共 4 题，44 分

课后作业

一、解答

1 （8分）已知函数$f(x)=\dfrac{ae^x}{x}$ $(a\in\mathbf{R},a\neq 0)$．当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)\geqslant 1$恒成立，求a的取值范围．

答案 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$．

解析 当$x\in(0,+\infty)$时，要使$f(x)=\dfrac{a\cdot e^x}{x}\geqslant 1$恒成立，

方法一：

即使$a\geqslant\dfrac{x}{e^x}$在$x\in(0,+\infty)$时恒成立． 设$g(x)=\dfrac{x}{e^x}$，则$g'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$．

可知在$0<x<1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$为增函数；

$x>1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数．

则$g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$．从而$a\geqslant\dfrac{1}{e}$．

方法二：

（1）当$a<0$时，$f(a)=e^a<1$，所以$f(x)\geqslant 1$不恒成立．

（2）当$a>0$且$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)=\dfrac{ax\cdot e^x-ae^x}{x^2}=\dfrac{ae^x(x-1)}{x^2}$，故函数$f(x)$的单调增区间为$(1,+\infty)$，单调减区间为$(0,1)$，所以函数$f(x)$的最小值为$f(1)=ae$，依题意$f(1)=ae\geqslant 1$，解得$a\geqslant\dfrac{1}{e}$．

综上所述，$a\geqslant\dfrac{1}{e}$．

考点
- 函数
  - 导数
    - 导数的应用

└导数与单调性

└导数的运算

├导数的概念及其意义

└函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

2 （12分）设函数$f(x)=x^2+ax-\ln x\,(a\in\mathbf{R})$.

（1） （4分）若函数$f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数，求实数a的取值范围.

（2） （8分）过坐标原点O作曲线$y=f(x)$的切线，证明：切点的横坐标为1.

答案 （1） $a\leqslant -1$.

（2） 证明过程见解析.

解析 （1） $f\prime(x)=2x+a-\dfrac{1}{x}$,

$\because f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数,

$\therefore f\prime(x)\leqslant 0$对任意$x\in(0,1]$恒成立,

即$2x+a-\dfrac{1}{x}\leqslant 0$对任意$x\in(0,1]$恒成立,

$\therefore a\leqslant\dfrac{1}{x}-2x$对任意$x\in(0,1]$恒成立,

令$g(x)=\dfrac{1}{x}-2x$,

$\therefore a\leqslant g(x)_{\min}$,

易知$g(x)$在$(0,1]$单调递减,

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=-1$.

$\therefore a\leqslant -1$.

（2） 设切点为$M(t,f(t))$，$f'(x)=2x+a-\dfrac{1}{x}$,

切线的斜率$k=2t+a-\dfrac{1}{t}$，又切线过原点$k=\dfrac{f(t)}{t}$,

$\dfrac{f(t)}{t}=2t+a-\dfrac{1}{t}$，即：$t^2+at-\ln t=2t^2+at-1$,

$\therefore t^2-1+\ln t=0$,

存在性：$t=1$满足方程$t^2-1+\ln t=0$,

$\therefore t=1$是方程$t^2-1+\ln t=0$的根.

再证唯一性：设$\varphi(t)=t^2-1+\ln t$，$\varphi'(t)=2t+\dfrac{1}{t}>0$,

φt在$(0,+\infty)$单调递增，且$\varphi(1)=0$,

$\therefore$方程$t^2-1+\ln t=0$有唯一解.

考点

- 函数
  - 函数及其表示
    - 函数的值域
  - 函数的性质
    - 单调性
  - 函数的应用
    - 函数的零点
- 导数
  - 导数的应用
    - 导数与极值
    - 导数与单调性
  - 导数的概念及其意义
    - 函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率
  - 导数的运算

3 （12分）已知函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

（1） （4分）若曲线$y=f(x)$与直线$y=kx$相切于点P，求点P的坐标.

（2）（8分）当$a \leqslant e$时，证明：当$x \in (0,+\infty)$，$f(x) \geqslant a(x-\ln x)$.

答案 （1）$(2,\dfrac{e^2}{2})$.

（2）证明见解析.

解析 （1）设点P的坐标为(x_0,y_0)，$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$，

由题意知$\begin{cases}\dfrac{e^{x_0}(x_0-1)}{{x_0}^2}=k,\\ \dfrac{e^{x_0}}{x_0}=kx_0,\end{cases}$解得$x_0=2$，所以$y_0=\dfrac{e^{x_0}}{x_0}=\dfrac{e^2}{2}$，

从而点P的坐标为$(2,\dfrac{e^2}{2})$.

（2）设函数$g(x)=f(x)-a(x-\ln x)=\dfrac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$，

$g'(x)=\dfrac{(e^x-ax)(x-1)}{x^2}$，$x \in (0,+\infty)$，

设$h(x)=e^x-ax$，$x \in (0,+\infty)$，则$h'(x)=e^x-a$，

①当$a \leqslant 1$时，因为$x>0$，所以$e^x>1$，所以$h'(x)=e^x-a>0$，

所以$h(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，所以$h(x)>h(0)=1>0$；

②当$1<a \leqslant e$时，令$h'(x)=0$，则$x=\ln a$，

所以$x \in (0,\ln a)$，$h'(x)<0$；$x \in (\ln a,+\infty)$，$h'(x)>0$.

所以$h(x) \geqslant h(\ln a)=a(1-\ln a) \geqslant 0$，

由①②可知：$x \in (0,+\infty)$时，有$h(x) \geqslant 0$，

所以有：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小值	↗

所以$g(x)_{\min}=g(1)=e-a \geqslant 0$，从而有当$x \in (0,+\infty)$时，$f(x) \geqslant a(x-\ln x)$.

考点

- 函数
- 导数
  - 导数的应用
    - 导数与极值
    - 导数与单调性

—导数的概念及其意义
　└—函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率

4 （12分）已知函数$f(x)=x\ln x$，$g(x)=x^3+ax^2-x+2$.

（1）（3分）如果函数$g(x)$的单调区间为$\left(-\frac{1}{3},1\right)$，求函数$g(x)$的解析式.

（2）（4分）在（Ⅰ）的条件下，求函数$g(x)$的图像过点$P(1,1)$的切线方程.

（3）（5分）对于任意的$x\in(0,+\infty)$，若不等式$2f(x)\leqslant g'(x)+2$恒成立，求实数a的取值范围.

答案

（1）$g(x)=x^3-x^2-x+2$

（2）$y=1$或$y=2-x$

（3）$[-2,+\infty)$

解析

（1）$g(x)=x^3+ax^2-x+2$的导数为$g'(x)=3x^2+2ax-1$,

由题意可得函数$g(x)$的单调减区间为$(-\frac{1}{3},1)$,

所以$x=-\frac{1}{3}$与$x=1$是方程$g'(x)=3x^2+2ax-1=0$的两个根,

由韦达定理有$-\frac{2a}{3}=-\frac{1}{3}+1$

解得$a=-1$，所以$g(x)=x^3-x^2-x+2$.

（2）设过$P(1,1)$的$g(x)$的切线的切点为(s,s^3-s^2-s+2),

由$g'(x)=3x^2-2x-1$，可得切线的斜率为$3s^2-2s-1$,

则切线的方程为$y-1=\left(3s^2-2s-1\right)(x-1)$,

代入切点的坐标，可得$s^3-s^2-s+1=\left(3s^2-2s-1\right)(s-1)$,

化简为$s(s-1)^2=0$，解得$s=0$或1,

即有切线的斜率为-1或0,

则切线的方程为$y=1$或$y=2-x$.

（3）任意的$x\in(0,+\infty)$,不等式$2f(x)\leqslant g'(x)+2$恒成立,

即为$2x\ln x\leqslant 3x^2+2ax+1$对$x\in(0,+\infty)$恒成立,

即有$2a>\dfrac{2x\ln x-3x^2-1}{x}$对$x\in(0,+\infty)$恒成立.

设$h(x)=\dfrac{2x\ln x-3x^2-1}{x}$,

$h'(x)=\dfrac{2x(1+\ln x)-6x^2-\left(2x\ln x-3x^2-1\right)}{x^2}=-\dfrac{(3x+1)(x-1)}{x^2},(x>0)$

可得当$x>1$时，$h'(x)<0$，$h(x)$递减；

当$0<x<1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增.

即有$h(x)$在$x=1$处取得极大值，且为最大值-4,

故只要$2a\geqslant-4$，解得$a\geqslant-2$.

则a的取值范围是$[-2,+\infty)$.

考点

- 函数
- 导数
  - 导数的应用
    - 导数与单调性
  - 导数的概念及其意义
    - 函数的平均变化率、瞬时速度与瞬时变化率