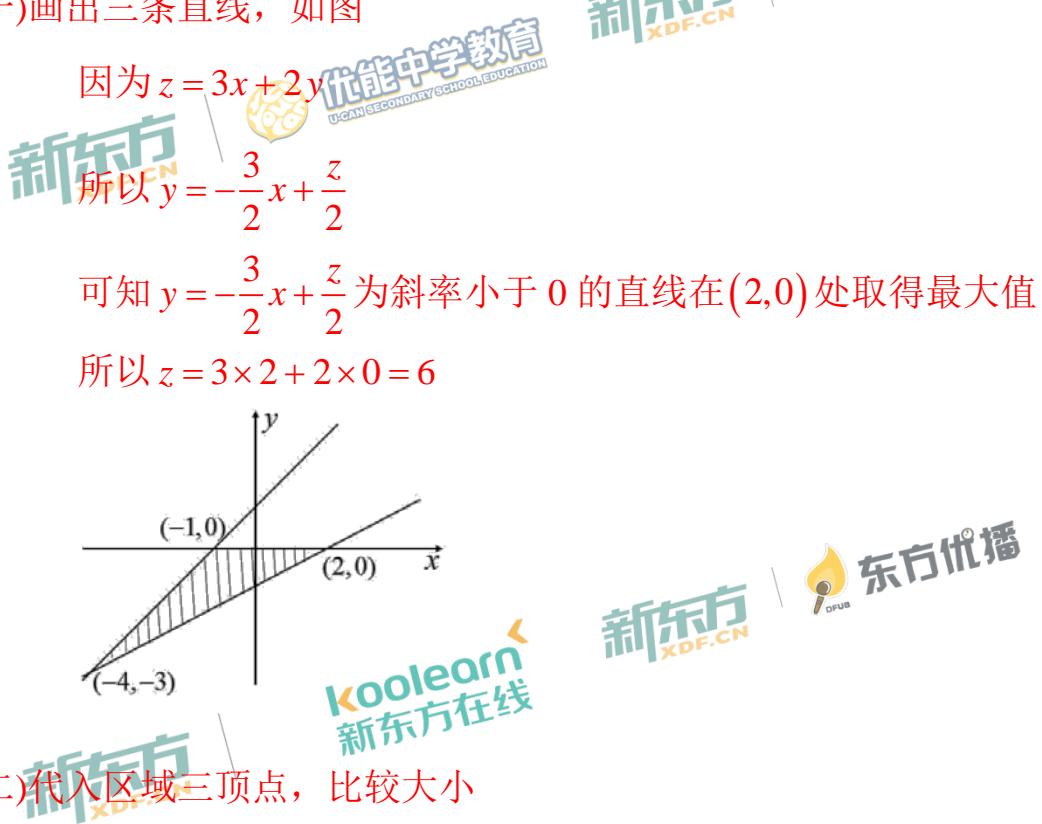
$$f(3) = \log_2(9 + a) = 1$$

$$\text{所以 } 9 + a = 2 \quad a = -7$$

14. 【答案】6

【解析】

(法一)画出三条直线, 如图



(法二)代入区域三顶点, 比较小

三顶点为  $(-4, -3)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(2, 0)$

$$z_1 = 3 \times (-4) + 2 \times (-3) = -18$$

$$z_2 = 3 \times (-1) + 2 \times 0 = -3$$

$$z_3 = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$$

取最大值为 6

15. 【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】圆  $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$  化为标准形式为  $x^2 + (y+1)^2 = 4$ , 圆心到

$$\text{直线的距离 } d = \frac{|1+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \text{ 则 } \frac{|AB|}{2} = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2},$$

$$\text{所以 } |AB| = 2\sqrt{2}$$

16. 【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】由正弦定理推论得

$$\sin B \sin C + \sin C \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C,$$

因为  $B, C$  为三角形内角, 故  $\sin B \neq 0, \sin C \neq 0$

$$\text{则由 } 2 \sin B \sin C = 4 \sin A \sin B \sin C \text{ 得 } \sin A = \frac{1}{2},$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A = 8, \text{ 得}$$

$$bc = \frac{4}{\cos A} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



koolearn  
新东方在线



### 三、解答题

17. 【答案】(1)  $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4$  (2) 是 (3)  $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

#### 【解析】

$$\text{解: (1)} b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$$

$$b_2 = \frac{a_2}{2}, a_2 = 2(1+1)a_1 = 4, \therefore b_2 = 2$$

$$b_3 = \frac{a_3}{3}, 2a_3 = 2(2+1)a_2, \therefore a_3 = 12, \therefore b_3 = 4$$

$$(2) b_n = \frac{a_n}{n}, b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$\therefore na_{n+1} = 2(n+1)a_n$$

$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$$

$\therefore$  数列  $\{b_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列;

$$(3) b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\text{又} \because b_n = \frac{a_n}{n}$$

$$\therefore a_n = n \cdot b_n \quad \therefore a_n = n \cdot 2^{n-1}$$

18. 【答案】(1) 见解析

(2) 1

(1) 证明:  $\because$  四边形  $ABCM$  是平行四边形,  $\angle ACM = 90^\circ$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACM = 90^\circ$$

即  $AB \perp AC$

又  $\because AB \perp DA$

$$AC \cap DA = A$$

$$AC \subset \text{平面} ACD$$

$$DA \subset \text{平面} ACD$$

$$\therefore AB \perp \text{平面} ACD$$

又 $\because AB \subset \text{平面}ABC$

$AB \not\subset \text{平面}ACD$

$\therefore \text{平面}ABC \perp \text{平面}ACD$

(2) 过点 $Q$ 作 $QH \perp AC$ 于 $H$

$\because \text{平面}ABC \perp \text{平面}ACD$

$\text{平面}ABC \cap \text{平面}ACD = AC$

$DC \perp AC$

$\therefore DC \perp \text{平面}ABC$

又 $\because QH \perp AC$

$\therefore QH // DC$

$\therefore QH$ 为三棱锥 $Q-ABP$ 的高,  $QH = \frac{1}{3}DC = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

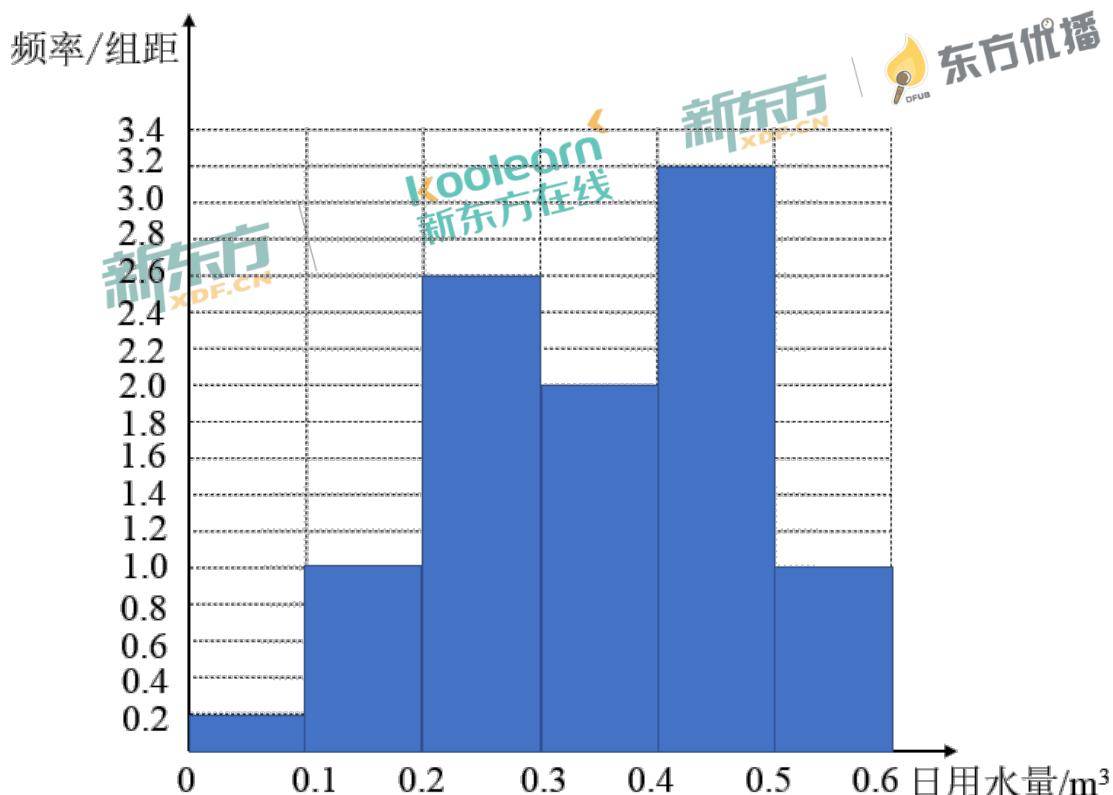
$$S_{\triangle ABP} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 3$$

$$\therefore V_{Q-ABP} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABP} \times QH = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1$$

19. 【答案】(1)见解析 (2)0.48 (3) $47.45 m^3$

【解析】

(1)



(2) 设“日用水量小于  $0.35m^3$ ”为 A 事件，则

$$P(A) = 0.1 \times 0.2 + 0.1 \times 1 + 0.1 \times 2.6 + 0.05 \times 2 = 0.48$$

(3) 50 天未使用节水龙头的用水量为：

$$0.05 \times 1 + 0.15 \times 3 + 0.25 \times 2 + 0.35 \times 4 + 0.45 \times 9 + 0.55 \times 26 + 0.65 \times 5 = 24m^3$$

50 天未使用节水龙头的用水量为：

$$0.05 \times 1 + 0.15 \times 5 + 0.25 \times 13 + 0.35 \times 10 + 0.45 \times 16 + 0.55 \times 5 = 17.5m^3$$

50 天节约用水量为：  $24 - 17.5 = 6.5m^3$

一年节约用水量为：  $\frac{365}{50} \times 6.5 = 47.45m^3$



20. 【答案】(1)  $y = \frac{1}{2}x + 1$  或  $y = -\frac{1}{2}x + 1$  (2) 见解析

【解析】(1) 当  $l$  与  $x$  轴垂直时， $l$ :  $x = 2$ .

**新东方** 令  $x = 2$ ,  $y_M = \pm 2$

$\therefore M(2, 2)$  或  $(2, -2)$

$\therefore$  直线  $BM$ :  $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$  或  $y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 2)$

即  $y = \frac{1}{2}x + 1$  或  $y = -\frac{1}{2}x - 1$

(2) 证明：

由题可得：设  $l: x = ty + 2$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

**新东方**  $\begin{cases} x = ty + 2 \\ y^2 = 2x \end{cases}$  得  $y^2 - 2ty - 4 = 0$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2t \\ y_1 \cdot y_2 = -4 \end{cases}$$

$\therefore M, N$  在  $x$  轴的上下两侧，欲证  $\angle ABM = \angle ABN$

需证：  $k_{BM} + k_{BN} = 0$

$$k_{BM} = \frac{y_1}{x_1 + 2}, \quad k_{BN} = \frac{y_2}{x_2 + 2}, \quad \text{即 } \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 k_{BM} + k_{BN} &= \frac{y_1(x_2+2) + y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + 2(y_1 + y_2)}{(x_1+2)(x_2+2)} \\
 &= \frac{(ty_2+2) \cdot y_1 + (ty_1+2) \cdot y_2 + 2(y_1 + y_2)}{(x_1+2)(x_2+2)} \\
 &= \frac{2ty_1y_2 + 4(y_1 + y_2)}{(x_1+2)(x_2+2)} = \frac{-8t + 8t}{(x_1+2)(x_2+2)} = 0
 \end{aligned}$$

得证，即  $k_{BM} + k_{BN} = 0$

$$\therefore \angle ABM = \angle ABN$$

## 21. 【答案】见解析

**【解析】**

$$(1) f(x) \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), \quad f'(x) = ae^x - \frac{1}{x};$$

$$\text{由题可知: } f'(2) = ae^2 - \frac{1}{2} = 0, \therefore a = \frac{1}{2e^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \ln x - 1 (x > 0) \quad f'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 2e^2}{2e^2x}$$

$\because x > 0 \therefore \frac{1}{2e^2}e^x$  为增函数,  $\frac{1}{x}$  为减函数.

$\therefore 2$  为  $f'(x)$  的唯一零点.

当  $x \in (0, 2)$  时,  $f'(x) < 0$  时,  $(0, 2)$  为单调减区间;

当  $x \in (2, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$  时,  $(2, +\infty)$  为单调增区间.

$$(2) f(x) = ae^x - \ln x - 1 (x > 0);$$

$$f'(x) = \frac{axe^x - 1}{x} \text{ 令 } g(x) = axe^x - 1, g'(x) = ae^x(x+1)$$

令  $g'(x) = 0, x = -1, \therefore g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

$\therefore g_{\min}(x) = g(0) = -1 \therefore f'(x)$  有零点.

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 即 } \frac{axe^x - 1}{x} > 0 \because a \geq \frac{1}{e} \therefore \text{求得 } x = 1$$

$\therefore f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增.

$\therefore f_{\min}(x) = f(1) = ae - 1, \therefore f_{\min}(x) \geq 0.$

22. 【答案】(1)  $(x+1)^2 + y^2 = 4$  (2)  $y = -\frac{4}{3}|x| + 2$

### 【解析】

(1)由题意可知:

曲线  $C_2$  的直角坐标方程为  $(x+1)^2 + y^2 = 4$ .

(2) 曲线  $C_2$  是以  $(-1, 0)$  为圆心, 半径  $r=2$  的圆

曲线  $C_1$  过定点  $(0, 2)$

若  $C_1$  与  $C_2$  有且仅有三个公共点, 即  $x > 0$  时,  $C_1$  与  $C_2$  相切

当  $x > 0$  时,  $C_1$  方程为  $kx - y + 2 = 0$

圆心到  $C_1$  距离  $d = \frac{|-k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$

解得  $k = -\frac{4}{3}$  或  $k = 0$

当  $k = 0$  时, 不满足有三个交点, 所以  $k = -\frac{4}{3}$

$C_1$  方程为  $y = -\frac{4}{3}|x| + 2$

### 23. 【答案】

(1)  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  (2)  $a \in (0, 2]$

### 【解析】

(1) 当  $a=1$  时,  $|x+1| - |x-1| > 1$

(i) 当  $x \leq -1$  时,

$$-x-1-(1-x)-1 > 0$$

解得:  $-3 > 0$ , 不成立

$\therefore$  此时无解

(ii) 当  $-1 < x < 1$  时

$$x+1-(1-x)-1 > 0$$

解得:  $2x > 1$

$$\therefore x > \frac{1}{2}$$

又  $\because -1 < x < 1$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 1$$

(iii) 当  $x \geq 1$  时

$$x+1-(x-1)-1 > 0$$

解得:  $1 > 0$ , 恒成立

$$\therefore x \geq 1$$

综上所述, 原不等式的解集为  $(\frac{1}{2}, +\infty)$

(2) 当  $x \in (0,1)$  时

$$f(x) = x+1 - |ax-1| > x$$

$$\therefore 1 - |ax-1| > 0$$

$$\therefore |ax-1| < 1$$

$$\therefore -1 < ax-1 < 1$$

$$0 < ax < 2$$

$$\therefore a > 0 \text{ 且 } a < \frac{2}{x}$$

$g(x) = \frac{2}{x}$  在  $(0,1)$  单调递减

$$\therefore g(x) < \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore a \in (0,2]$$