一、判断题

1.设$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},a_{i4},a_{i5}),i=1,2,3;\beta_j=(a_{1j},a_{2j},a_{3j}),j=1,2,3$

正确！如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线形相关，则$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线形相关.

如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线形相关，齐次线性方程$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} \end{bmatrix}x=0$有非零解

所以秩$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} \end{bmatrix}<3$,所以秩$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\langle 3$，那么齐次线性方程

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}x=0$也有非零解，所以$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线形相关

2.设A,B都是n阶正定的矩阵，则AB也是正定的.

错误！设$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$AB=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，显然$AB$非对称

3.如果n阶方阵A，B有完全相同的特征值，则A，B相似.

错误！$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A$，$B$有完全相同的特征值，但$A$，$B$不相似

4.V_1，V_2，V_3*是线性空间V的子空间，而且任意两*个*的交为0*，则$V_1+V_2+V_3$是直和。正确！

5.设V是数域P上的有限维线性空间,$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$都是$V$上的线性变换，并$\underline{A}$不是零变换

如果$\underline{AB}=\underline{AC}$，则$\underline{B}=\underline{C}$.

错误！设V是数域P上的二维线性空间,定义$\underline{A},\underline{B},\underline{C}$都是$V$上的线性变换

$\underline{A}\varepsilon_1=\varepsilon_1,\underline{A}\varepsilon_2=0;\underline{B}\varepsilon_1=\varepsilon_1,\underline{B}\varepsilon_2=\varepsilon_2;\underline{C}\varepsilon_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\underline{C}\varepsilon_2=0$

得出$\underline{AB}=\underline{AC}$，但$\underline{B}!=\underline{C}$

,

二、填空

1.$f(x)=x^6-10x^5+6x^4\_310x^3-580x^2+20x-1115$

则$f(12)=\underline{2005}$

2.$D=\begin{vmatrix}2&0&0&3\\1&1&2&0\\2&4&6&8\\1&3&5&7\end{vmatrix}$,则$A_{41}+2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}=0$

3.$A=diag(1,2,-1),B=diag(-1,2,1),C=diag(1,-2,-1),D=diag(2,3,-1)$

$G=diag(1,2,0)$,在实数域上，B，D，C，G中，

与A相似的矩阵是：B

与A合同，但不相似的矩阵是：D

与A等价，但不合同，也不相似的矩阵是：C

4.$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&1&0\\3&4&2\end{pmatrix}$，$B=A^3+4A^2-3E,\det(B)=?(210)$

5.A是三级正交矩阵，迹为$\frac{1}{3}$,$|A|=1$，则A的特征多项式为？若当标准型为？

$f(\lambda)=(\lambda+\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}i}{3})(\lambda+\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}i}{3})(\lambda-1)$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}i}{3}&0\\0&0&-\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}i}{3}\end{pmatrix}$$

三、用正交线性变换将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1{}^2+5x_2{}^2+5x_3{}^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$化为标准型，并写出正交线性变换

该二次型对应的矩阵A=$\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

$\det(\lambda E-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

(i)当$\lambda=10$，对应的特征向量$\alpha_1=(1,2,-2)'$

(ii)当$\lambda=1$，对应的特征向量$\alpha_2=(-2,1,0)',\alpha_3=(2,0,1)'$

然后用施密特法正交化

$\beta_1=(1,2,-2)';\beta_2=(-2,1,0)';\beta_3=(2,4,5)'$

令$C=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,变换$X=CY$

四、设A，B都是数域上的n阶方阵，A有n个不同的特征值，AB = BA

证明B相似于对角阵

由于A有n个不同的特征值，所以A可以对角化

也就是存在可逆矩阵T，使得$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\lambda_1,\cdots$，$\lambda_n$互不相同

由于$AB=BA$，所以$T^{-1}ATT^{-1}BT=T^{-1}BTT^{-1}AT$

即$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}T^{-1}BT=T^{-1}BT\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$,

设$T^{-1}BT=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，所以$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

化简得出$T^{-1}BT=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$为对角阵，即$\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$，即证

五、设m(λ)是数域P上n阶方阵A的最小多项式，$f(\lambda)$是数域P上的任意多项式

证明：$f(A)$可逆$\Leftrightarrow(m(\lambda),f(\lambda))=1$

(i)若$(m(\lambda),f(\lambda))=1$,所以存在多项式$\mu(\lambda),\nu(\lambda)$,使得

$\mu(\lambda)m(\lambda)+\nu(\lambda)f(\lambda)=1$,所以$\mu(A)m(A)+\nu(A)f(A)=E$

又因为$m(A)=0$,所以$\nu(A)f(A)=E,|\nu(A)||f(A)|=|E|=1$

所以$f(A)!=0$,从而$f(A)$可逆

(ii)*若f(A)可逆*，设$(m(\lambda),f(\lambda))=d(\lambda)$

$\therefore d(\lambda)\mid m(\lambda),d(\lambda)\mid f(\lambda)$

如果λ_0是$d(\lambda)=0$的一个解，那么λ_0是$m(\lambda)=0$的一个解

也就意味着λ_0是A的一个特征值，且$d(\lambda_0)$是$d(A)$的一个特征值

所以$|d(A)|=0$, 由于$d(\lambda)\mid f(\lambda)$，所以$|f(A)|=0$,这与$f(A)$可逆矛盾

$d(\lambda)=1$