

2017~2018学年广东广州海珠区高二上学期文科期末数学试卷

一、选择题 (本大题共12小题, 每小题5分, 共计60分)

1 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心率是 () .

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

答案 B

解析

$$\because a^2 = 4, b^2 = 3,$$

$$\therefore a = 2, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1.$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}. \text{ 故选B.}$$

故选B.

考点 一解析几何

—椭圆

└ 椭圆的离心率

2 已知命题 p : 若 $x < y$, 则 $x^2 < y^2$; 命题 q : 若 $x > y$, 则 $-x < -y$; 在命题:

① $p \wedge q$; ② $p \vee q$; ③ $(\neg p) \wedge q$; ④ $p \vee (\neg q)$ 中, 真命题是 () .

A. ①③

B. ①④

C. ②③

D. ②④

答案 C

解析

命题 p :若 $x < y$, 则 $x^2 < y^2$,

$\therefore x, y$ 若都为负数,

$x^2 > y^2$,

$\therefore p$ 为假命题, $\neg p$ 为真命题.

命题 q : $\therefore x > y, -x < -y$,

$\therefore q$ 为真命题, $\neg q$ 为假命题.

则 $p \wedge q$ 为假, $p \vee q$ 为真, $(\neg p) \wedge q$ 为真, $p \vee (\neg q)$ 为假,

②③为真, ①④为假, 故选C.

考点

一集合与常用逻辑用语

├常用逻辑用语

└简单的逻辑联结词

3

设平面 α, β , 直线 $a, b, a \subset \alpha, b \subset \alpha$, 则“ $a // \beta, b // \beta$ ”是“ $a // \beta$ ”的().

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案

B

解析

\therefore 直线 a, b 为平面 α 内两条相交直线时,

$a // \beta, b // \beta$,

$\therefore a // \beta$.

$a \subset \alpha, b \subset \alpha, b // \beta$ 无法推出 $a // \beta$.

$\therefore a // \beta, a \subset \alpha, b \subset \alpha$,

$\therefore a // \beta, b // \beta$,

则“ $a // \beta, b // \beta$ ”是“ $a // \beta$ ”的必要而不充分条件.

故选B.

考点

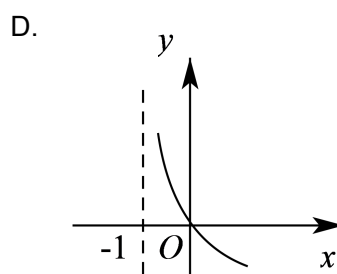
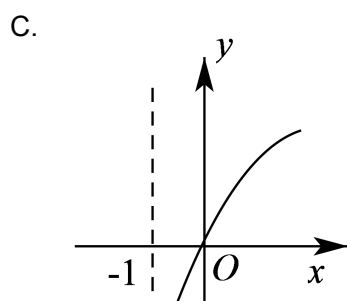
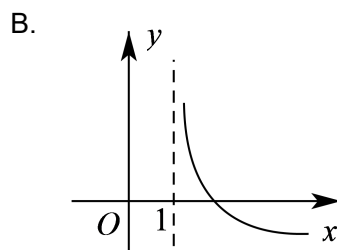
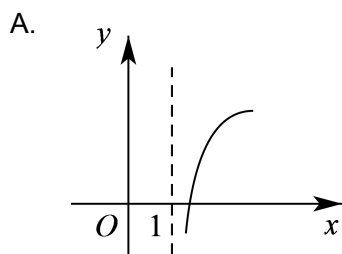
├集合与常用逻辑用语

常用逻辑用语
 充要条件

立体几何与空间向量

立体几何初步
 空间中的平行

4 若函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 是定义域为 \mathbf{R} 的减函数, 则函数 $f(x) = \log_a(x - 1)$ 的图象大致是 () .



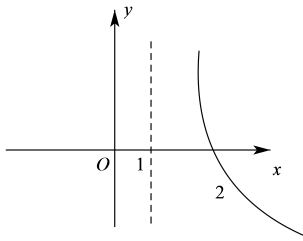
答案 B

解析 $\because f(x) = a^x$ 是 \mathbf{R} 上的减函数,

$\therefore 0 < a < 1$.

$f(x) = \log_a(x - 1)$ 的图象可看作由 $y = \log_a x$ 向右平移 1 个单位长度得到的图象.

故选 B.

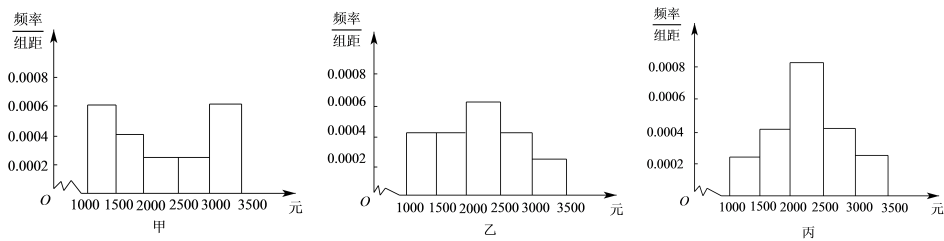


考点 一函数与导数

对数函数

对数函数的概念、图象及其性质

5 为了了解本市居民的生活成本，甲、乙、丙3名同学利用假期分别对3个社区进行了“家庭月日常消费额”的调查。他们将调查所得到的数据分别绘制成频率分布直方图（如图所示），记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为 s_1, s_2, s_3 ，则它们的大小关系为（ ）。



- A. $s_3 < s_2 < s_1$ B. $s_2 < s_3 < s_1$ C. $s_3 < s_1 < s_2$ D. $s_2 < s_1 < s_3$

答案 A

解析 本题主要考查频率分布直方图和标准差。根据频率分布直方图知，甲的数据的两端的数字较多，绝大部分数都处在两端，离平均值较远，表现的最分散，标准差最大；乙的数据，数的分布均匀，不如甲组中偏离平均值大，标准差比甲组中的小；丙的数据绝大部分数都在平均值左右，数据表现的最集中，方差最小。故本题正确答案为 $s_1 > s_2 > s_3$ 。

故选A。

考点 一统计

用样本估计总体

频率分布表、直方图、折线图

6 已知向量 $\vec{a} = (\cos x, 1)$, $\vec{b} = (\cos x, -1)$, 设函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b}$, 则 () .

- A. $f(x)$ 为偶函数且最小正周期为 π B. $f(x)$ 为奇函数且最小正周期为 π
 C. $f(x)$ 为偶函数且最小正周期为 2π D. $f(x)$ 为奇函数且最小正周期为 2π

答案 A

解析 $\because \vec{a} = (\cos x, 1), \vec{b} = (\cos x, -1),$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos^2 x - 1 \\ &= \frac{1 + \cos 2x}{2} - 1 \\ &= \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

则 $f(x)$ 为偶函数, 且最小正周期为 π ,

故选 A.

考点 一 三角函数与解三角形

├ 三角函数

└ 三角函数图象与性质

7 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_n + 3}{a_{n+1} + 3} = \frac{1}{2}$, 且 $a_1 = 1$, 则 $a_5 = ()$.

- A. $-\frac{5}{2}$ B. 125 C. 61 D. $-\frac{23}{8}$

答案 C

解析 $\because \frac{a_n + 3}{a_{n+1} + 3} = \frac{1}{2},$

$$\therefore 2a_n + 6 = a_{n+1} + 3,$$

$$\frac{a_{n+1} + 3}{a_n + 3} = 2,$$

$\therefore \{a_n + 3\}$ 为以4为首项, 以2为公比的等比数列,

$$a_n + 3 = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

$$a_n = 2^{n+1} - 3$$

$$a_5 = 61$$

故选C.

考点 一数列

—等比数列

—等比数列的概念和通项

8 以下茎叶图记录了甲、乙两组各5名学生在一次英语听力测试中的成绩(单位:分). 已知甲组数据的中位数为15, 乙组数据的平均数为16.8, 则 x, y 的值分别为().

甲组	乙组
9 0	9
x 2	1 5 y 8
7 4	2 4

A. 2, 5

B. 5, 5

C. 5, 8

D. 8, 8

答案 C

解析 结合茎叶图上的原始数据, 根据中位数和平均数的概念列出方程进行求解.

由于甲组数据的中位数为 $15 = 10 + x \therefore x = 5$.

又乙组数据的平均数为 $\frac{9 + 15 + (10 + y) + 18 + 24}{5} = 16.8$,

$\therefore y = 8$. $\therefore x, y$ 的值分别为5, 8.

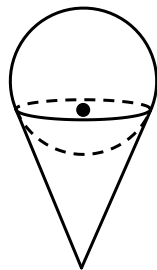
考点 一统计

—用样本估计总体

—茎叶图

—样本数据的基本数字特征

- 9 如图所示,圆锥的底面半径为1,母线长为2,在圆锥上方嵌入一个半径为 r 的球,使圆锥的母线与球面相切,切点为圆锥母线的端点,则该球的表面积为().



- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. 3π C. 4π D. $\frac{16\pi}{3}$

答案 D

解析 设球心为 O ,圆锥的顶点为 D ,

圆锥的底面圆的圆心为 C ,直径为 AB , $AC = BC = 1$, $AD = 2$, $AO = r$,

$$\therefore CD = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore AO \perp AD, AB \perp OD,$$

$$\therefore CO = \frac{AC^2}{CD} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$r = AO = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$S_{\text{表}} = 4\pi r^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

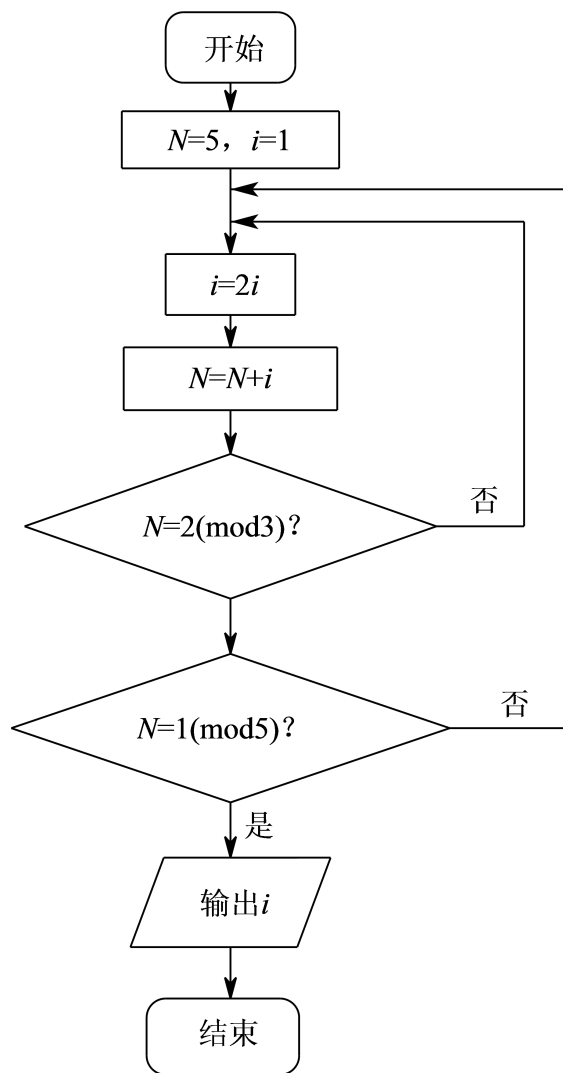
故选D.

考点 一立体几何与空间向量

—立体几何初步

└空间几何体体积和表面积的计算

- 10 若正整数 N 除以正整数 m 后的余数为 r ,则记为 $N = r \pmod{m}$,例如 $10 = 2 \pmod{4}$.下列程序框图的算法源于我国古代算术《中国剩余定理》,则执行该程序框图输出的 i 等于().



A. 2

B. 4

C. 8

D. 11

答案 B

解析 执行程序框图.

第一次执行循环体, $i = 2$, $N = 7$, 不满足 $N = 2(\bmod 3)$, $N = 1(\bmod 5)$

第二次执行循环体, $i = 4$, $N = 11$, 满足

故输出 i 等于 4. 选 B.

故选 B.

考点 一算法与框图

框图

流程图

11 已知正三棱锥 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = BB_1 = 2$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为

() .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{4}$

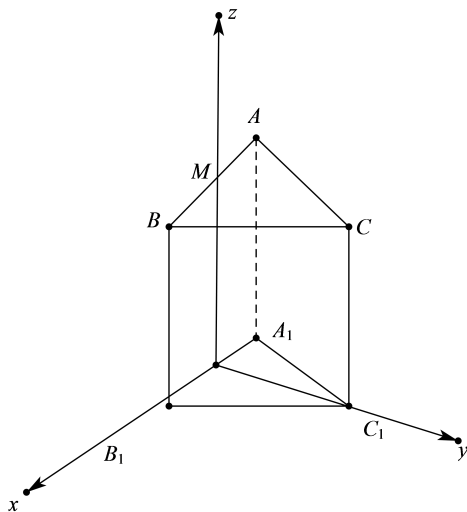
答案 D

解析 如图, 取 A_1B_1 的中点 O , 以 OB_1, OC, OM 为 xyz 轴建系,

AB 中点 M ,

$$A(-1, 0, 2), B_1(1, 0, 0), B(1, 0, 2), C_1(0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AB_1} = (2, 0, -2), \overrightarrow{BC_1} = (-1, \sqrt{3}, -2)$$

$$, \cos\langle\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{BC_1}\rangle = \frac{-2 + 4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$



故选D.

考点 一立体几何与空间向量

—空间向量

└空间向量的应用

12 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq 0 \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - k$ 有2个零点, 则实数 k 的取值范围为 () .

A. $(0, +\infty)$

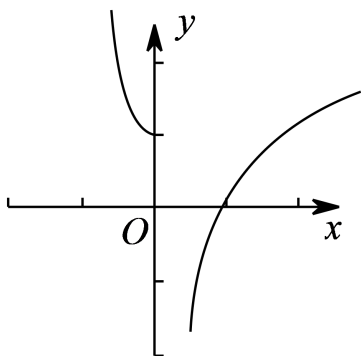
B. $[1, +\infty)$

C. $(0, 1)$

D. $(1, +\infty)$

答案 B

解析 解: 如图:



根据题意, 函数 $g(x) = f(x) - k$ 有两2零点, 即方程 $f(x) - k = 0$ 有两个根,

则函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq 0 \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$ 与直线 $y = k$ 有两个交点,

则函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq 0 \\ \lg x, & x > 0 \end{cases}$ 的图像如图:

若与直线 $y = k$ 有两个交点,

必有 $k \geq 1$,

实数 k 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

考点 一函数与导数

—函数

└─分段函数

—函数与方程

└─函数图象的交点

└─函数的零点

二、填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13 一个盒子里装有标号为1, 2, ..., 5的5张标签, 从中无放回的随机选取2张标签, 则选取的2张标签上的数字为不相邻整数的概率为 _____ .

答案 $\frac{3}{5}$

解析 随机选取两张标签, 基本事件总数为 $n = C_5^2 = 10$,
两张标签上的数字为不相邻整数包含的基本事件有: (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5),
(3, 5)共6种, 故标签的选取为不相邻整数的概率为 $\frac{3}{5}$.

考点 一 概率

├ 事件与概率
└ 古典概型

14 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) =$ _____ .

答案 $\frac{3}{5}$

解析 由题可知,
已知一个角的函数值, 求另外一个角的函数值

$$\text{令 } \frac{\pi}{6} - x = t, \text{ 则 } x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - t$$

$$\text{所以 } \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$$

$$\text{又因为 } \sin t = \frac{3}{5}.$$

$$\text{所以 } \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}.$$

考点 一 三角函数与解三角形

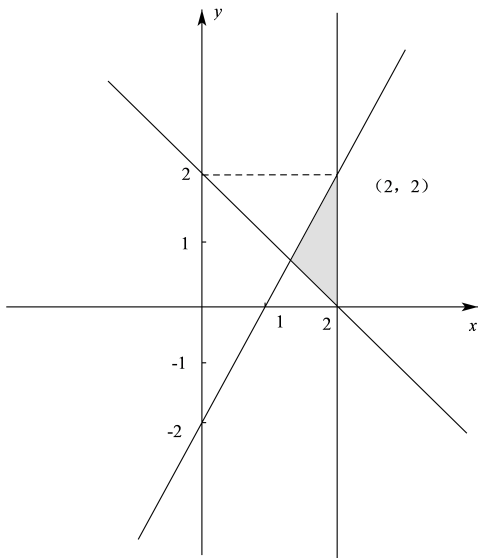
├ 三角函数
└ 诱导公式

15

已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x \leq 2 \\ x + y \geq 2 \\ 2x - y \geq 2 \end{cases}$ ，则 $\frac{y}{x}$ 的取值范围是 _____ .

答案 [0, 1]

解析 线性规划区域如下图阴影区域:



则 $\frac{y}{x}$ 的范围为 [0, 1].

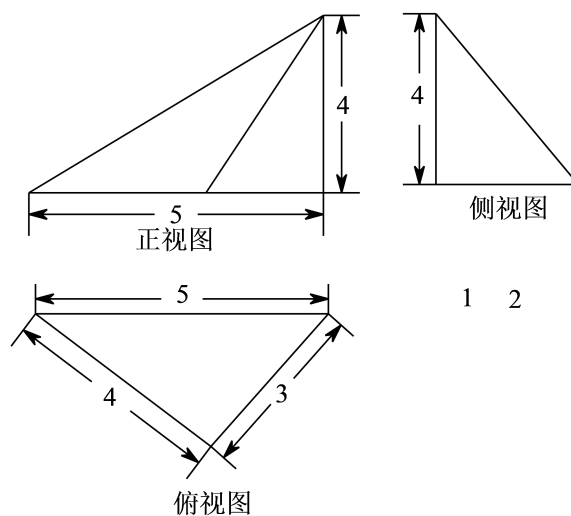
考点 一 不等式与线性规划

— 简单的线性规划

└ 斜率问题

16

如图是某几何体的三视图 (单位: cm)，则该几何体的表面积是 _____ cm^2 .

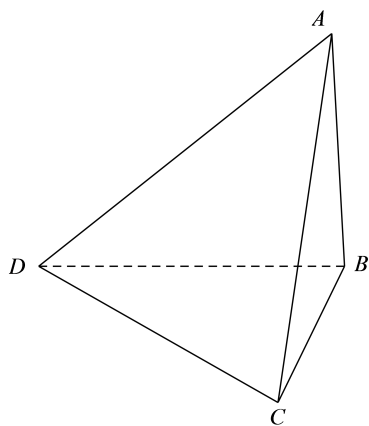


答案 32

解析 根据三视图得出： $BD = 5$, $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 4$,
 $AB \perp ABCD$, $BC \perp CD$,

$\therefore AC = 5$,

$$S_{\text{表}} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 5 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 + \frac{1}{2} \times 5 \times$$



考点 一立体几何与空间向量

— 立体几何初步

└ 空间几何体体积和表面积的计算

└ 三视图

三、解答题 (本大题共6个小题, 共70分)

17 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b = 2, B = 30^\circ, C = 45^\circ$.

- (1) 求 $\sin A$ 的值.
(2) 求三角形的面积 S .

答案

(1) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.
(2) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

解析

(1) $\because B = 30^\circ, C = 45^\circ,$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{2}, \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos C = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

(2) $\because \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B},$

$$\therefore c = \frac{b}{\sin B} \sin C = \frac{2}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

考点

一 三角函数与解三角形

三角恒等变换

└ 和差角公式

解三角形

└ 面积公式

└ 正余弦定理

18 已知单调递增等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$, 且 $a_3 + 2$ 是 a_2, a_4 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 其前 n 项和 $S_n = n^2$, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

(1) $a_n = 2^n$.

(2) $T_n = 2^{n+1} + n^2 - 2$.

解析

(1) \because 设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q ,

$$\text{依题意: } \begin{cases} 2(a_3 + 2) = a_2 + a_4 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 28 \end{cases} \Rightarrow a_3 = 8$$

$$\begin{cases} a_1q + a_1q^3 + 8 = 28 \\ a_3 = a_1q^2 = 8 \end{cases},$$

$$\text{得 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 32 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\because \{a_n\}$ 单调递增,

$$\therefore a_1 = 2, q = 2, \text{ 则 } a_n = 2^n.$$

(2) $\because \{b_n\}$ 的 $S_n = n^2$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } b_1 = 1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1,$$

$$\text{即 } b_n = 2n - 1.$$

$$T_n = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n + 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$$

$$= 2^{n+1} + n^2 - 2.$$

考点

— 数列

— 数列的概念

└ 数列的前 n 项和

— 等差数列

└ 等差数列的性质

— 等比数列

└ 等比数列的概念和通项

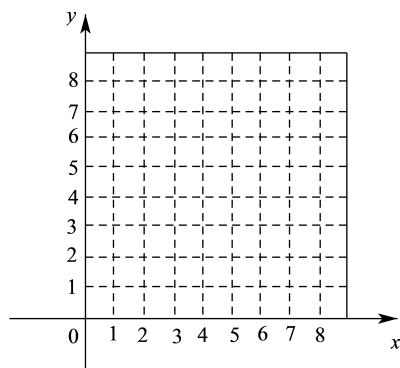
19 某汽车4S店关于某品牌汽车的使用年限 x （年）和所支出的维修费用 y （千元）有如下的统计资料：

x	2	3	4	5	6
y	2.0	3.5	6.0	6.5	7.0

- (1) 在所给的直角坐标系中画出散点图并判断使用年限与所支出的维修费用是否线性相关；如果线性相关，试求 y 关于 x 的回归直线方程；

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2},$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

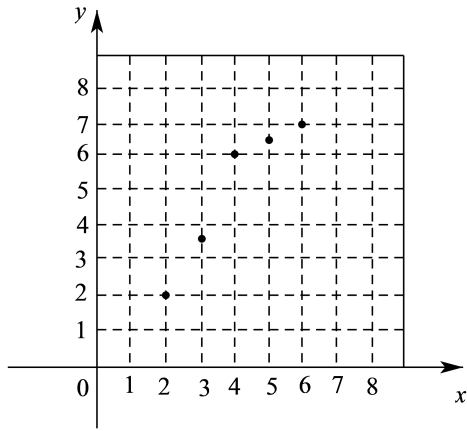


- (2) 若使用超过8年，维修费超过1.5万元时，车主将处理掉该车。估计第10年年底时，车主是否会处理掉该车？

答案 (1) 线性相关，回归直线方程为 $\hat{y} = 1.2x - 0.2$.

(2) 车主不会处理掉该车.

解析 (1) 由散点图可知是线性相关的， $\bar{x} = 4$ ， $\bar{y} = 5$



$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{112 - 5 \times 4 \times 5}{90 - 5 \times 4^2} = 1.3.$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 5 - 1.3 \times 4 = -0.2.$$

即 y 关于 x 回归直线方程为 $\hat{y} = 1.3x - 0.2$.

(2) 将 $x = 10$ 代入回归方程 $\hat{y} = 1.3 \times 10 - 0.2 = 12.8$ (千元).

即维修费用为 1.28 万元 $<$ 1.5 万元.

\therefore 车主不会处理掉该车.

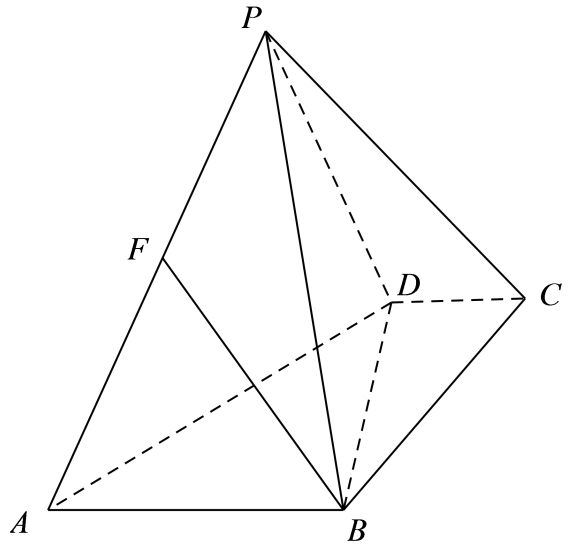
考点 一统计

变量的相关性

└ 两个变量的线性相关

20 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel DC$, $\angle ABD = \frac{\pi}{2}$, $AD = 2\sqrt{2}$,

$AB = 2DC = 2$, F 为 PA 中点.



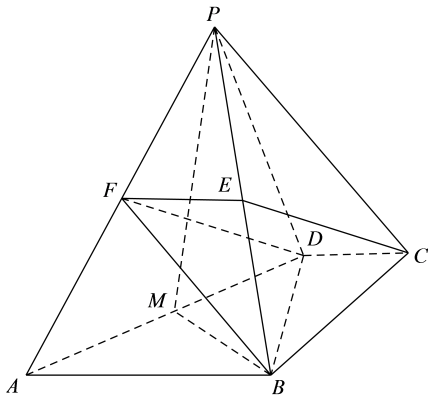
- (1) 在棱 PB 上确定一点 E , 使得 $CE//PAD$.
- (2) 若 $PA = PB = PD = \sqrt{6}$, 求三棱锥 $P - BDF$ 的体积.

答案

- (1) 当 E 是 PB 的中点时, $CE//PAD$, 证明见解析.
- (2) $\frac{2}{3}$.

解析

- (1) 作 PB 的中点 E , 连接 EF, CE , 如图所示,



- $\because E, F$ 分别是 PA, PB 的中点,
 $\therefore EF//AB$, 且 $EF = \frac{1}{2}AB$,
 \because 四边形 $ABCD$ 为梯形, 且,
 $AB//DC, AB = 2DC = 2$,
 $\therefore EF//DC$, 且 $EF = DC$,
 \therefore 四边形 $DCEF$ 为平行四边形.
 $\therefore DF//CE$.

$\therefore DF \subset PAD$, CE 不含于平面 PAD ,

$\therefore CE // PAD$.

(2) 作 AD 的中点 M , 连接 PM , BM ,

$\therefore PA = PB = PD = \sqrt{6}$, $AD = 2\sqrt{2}$,

$\therefore PM \perp AD$, $PM = 2$,

$\therefore \angle ABD = \frac{\pi}{2}$, $AB = 2DC = 2$,

$\therefore BD = 2$, $BM = \sqrt{2}$,

$\therefore BD^2 + BM^2 = 4 + 2 = 6 = PB^2$,

$\therefore PM \perp BM$,

$\therefore AD \cap BM = M$,

$\therefore PM \perp ABCD$,

$\therefore F$ 是 PA 的中点,

$\therefore V_{F-ABD} = \frac{1}{2}V_{P-ABD}$,

$\therefore V_{P-BDF} = V_{P-ABD} - V_{F-ABD} = \frac{1}{2}V_{P-ABD}$,

$\therefore V_{P-ABD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD} \times PM = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$,

$\therefore V_{P-BDF} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$,

综上所述, 结论为: 三棱锥 $P - BDF$ 的体积为 $\frac{2}{3}$.

考点

一 立体几何与空间向量

— 立体几何初步

└ 空间几何体体积和表面积的计算

└ 空间中的平行

21 已知函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(1) 用函数单调性的定义证明 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数.

(2) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(mt^2 + 1) + f(1 - mt) > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

答案

(1) 见解析.

(2) $m \in [0, 8)$.

解析

(1) 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 且 $x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} - \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} = \frac{1}{2} \left[(e^{x_1} - e^{x_2}) + \left(\frac{1}{e^{x_2}} - \frac{1}{e^{x_1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{x_1} - e^{x_2}) \left(1 + \frac{1}{e^{x_1+x_2}} \right), \end{aligned}$$

$$\because x_1 < x_2,$$

$$\therefore e^{x_1} - e^{x_2} < 0,$$

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0, \quad f(x_1) < f(x_2),$$

即 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的增函数.

$$\begin{aligned} (2) \quad \because f(-x) &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ f(x) + f(-x) &= \frac{e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^x}{2} = 0, \end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数且在 \mathbb{R} 上单调递增.

$$\because f(mt^2 + 1) + f(1 - mt) > 0,$$

$$\therefore f(mt^2 + 1) > f(mt - 1)$$

$mt^2 + 1 > mt$ 、 $mt^2 - mt + 2 > 0$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 上恒成立.

1° $m = 0$ 时, $2 > 0$ 恒成立, 符合题意.

$$2^\circ m \neq 0 \text{ 时, } \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 8m < 0 \end{cases}, \therefore 0 < m < 8,$$

综上, m 的取值范围为 $m \in [0, 8)$.

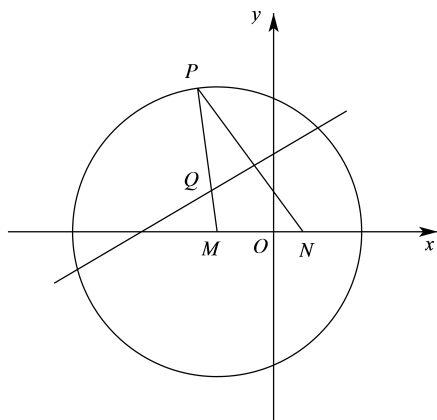
考点 一 函数与导数

函数

└ 单调性

└ 奇偶性

22 如图, 已知圆 $M: (x+1)^2 + y^2 = 16$, 点 $N(1, 0)$, P 是圆 M 上任意一点, 线段 NP 的垂直平分线和半径 MP 相交于点 Q .



- (1) 当点 P 在圆 M 上运动时, 求点 Q 的轨迹 T 的方程.
- (2) 若斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与轨迹 T 交于 B 、 C 两点, 点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 为轨迹 T 上的一点, 记直线 AB 的斜率为 k_1 , 直线 AC 的斜率为 k_2 , 试问: $k_1 + k_2$ 是否为定值? 请证明你的结论.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) $k_1 + k_2$ 为定值, 证明见解析.

解析

(1) 连接 QN . 由题意可知,

$$\because |QP| = |QN|, |PM| = 4,$$

$$\therefore |QN| + |QM| = 4 > |MN| = 2.$$

故 Q 点轨迹 T 是 M 、 N 为焦点, 长轴长为4的椭圆.

$$\therefore a = 2, c = 1, b = \sqrt{3},$$

$$\text{点}Q\text{的轨迹}T\text{的方程为}\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设直线 l 为 $y = \frac{1}{2}x + b$.

$$B(x_1, y_1), C(x_2, y_2).$$

$$\text{联立}\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = \frac{1}{2}x + b \end{cases} \Rightarrow x^2 + bx + b^2 - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4(b^2 - 3) > 0 \Rightarrow |b| < 2,$$

$$x_1 + x_2 = -b, x_1x_2 = b^2 - 3,$$

$$k_1 = \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1}, k_2 = \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1},$$

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} = \frac{\frac{x_1}{2} + b - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} + \frac{\frac{x_2}{2} + b - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} \\ &= \frac{x_1x_2 + (b-2)(x_1+x_2) + 3 - 2b}{(x_1-1)(x_2-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{b^2 - 3 + 2b - b^2 + 3 - 2b}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = 0.$$

故 $k_1 + k_2$ 为定值.

考点

—解析几何

—椭圆

└ 椭圆的定义、图形及标准方程

—直线与圆锥曲线

└ 定值问题