

文章编号: 1000-5862(2012)06-0615-07

相互作用的量子比特在不同环境下的共生纠缠度和量子失协分析

于雁霞¹, 胡 燕¹, 嵇英华^{1, 2*}

(1. 江西师范大学物理与通信电子学院, 江西 南昌 330022; 2. 江西省光电子与通信重点实验室, 江西 南昌 330022)

摘要: 研究了初始纠缠的量子比特在不同的环境下共生纠缠度和量子失协的动力学演化. 在所研究的几种模型中, 发现共生纠缠度强烈地依赖于初始环境, 并在演化过程中发生纠缠死亡现象. 共生纠缠度和量子失协在演化过程中均出现坍塌和复苏效应, 但当量子比特间的相互作用为零时, 坍塌和复苏效应消失. 可无论在何种情况下, 量子失协均不会减小到零, 即仍能反映量子比特和系统间的量子关联, 显示量子失协比量子纠缠具有更强的抗退相干能力. 因此量子失协可作为获得有效量子信息的一种更有效的量子资源.

关键词: 量子关联; 耦合量子比特; 量子失协; 共生纠缠度

中图分类号: O 431. 2

文献标志码: A

0 引言

随着量子信息理论的发展, 量子纠缠不断展示了其在量子信息过程和量子计算中的重要作用, 因此被看作是量子信息的一个最重要的资源. 被广泛研究过的由 W.K.Wootters^[1]提出的一个度量纠缠的方式共生纠缠度, 则由于其能适用于任意的 2 能级 2 体系和操作的方便性成为人们借以更深入地了解量子世界的方法^[2-5]. 由于每个子体系不可避免地与环境发生相互耦合, 使得系统与环境的初始相干性在演化过程中不断丢失. 这种量子相干性丢失的过程被称作退相干, 并导致纠缠度的退化^[6-8]. 由于退相干会影响一个初始纠缠的 2 个量子比特系统在有限的时间内会完全解纠缠, 这种称之为量子纠缠死亡^[9]的现象已经在实验中得到证实^[10].

在理论和实验上人们证实了一些可分离态同经典态比较, 更能体现量子计算的优越性, 并且在纠缠度为零的情况下, 仍能观察到量子非局域性. 许多研究显示量子纠缠并不是量子科学中测量量子关联的唯一方法, 并且发现在一些工作中采用不同于纠缠度的量子关联度量方法更能体现量子优势^[11-15]. 于是人们开始注意到量子纠缠只是一种特殊的量子关联. 如人们发现了可分离态

中可能含有非经典关联, 也就意味着纠缠为零的可分离态中可能含有非零的量子关联^[16-17]. 最近一种利用量子失协来量化量子关联的方法引起了人们相当大的关注. 甚至在可分离态中这种量化方式仍能为测量量子关联提供可供选择的途径. 而量子失协的定义可以理解为局域操作作用在 A 和 B 的 2 个子系统前后总量子信息之差. 迄今为止量子关联已经被证实为一种优越于共生纠缠度的测量非经典关联的方法^[18]. 此外, 量子失协也被证实为一种可以加速量子计算的资源.

本文考虑量子比特同一系列不同环境模型的相互作用对共生纠缠度和量子失协的影响. 研究发现当量子比特间的相互作用不为零时, 由于退相干作用的影响, 2 个初始纠缠的量子比特的纠缠度在演化过程中总会出现坍塌与复苏效应, 并最终出现纠缠死亡. 而量子失协却仍保持正值, 并最终趋于一个常数. 只有当量子比特间无相互作用时, 才不会发生纠缠坍塌与复苏效应. 研究结果表明: 在研究的模型中, 量子失协在全局显示出比共生纠缠度更优越的性质, 因此, 对于量子关联的测量, 量子失协是一个比纠缠度更适用的方法.

1 模型

本文研究 2 个初始纠缠的量子比特分别标记为

收稿日期: 2012-08-11

基金项目: 国家自然科学基金(11164009)资助项目.

作者简介: 嵇英华(1960-), 男, 江西临川人, 教授, 主要从事量子信息方面的研究.

A 和 B . 整个系统的哈密顿量为^[18-19]

$$H = H_S + H_B + H_I, \quad (1)$$

其中

$$H_S = \hbar\omega_0(\sigma_A^z + \sigma_B^z)/2 + \hbar\nu(\sigma_A^+ \sigma_B^+ + \sigma_B^+ \sigma_A^+), \quad (2)$$

H_B 为热库哈密顿量, H_I 为量子系统与热库之间的相互作用哈密顿量, ν 为量子比特间的相互作用强度, σ_j^z 与 σ_j^\pm ($j = A, B$) 是 Pauli 算符, 它们分别服从 Pauli 算符的对易与反对易代数关系.

根据量子耗散理论, 在非马尔科夫过程中, 耦合量子系统的约化密度矩阵 ρ 所满足的运动方程为量子 Liouville 方程^[19-20]

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho]/\hbar + L\rho, \quad (3)$$

其中 $L\rho$ 为超算符, 反应出环境热库对耦合量子比特系统动力学演化的影响, 并强烈依赖于具体退相干模型. 本文根据 4 种不同的退相干形式, 给出对应的超算符的具体形式, 并讨论不同的环境模型对量子纠缠和量子失协的影响.

由于要求解量子主方程必须依赖具体的初始条件, 考虑一个接近于 Werner 态的量子态为 $\rho(r, \theta, \varphi) = r|\Psi(\theta, \varphi)\rangle\langle\Psi(\theta, \varphi)| + (1-r)I_4/4$, 其中 r 为初始态的量子纯度, 纯态 $|\Psi(\theta, \varphi)\rangle = \cos\theta|10\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|01\rangle$, 角度 θ 能够衡量系统的初始纠缠度.

2 量子纠缠与量子关联的度量

为研究不同退相干模式对量子关联演化的影响, 分别采用共生纠缠度和量子失协来度量系统的量子关联, 其中共生纠缠度定义为^[1] $C(t) = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\}$, 其中 λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 为矩阵 $W = \rho(t)\tilde{\rho}(t)$ 的本征值, 满足 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$, 并定义矩阵 $\tilde{\rho}(t) = (\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)})\rho^*(t)(\sigma_y^{(1)} \otimes \sigma_y^{(2)})$, $\rho^*(t)$ 为密度矩阵 $\rho(t)$ 的复共轭, σ_y 为 Pauli 自旋矩阵. 纠缠度的值由分离态的零变化到最大纠缠态的 1, 则纠缠度可表示为 $C(t) = \max\{0, \tilde{C}(t)\}$, 则在本文的初态下的耦合量子比特系统的共生纠缠度为 $C(t) = 2\max\{|\rho_{23}(t)| - \sqrt{\rho_{11}(t)\rho_{44}(t)}\}$.

在一个包含经典和量子关联的量子态中, 这些关联可以用量子相互作用信息来量化. 定义为 $I(\rho_{AB}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB})$, 其中 $S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho)$ 为 von Neuman 熵. Ollivier 提出的量子失

协可表示为量子相互作用信息与经典关联之差^[21]

$QD(\rho_{AB}) = I(\rho_{AB}) - CD(\rho_{AB})$, 这是与量子纠缠不同的量子关联, 特别对于某些可分离态, 当共生纠缠度为零时, 其仍能保持非零, 其中 $CD(\rho_{AB})$ 是 2 个子系统的经典关联^[22-23] $CD(\rho_{AB}) = \max_{\{B_k\}} [S(\rho_A) - S(\rho_{AB}|\rho_B)]$,

其中 $\{B_k\}$ 是对子系统 B 进行一系列局部性的 von Neumann 测量, $S(\rho_{AB}|\{B_k\}) = \sum_k p_k S(\rho_k)$ 是量子条件熵,

$\rho_k = (I_A \otimes B_k)\rho(I_A \otimes B_k)/\text{Tr}(I_A \otimes B_k)\rho(I_A \otimes B_k)$, $p_k = \text{Tr}(I_A \otimes B_k)\rho(I_A \otimes B_k)$, 这里 I_A 是子系统 A 的单位算符.

3 讨论

根据不同的退相干信道模型, 分析量子纠缠与量子失协随时间演化的方式.

3.1 退极化信道一

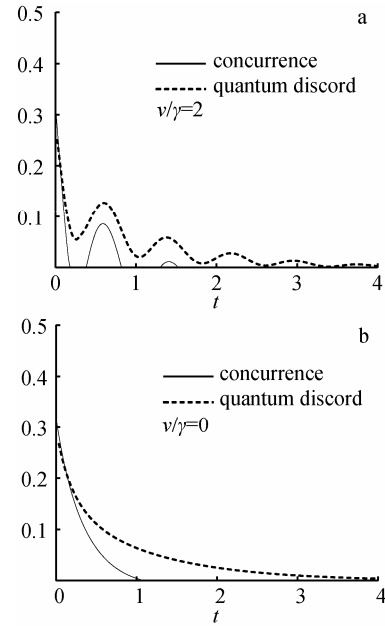
考虑第 1 种退相干模型由如下超算符给出, 其环境作用可以用升降算符表示为 $L\rho = -\sum_{j=A,B} \frac{\gamma_j}{2}$.

$(\sigma_j^+ \sigma_j^- \rho - 2\sigma_j^- \rho \sigma_j^+ + \rho \sigma_j^+ \sigma_j^-)$, 其中 γ_A (γ_B) 为量子比特受环境热库的影响而引起的衰减率. 退极化信道是描述量子比特受到消相干作用的一个模型, 它表示量子比特以 $1-p$ 的几率保持不变, 而发生错误的几率为 p . 作为一类重要的量子噪声信道, 它包含了比特翻转、相位翻转以及比特-相位翻转. 在下面的讨论中, 假设了 2 个量子比特的衰减率是完全相等的, 即 $\gamma_A = \gamma_B = \gamma$. 在此退相干模式下, 量子主方程(3)的解为

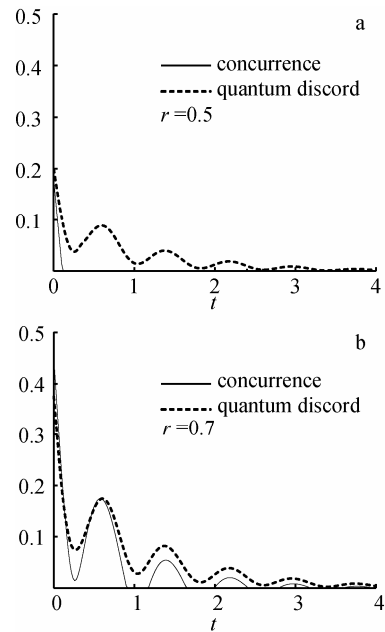
$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= 1 - [\rho_{22}(0) + \rho_{33}(0) + 2\rho_{44}(0)]e^{-\gamma t} + \rho_{44}(0)e^{-2\gamma t}, \\ \rho_{22}(t) &= \frac{1}{2}\rho_{22}(0)e^{-\gamma t}[1 + \cos(2\gamma t)] + \frac{1}{2}\rho_{33}(0)e^{-\gamma t}[1 - \cos(2\gamma t)] + \\ &\quad \rho_{44}(0)e^{-2\gamma t}(e^{\gamma t} - 1) + \frac{i}{2}[\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)]e^{-\gamma t}\sin(2\gamma t), \\ \rho_{33}(t) &= \frac{1}{2}\rho_{22}(0)e^{-\gamma t}[1 - \cos(2\gamma t)] + \frac{1}{2}\rho_{33}(0)e^{-\gamma t}[1 + \cos(2\gamma t)] + \\ &\quad \rho_{44}(0)e^{-2\gamma t}(e^{\gamma t} - 1) - \frac{i}{2}[\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)]e^{-\gamma t}\sin(2\gamma t), \\ \rho_{44}(t) &= \rho_{44}(0)e^{-2\gamma t}, \\ \rho_{12}(t) &= \rho_{12}(0)e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t}\cos(\gamma t) + i\rho_{13}(0)e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin(\nu t) + \rho_{24}(0) e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \frac{i\gamma}{\gamma^2 + 4\nu^2} \left[\gamma \sin(\nu t) (1 + e^{-\gamma t}) - \right. \\
& \left. 2\nu \cos(\nu t) (1 - e^{-\gamma t}) \right] + \rho_{34}(0) e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4\nu^2} \cdot \\
& \left[\gamma \cos(\nu t) (1 - e^{-\gamma t}) + 2\nu \sin(\nu t) (1 + e^{-\gamma t}) \right], \\
& \rho_{13}(t) = \rho_{13}(0) e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \cos(\nu t) + i\rho_{12}(0) e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \cdot \\
& \sin(\nu t) + \rho_{24}(0) e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \frac{\gamma}{\gamma^2 + 4\nu^2} \left[\gamma \cos(\nu t) (1 - e^{-\gamma t}) + \right. \\
& \left. 2\nu \sin(\nu t) (1 + e^{-\gamma t}) \right] + \rho_{34}(0) e^{-\left(\frac{1}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \frac{i\gamma}{\gamma^2 + 4\nu^2} \cdot \\
& \left[\gamma \sin(\nu t) (1 + e^{-\gamma t}) - 2\nu \cos(\nu t) (1 - e^{-\gamma t}) \right], \\
& \rho_{14}(t) = \rho_{14}(0) e^{-(\gamma + 2i\omega_0)t}, \\
& \rho_{23}(t) = \frac{1}{2} \rho_{23}(0) e^{-\gamma t} [1 + \cos(2\nu t)] + \frac{1}{2} \rho_{32}(0) e^{-\gamma t} \cdot \\
& [1 - \cos(2\nu t)] + \frac{i}{2} [\rho_{22}(0) - \rho_{33}(0)] e^{-\gamma t} \sin(2\nu t), \\
& \rho_{24}(t) = \rho_{24}(0) e^{-\left(\frac{3}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \cos(\nu t) - i\rho_{34}(0) e^{-\left(\frac{3}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \sin(\nu t), \\
& \rho_{34}(t) = \rho_{34}(0) e^{-\left(\frac{3}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \cos(\nu t) - i\rho_{24}(0) e^{-\left(\frac{3}{2}\gamma + i\omega_0\right)t} \sin(\nu t), \\
& \rho_{32}(t) = \rho_{23}^*(t), \rho_{21}(t) = \rho_{12}^*(t), \rho_{31}(t) = \rho_{13}^*(t), \\
& \rho_{41}(t) = \rho_{14}^*(t), \rho_{42}(t) = \rho_{24}^*(t), \rho_{43}(t) = \rho_{34}^*(t).
\end{aligned}$$

在第 1 种退极化信道模型下, 共生纠缠度和量子失协随时间的演化见图 1 和图 2. 由图 1(a)量子比特间有相互作用($\nu \neq 0$)时可知, 共生纠缠度和量子失协在相同的参数条件下, 均随着时间的变化以振幅不断减小的方式逐渐衰减. 在这个过程中可以清楚地看到共生纠缠度由不断发生着的坍塌与复苏现象, 逐渐演化成为死亡与新生, 直至最终纠缠死亡, 但此时量子失协仍保持正值并继续衰减, 并且将保持大于零. 比较图 1(b)量子比特间无相互作用($\nu = 0$)可发现所有的振荡现象均消失, 共生纠缠度与量子失协在演化过程中单调递减. 因此它们之间的坍塌与复苏现象强烈地依赖于耦合量子比特间的相互作用. 由图 2 可知, 当初始态的量子纯度 r 越大时, 纠缠度和量子失协的初始值越大, 而在演化过程中这两者的值也相应越大, 很明显使得纠缠度死亡的时间远远推后. 因此适当控制量子比特间的相互作用和初始态的量子纯度可以有效提高获得量子信息的可能性.



注: $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $r = 0.6$.
图 1 $\nu/\gamma = 2$ 和 $\nu/\gamma = 0$ 纠缠度和量子失协随 γt 的演化



注: $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $\nu/\gamma = 2$.
图 2 $r=0.5$ 和 $r=0.7$ 时的纠缠度和量子失协随 γt 的演化

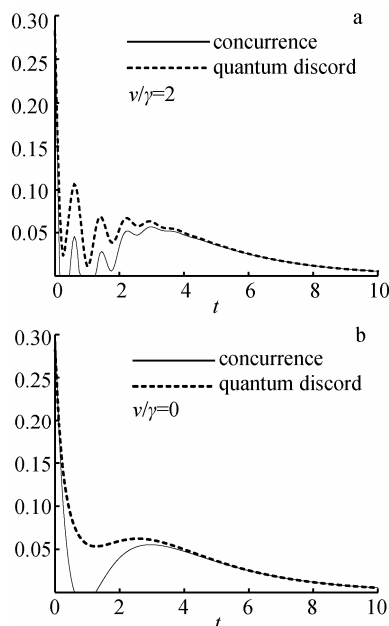
3.2 退极化信道二

考虑一种更为复杂的退极化环境模型 $L\rho = -\sum_{j,k=A,B} \frac{\Gamma_{ij}}{2} (\sigma_j^+ \sigma_k^- \rho - 2\sigma_k^- \rho \sigma_j^+ + \rho \sigma_j^+ \sigma_k^-)$, $\Gamma_{ij} = \gamma_j \cdot 2\Gamma_A(2\Gamma_B)$ 是量子比特 $A(B)$ 的退相干率, 此环境下的密度矩阵元表达式为

$$\begin{aligned}
\rho_{11}(t) &= \rho_{11}(0), \\
\rho_{22}(t) &= \frac{1}{2} \rho_{22}(0) \left[1 + e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} \left\{ \cos(2\Omega t) + \frac{(\Gamma_A + \Gamma_B)}{4\Omega} \right\} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sin(2\Omega t) \Bigg\} + \frac{1}{2} \rho_{33}(0) \left[1 - e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} \left\{ \cos(2\Omega t) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(\Gamma_A + \Gamma_B)}{4\Omega} \sin(2\Omega t) \right\} \right] + \frac{i[\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)] v e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2}}{2\Omega} \cdot \\ & \sin(2\Omega t), \\ & \rho_{33}(t) = \frac{1}{2} \rho_{22}(0) \left[1 - e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} \left\{ \cos(2\Omega t) + \frac{(\Gamma_A + \Gamma_B)}{4\Omega} \right. \right. \\ & \left. \left. \sin(2\Omega t) \right\} \right] + \frac{1}{2} \rho_{33}(0) \left[1 + e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} \left\{ \cos(2\Omega t) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(\Gamma_A + \Gamma_B)}{4\Omega} \sin(2\Omega t) \right\} \right] + \frac{i[\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)] v e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2}}{2\Omega} \cdot \\ & \sin(2\Omega t), \\ & \rho_{23}(t) = \frac{1}{2} \rho_{23}(0) e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} \left[e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} + \cos(2\Omega t) - \right. \\ & \left. \frac{\Gamma_A + \Gamma_B}{4\Omega} \sin(2\Omega t) \right] + \frac{1}{2} \rho_{32}(0) e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} \cdot \\ & \left[e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} - \cos(2\Omega t) + \frac{\Gamma_A + \Gamma_B}{4\Omega} \sin(2\Omega t) \right] + \\ & \frac{i v}{2\Omega} [\rho_{22}(0) - \rho_{33}(0)] e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B)t/2} \sin(2\Omega t), \\ & \Omega = \sqrt{v^2 - \left(\frac{\Gamma_A + \Gamma_B}{4} \right)^2}, \\ & \rho_{32}(t) = \rho_{23}^*(t), \quad \rho_{44}(t) = 1 - \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t). \end{aligned}$$

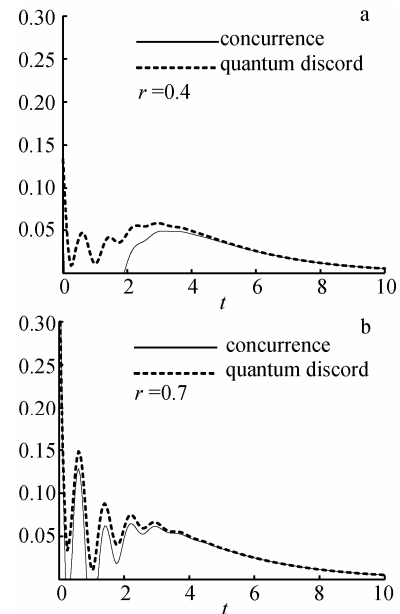
首先, 由图 3(b)可见当量子比特间无相互作用 ($v=0$) 时, 共生纠缠度与量子失协的演化呈现出光



注: $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $\Gamma/\gamma = 0.6$, $r=0.6$.

图 3 $v/\gamma=2$ 和 $v/\gamma=0$ 时的纠缠度和量子失协随 γt 的演化图

滑的曲线特征, 坍塌与复苏现象消失, 因此可知随着量子比特之间相互作用的增强, 它们演化曲线的振荡现象则越明显, 对获得有效的量子信息很有帮助. 图 4 中显示当 $\gamma t \leq 3$ 时, 随着初始态的量子纯度 r 的增大, 共生纠缠度与量子失协的演化振荡频率越高, 并且振幅也相应增大. 但当 $\gamma t \geq 3$ 时, 它们二者的坍塌与复苏现象消失, 开始逐渐单调衰减至零.



注: $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $\Gamma/\gamma = 0.6$, $v/r=2$.

图 4 $r=0.4$ 和 $r=0.7$ 时的纠缠度和量子失协随 γt 的演化图

3.3 退相位信道

第 3 种退相干模型是一个退相位信道模型, 这种模型已被应用于不少的实验研究中:

$$L\rho = - \sum_{j=A,B} \frac{\Gamma_j}{2} (\rho - \sigma_j^z \rho \sigma_j^z), \quad \text{其中 } 2\Gamma_A(2\Gamma_B) \text{ 是量子}$$

比特 $A(B)$ 的退相干率, 它反映了量子系统和退相干环境下的相互作用. 很明显, 相位衰减方式是非耗散的. 也就是说一个原本相干的叠加态, 由于与环境的耦合而丢失了各叠加态之间的相对相因子的确定性, 使得各叠加成分的内部相位差的随机性增加. 最终使得量子态衰变成为一个不相干的混合态, 使得系统丢失了其量子系统的特性. 在此退相干模式下, 量子主方程(3)的解为

$$\rho_{44}(t) = \rho_{44}(0) e^{-2\gamma t},$$

$$\rho_{22}(t) = \frac{1}{2} \rho_{22}(0) e^{-\gamma t} [\cos(2vt) + \cosh(\Gamma_{12}t)] -$$

$$\frac{1}{2} \rho_{33}(0) e^{-\gamma t} [\cos(2vt) - \cosh(\Gamma_{12}t)] -$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{44}(0)e^{-2\gamma t} \frac{\gamma^2 + \Gamma_{12}^2}{\gamma^2 - \Gamma_{12}^2} + \frac{1}{2} \rho_{44}(0)e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma + \Gamma_{12}}{\gamma - \Gamma_{12}} e^{-\Gamma_{12}t} + \frac{\gamma - \Gamma_{12}}{\gamma + \Gamma_{12}} e^{\Gamma_{12}t} \right) - \frac{1}{2} [\rho_{23}(0) + \rho_{32}(0)] e^{-\gamma t} \sinh(\Gamma_{12}t) + \\
& \frac{i}{2} [\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)] e^{-\gamma t} \sin(2\gamma t), \\
& \rho_{33}(t) = \frac{1}{2} \rho_{33}(0) e^{-\gamma t} [\cos(2\gamma t) + \cosh(\Gamma_{12}t)] - \\
& \frac{1}{2} \rho_{22}(0) e^{-\gamma t} [\cos(2\gamma t) - \cosh(\Gamma_{12}t)] - \\
& \rho_{44}(0) e^{-2\gamma t} \frac{\gamma^2 + \Gamma_{12}^2}{\gamma^2 - \Gamma_{12}^2} + \frac{1}{2} \rho_{44}(0) e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma + \Gamma_{12}}{\gamma - \Gamma_{12}} e^{-\Gamma_{12}t} + \frac{\gamma - \Gamma_{12}}{\gamma + \Gamma_{12}} e^{\Gamma_{12}t} \right) - \\
& \frac{1}{2} [\rho_{23}(0) + \rho_{32}(0)] e^{-\gamma t} \sinh(\Gamma_{12}t) - \\
& \frac{i}{2} [\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)] e^{-\gamma t} \sin(2\gamma t), \\
& \rho_{23}(t) = \frac{1}{2} \rho_{23}(0) e^{-\gamma t} [\cos(2\gamma t) + \cosh(\Gamma_{12}t)] - \\
& \frac{1}{2} \rho_{32}(0) e^{-\gamma t} [\cos(2\gamma t) - \cosh(\Gamma_{12}t)] - \\
& \rho_{44}(0) e^{-2\gamma t} \frac{2\gamma\Gamma_{12}}{\gamma^2 - \Gamma_{12}^2} + \frac{1}{2} \rho_{44}(0) e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma + \Gamma_{12}}{\gamma - \Gamma_{12}} e^{-\Gamma_{12}t} - \frac{\gamma - \Gamma_{12}}{\gamma + \Gamma_{12}} e^{\Gamma_{12}t} \right) - \\
& \frac{1}{2} [\rho_{22}(0) + \rho_{33}(0)] e^{-\gamma t} \sinh(\Gamma_{12}t) + \\
& \frac{i}{2} [\rho_{22}(0) - \rho_{33}(0)] e^{-\gamma t} \sin(2\gamma t), \\
& \rho_{32}(t) = \rho_{23}^*(t), \rho_{11}(t) = 1 - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t) - \rho_{44}(t).
\end{aligned}$$

在考虑的第 3 个退相位模型时, 纠缠度和量子失协随时间的演化见图 5 和图 6. 图 5(a)中显示量子

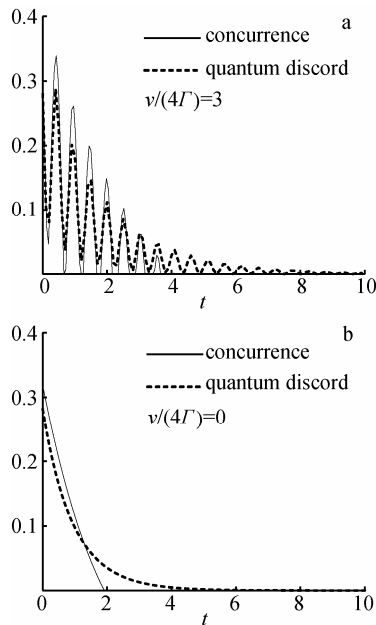
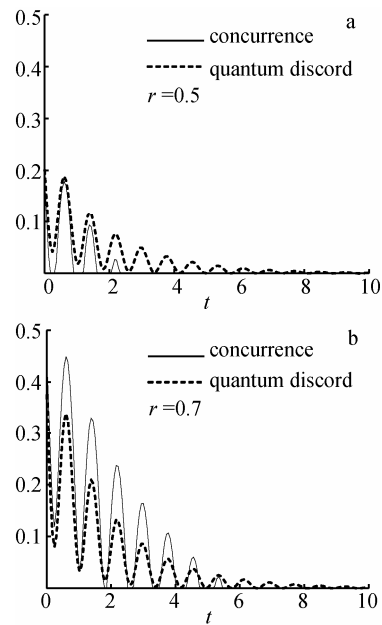


图 5 $v/(4\Gamma) = 3$ 和 $v/(4\Gamma) = 0$ 时的纠缠度和量子失协随 $4\Gamma t$ 的演化

比特间有相互作用($v \neq 0$)时, 共生纠缠度与量子失协以极大的频率振荡着, 并伴随着坍塌与复苏现象, 直至发生纠缠死亡, 但此时量子失协仍在继续衰减, 并最终趋近于零. 很明显, 通过比较图 5 可知量子比特间的相互作用越强, 纠缠度和量子失协演化过程中的振荡现象越明显. 而由图 6 可知, 初始态的量子纯度 r 越大, 纠缠度和量子失协的初始值就越大, 因此纠缠死亡发生的时间要远大于量子纯度 r 小的情形. 因此在退相干模型中量子失协和纠缠度和演化也强烈地依赖于量子比特间的相互作用和初始态的量子纯度.



注: $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $v/(\Gamma) = 2$.

图 6 $r = 0.5$ 和 $r = 0.7$ 时的纠缠度和量子失协随 $4\Gamma t$ 的演化

3.4 振幅阻尼信道

最后考虑振幅阻尼信道模型 $L\rho = -\sum_{i=A,B} \frac{\Gamma_i}{4}$

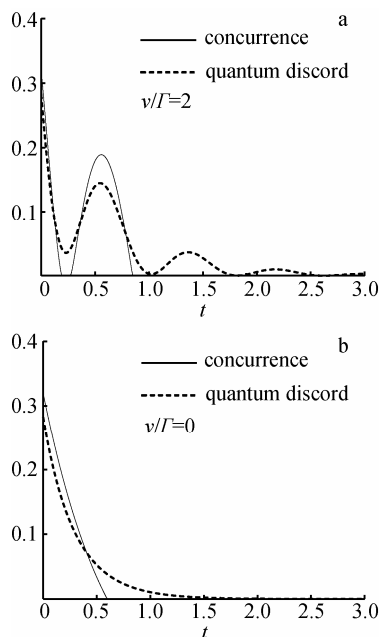
$(\sigma_i^z \sigma_i^z \rho - 2\sigma_i^z \rho \sigma_i^z + \rho \sigma_i^z \sigma_i^z) - \frac{\Gamma_0}{2} (\sigma_A^z \sigma_B^z \rho - \sigma_B^z \rho \sigma_A^z + \rho \sigma_A^z \sigma_B^z - \sigma_A^z \rho \sigma_B^z)$, 其中 Γ_A (Γ_B) 和 Γ_0 均为衰减率, 此环境下的密度矩阵元表达式为

$$\begin{aligned}
& \rho_{11}(t) = \rho_{11}(0), \\
& \rho_{22}(t) = \frac{1}{2} \rho_{22}(0) \left\{ 1 + e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \left[\cos(2\Omega't) + \frac{\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0}{4\Omega'} \sin(2\Omega't) \right] \right\} + \frac{1}{2} \rho_{33}(0) \left\{ 1 - e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \cdot \right. \\
& \left. \cos(2\Omega't) + \frac{\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0}{4\Omega'} \sin(2\Omega't) \right\} + \\
& \frac{i\nu}{2\Omega'} [\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)] e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \sin(2\Omega't),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{33}(t) &= \frac{1}{2} \rho_{22}(0) \left\{ 1 - e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \left[\cos(2\Omega't) + \frac{\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0}{4\Omega'} \sin(2\Omega't) \right] \right\} + \frac{1}{2} \rho_{33}(0) \left\{ 1 + e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cos(2\Omega't) + \frac{\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0}{4\Omega'} \sin(2\Omega't) \right\} - \\ &\quad \frac{i\nu}{2\Omega'} [\rho_{23}(0) - \rho_{32}(0)] e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \sin(2\Omega't), \\ \rho_{23}(t) &= \frac{1}{2} \rho_{23}(0) e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \left[e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} + \right. \\ &\quad \left. \cos(2\Omega't) - \frac{\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0}{4\Omega'} \sin(2\Omega't) \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \rho_{32}(0) e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \left[e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} - \cos(2\Omega't) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0}{4\Omega'} \sin(2\Omega't) \right] + \frac{i\nu}{2\Omega'} [\rho_{22}(0) - \rho_{33}(0)] e^{-(\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0)t/2} \sin(2\Omega't), \\ \Omega' &= \sqrt{\nu^2 - \left(\frac{\Gamma_A + \Gamma_B - 2\Gamma_0}{4} \right)^2}, \end{aligned}$$

$$\rho_{32}(t) = \rho_{23}^*(t), \quad \rho_{11}(t) = 1 - \rho_{22}(t) - \rho_{33}(t) - \rho_{44}(t).$$

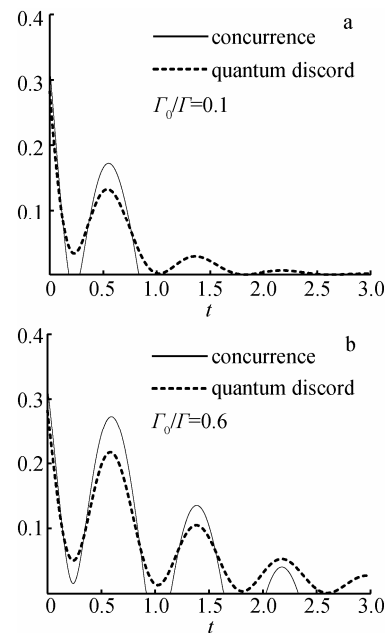
这种模型经常被应用于一些固态系统(如半导体量子点)的研究中. 同上述类似, 从图 7 中可见量子比特间的相互作用越强, 纠缠度和量子失协演化过程中的振荡现象越明显, 对获取有效量子信息更有帮助. 由图 8 可知, 若退相干率 $(\Gamma - \Gamma_0)/\Gamma$ 越大, 则纠缠度和量子失协在演化过程中衰减得越快. 在



注: $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $r = 0.6$, $\Gamma_0/\Gamma = 0.2$.

图 7 $v/\Gamma = 2$ 和 $v/\Gamma = 0$ 时的纠缠度和量子失协随 Γt 的演化

此过程中, 纠缠度的值在某段时刻会大于量子失协, 但纠缠度仍以较大的衰减率衰减为零, 而此时量子失协为正值并继续减小, 直至趋近于零.



注: $\theta = \pi/6$, $\varphi = \pi/3$, $\nu/\Gamma = 2$, $r = 0.6$.

图 8 $\Gamma_0/\Gamma = 0.1$ 和 $\Gamma_0/\Gamma = 0.6$ 时的纠缠度和量子失协随 Γt 的演化

4 结论

研究了初始纠缠的量子比特在不同的环境下共生纠缠度和量子失协的动力学演化, 发现在研究的几种模型中, 量子失协都表现出比量子纠缠更稳定的性质. 共生纠缠度在经历了一个短暂的坍塌和复苏效应以后很快死亡, 若适当地改变初始条件, 纠缠度会经历一个解纠缠与复苏的过程, 而量子失协也会因为初始条件的改变使得振幅增大, 衰减率减小, 虽然量子失协也会发生振荡, 但在整个演化过程中都不会出现死亡现象. 所以即使在共生纠缠度消失的情况下, 量子失协仍能反映量子比特间的量子关联. 因此从以上分析中得知, 量子失协更稳定. 故综上所述得知, 对于量子关联的测量来说, 它是一种更适用的方法.

5 参考文献

- [1] Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits [J]. Phys Rev Lett, 1998, 80: 2245.
- [2] Sarandy M S. Classical correlation and quantum discord in critical systems [J]. Phys Rev A, 2009, 80: 22108.

- [3] Streltsov A, Kampermann H, Bruß D. Linking quantum discord to entanglement in a measurement [J]. *Phys Rev Lett*, 2011, 106: 160401.
- [4] Bennett C H, DiVincenzo D P, Smolin J A, et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction [J]. *Phys Rev A*, 1996, 54: 3824-3851.
- [5] Vidal G, Werner R F. Computable measure of entanglement [J]. *Phys Rev A*, 2002, 65: 32314.
- [6] Knill E, Laflamme R. Power of one bit of quantum information [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 5672.
- [7] Debarba T, Maciel T O, Vianna R O. Witnessed entanglement and the geometric measure of quantum discord [J]. *Phys Rev A*, 2012, 86: 24302.
- [8] Rossignoli R, Matera J M, Canosa N. Measurements, quantum discord, and parity in spin-1 systems [J]. *Phys Rev A*, 2012, 86: 22104.
- [9] Yu Ting, Eberly J H. Finite-time disentanglement via spontaneous emission [J]. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 140404.
- [10] Almeida M P, Melo de F, Hor-Meyll M, et al. Environment-induced sudden death of entanglement [J]. *Science*, 2007, 316: 579-682.
- [11] Girolami D, Adesso G. Quantum discord for general two-qubit states: analytical progress [J]. *Phys Rev A*, 2011, 83: 52108.
- [12] Groisman B, Popescu S, Winter A. Quantum, classical, and total amount of correlations in a quantum state [J]. *Phys Rev A*, 2005, 72: 32317.
- [13] Li Nan, Luo Shunlong. Total versus quantum correlations in quantum states [J]. *Phys Rev A*, 2007, 76: 32327.
- [14] Rulli C C, Sarandy M S. Global quantum discord in multipartite systems [J]. *Phys Rev A*, 2001, 64: 42109.
- [15] Usha Devi A R, Rajagopal A K. Generalized information theoretic measure to discern the quantumness of correlations [J]. *Phys Rev Lett*, 2008, 100: 140502.
- [16] Vedral V. Classical correlations and entanglement in quantum measurements [J]. *Phys Rev Lett*, 2003, 90: 50401.
- [17] Zhang Chengjie, Yu Sixia, Chen Qing, et al. Detecting the quantum discord of an unknown state by a single observable [J]. *Phys Rev A*, 2011, 84: 32122.
- [18] Ollivier H, Zurek W H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations [J]. *Phys Rev Lett*, 2001, 88: 17901.
- [19] Ban M. Dephasing of two interacting qubits under the influence of thermal reservoirs [J]. *Phys Rev A*, 2009, 80: 32114.
- [20] Ji Yinghua, Liu Yongmei, Wang Zisheng. Avoiding the decay of entanglement for coupling two-qubit system interacting with a non-Markov environment [J]. *Chin Phys B*, 2011, 20: 70304.
- [21] Ali M, Rau A R P, Alber G. Quantum discord for two-qubit X states [J]. *Phys Rev A*, 2010, 81: 42105.
- [22] Henderson L, Vedral V. Classical, quantum and total correlations [J]. *J Phys A*, 2001, 34: 6899.
- [23] Jin Jiasen, Yu Changshui, Pei Pei, et al. Quantum discord induced by white noises [J]. *J Opt Soc Am B*, 2010, 27: 1799.

The Analysis on Concurrence and Quantum Discord of Interacting Qubits in Different Environments

YU Yan-xia¹, HU Yan¹, JI Ying-hua^{1, 2*}

(1. College of Physics & Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China;
2. Key Laboratory of Photoelectronic & Telecommunication of Jiangxi Province, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: Initial entangled quantum bits in different environments, the dynamical evolution of symbiotic entanglement and quantum of dissonance found symbiotic entanglement degree is strongly dependent on the initial environment, and evolution in the study of several model in the entanglement deaths phenomenon occurs. symbiotic entanglement and quantum dissonance in the evolution of the collapses and recovery effect, collapse and recovery effects disappear when the interaction between the qubit is zero. Available, regardless of the circumstances in which, quantum dissonance are not reduced to zero, that is able to reflect the quantum correlations between the qubit and systems, the quantum dissonance than have a stronger anti-decoherence quantum entanglement. quantum dissonance can be used as an effective quantum information a more effective quantum resources.

Key words: quantum correlation; coupled qubits; quantum discord; concurrence

(责任编辑: 冉小晓)