

第一章 实数

【注】以下解题过程仅参考。

1、【解析】两式相减化简可得 $a = \frac{x+3}{x-1} = \frac{x-1+4}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$

当 $x-1 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ 时, a 都为整数, 故 a 的可能值有 6 个。

【答案】C

2、【解析】设做对的题数是 x 题, 做错的题数是 y 题, 于是有 $8x - 5y = 13 \Rightarrow 8x = 5y + 13$,

这里考虑到 $8x$ 一定是偶数, 故 $5y$ 必是奇数, 所以 y 是奇数, 故从 $y = 1$ 开始试, $y = 3, y = 5$,

直到 $y = 7$, 所以 $8x = 5 \cdot 7 + 13 \Rightarrow x = 6$, 故没做的题为 $20 - 6 - 7 = 7$ 题。

【答案】C

3、【解析】设捐款数额为 100 元、500 元和 2000 元的人数分别为 x 、 y 、 z ,

则 $\begin{cases} x + y + z = 100 \\ x + 5y + 20z = 190 \end{cases} \Rightarrow 4y + 19z = 90$, 可以知道 z 是偶数, 穷举法得 $z = 2$, 所以 $y = 13$ 。

【答案】A

4、【解析】设一等奖、二等奖、三等奖的人数分别为 x, y, z 。

则 $\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 22 \\ 9x + 4y + z = 22 \end{cases} \Rightarrow 12x + 5y = 22$, 故 $x = \frac{22 - 5y}{12}$, 显然 y 为偶数, $y = 2$ 时成立。

【答案】B

5、【解析】设三种种子分别买了 x, y, z 包。

$$\text{则} \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + 4y + \frac{1}{7}z = 100 \end{cases} \Rightarrow 20x + 27y = 600 \Rightarrow y = \frac{600 - 20x}{27}$$

带入选项排除可得 $x = 3$

另解： $\frac{600 - 20x}{27}$ 为整数，则 x 肯定是 3 的倍数，只有 C 符合条件。

【答案】C

6、【解析】找规律，第 $1, 5, 9, \dots, 4n - 3$ 里的球必为 6 个，而 $577 = 4 \times 145 - 3$ 。

【答案】A

7、【解析】设甲乙丙三班的人数分别为 a, b, c 人，则 $80a + 81b + 81.5c = 6952$ ，利用排除法 $a + b + c = 85$ ，则 $80(a + b + c) = 6880$ ，两式相减得到 $b + 1.5c = 152$ ，与 $a + b + c = 85$ 矛盾，同理 CDE 矛盾，选 $a + b + c = 86$ 。

【另解】利用估算法来做：如果所有学生都是甲班学生，或者所有学生都是乙班学生，或者所有学生都是丙班学生，则学生的人数为： $\frac{6952}{80} = 86.9, \frac{6952}{81} = 85.8, \frac{6952}{81.5} = 85.3$ ，所以人数大于 85 小于 87，只有 $a + b + c = 86$ 满足，选 B。

【另解】

或者利用排除法： $\frac{6952}{85} = 86.9, \frac{6952}{86} = 80.8, \frac{6952}{87} = 79.9, \frac{6952}{88} = 79, \frac{6952}{90} = 77.2$ ，通过人数算平均分，平均分一定在 80 与 81.5 之间，所以 B 选项正确。

【答案】B

8、【解析】条件 (1) $3m + 2n$ 是偶数，则 $3m$ 是偶数，则 m 是偶数，充分。

条件 (2) $3m^2 + 2n^2$ 是偶数，则 $3m^2$ 是偶数，则 m^2 是偶数，则 m 是偶数，充分。

【答案】D

9、【解析】单独都不充分，联合可以得到 m^2n^2 是奇数，所以 m^2n^2-1 是偶数，能被2整除，充分。

【答案】C

10、【解析】 $m^2-n^2=(m-n)(m+n)$ 必定是4的倍数。利用奇数偶数的性质来做。

注意0是任何非零整数的倍数。

【答案】D

11、【解析】条件(1)男女成对出现，故有偶数位来宾，充分。

条件(2)若有女宾1人，男宾2人，共有3人，不充分。

【答案】A

12、【解析】假设 a, b 管分别需要 x, y 根，条件(1)若 $3x+5y=37$ 存在整数解，则条件

(1)充分，根据数的整除的特点，利用列举法得到 $\begin{cases} x=9 \\ y=2 \end{cases}$ ，有整数解，充分。同理条件

(2) $4x+6y=37$ 不可能存在整数解，所以不充分。

【答案】A

13、【解析】列举法，假设学龄儿童是2岁，发现另一个为8岁，不满足；假设学龄儿童是3岁，发现另一个为9岁，不满足；假设学龄儿童是5岁，发现另一个为11岁，还有一个为17岁，满足题意，则三个人年龄之和为 $5+11+17=33$ 。

【答案】C

14、【解析】两个正整数解 x_1 和 x_2 满足 $x_1x_2=37$ ，且37是质数， $37=1\times 37$ ，则 $x_1=1$ ，

$x_2=37$ ，而 $x_1+x_2=-p=38 \Rightarrow p=-38$ ，则 $\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}=\frac{2\times 38}{-38}=-2$ 。

【答案】A

15、【解析】20 以内的质数：2,3,5,7,11,13,17,19， $\{m,n\} = \{3,5\} \{5,7\} \{11,13\} \{17,19\}$ 四组。

【答案】C

16、【解析】不妨设 $a > b > c$ ，则：

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|=a-b+b-c+a-c=2(a-c)=8,$$

$\Rightarrow a-c=4$ ，小于12的质数有2,3,5,7,11，发现 $a=7, b=5, c=3$ 恰好符合要求， $a+b+c=15$ 。

【答案】D

17、【解析】相邻的合数8和9。注意20以内的质数和合数。

【答案】E

18、【解析】质分解 $770=2 \times 5 \times 7 \times 11$ ，所以 $2+5+7+11=25$ 。

【答案】E

19、【解析】条件(1)有 $2700=2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ ，最大值为 $2+2+3+3+3 \times 5 \times 5=85$ ，不充分。条件(2)有 $2000=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ ，最大值为 $2+2+2+2+5 \times 5 \times 5=133$ ，充分。

【注】此题需要有均值不等式的基础。

【答案】B

20、【解析】单独不充分，联合举例： $m=2, q=7$ ，也不充分。

【注】大家平时练习注意不充分条件多找找反例。

【答案】E

21、【解析】 a, b 是方程 $x^2 - 13x + m = 0$ 的两个不同质数根。

有韦达定理可知 $a+b=13; ab=m$

易知 $a=2, b=11$ 符合条件。故 $m=22$

【答案】E

22、【解析】条件(1)若 P 是奇质数，则 $P^5 - 13$ 是个大于 2 偶数，必为合数，不充分。

条件(2) $P^2 + 3$ 为质数，则 P^2 为偶数。

设 $P = \sqrt{2}$ ，则 $P^5 - 13$ 为无理数，不充分。

考虑联合，则 P 为偶质数 2，此时 $P^5 - 13 = 19$ 为质数，充分。

【答案】C

23、【解析】拿走商品的重量是 $210 - 183 = 27$ 千克，这是若干个商品的重量，考虑到商品的重量是 1 千克的整数倍，故只有 3 可以整除 27

【答案】C

24、【解析】假设甲乙每小时生产的零件数分别为 x, y 个，则
$$\begin{cases} 4x + 4y = 360 \\ \frac{1225}{x} = \frac{1025}{y} \end{cases}$$
，解得 $\begin{cases} x = 49 \\ y = 41 \end{cases}$ 。

【注】根据倍数法，答案应该是 1225 的约数，只有 A 答案满足。

【答案】A

25、【解析】设李家的用水量为 x 吨，则张家的用水量为 $1.5x$ 吨

	不超 5 吨的用水量	不超 5 吨的费用	超 5 吨的用水量	超 5 吨的费用	总费用
张家	5	20	$1.5x - 5$	$90 - 20$	90
李家	5	20	$x - 5$	$55 - 20$	55

根据题意，“超过 5 吨的，每吨收取较高标准的费用”，有 $\frac{70}{1.5x - 5} = \frac{35}{x - 5}$ ，解得 $x = 10$ ，

那么用水量超过 5 吨的收费标准是 $\frac{70}{10} = 7$ 元/吨。

【注】倍数关系求解，张家一定用水一定超过 5 吨，总共付款 90 元，那么超出用水的部分钱为 70 元，说明超出的费用跟 70 相关，只有 E 答案是 7 的约数，选 E。

【答案】E

26、【解析】假设足球，排球，篮球的个数分别为 a, b, c 个，车间共有职工 n 人，则 $a + b + c = 94$ ， $3a = 4b = 5c = n$ ，所以 n 是 3,4,5 的公倍数，看选项只有 C 满足，得到

$a = 40, b = 30, c = 24$ 。

【答案】C

27、【解析】设每排的人数为 x ，则最外层的人数为 $4(x-1) = 80$ ，故 $x = 21$

所以方阵人数为 $21 \times 21 = 441$

【答案】A

28、【解析】一般事件数：100 个，特殊事件数：被 5 整除的数有 20 个，被 7 整除的数有 14 个，被 35 整除的数有 2 个，所以被 5 或者被 7 整除的数为 $20+14-2=32$ 个，所以概率为 0.32。

【答案】D

29、【解析】每三个相邻自然数都有 2 个数不能被 3 整除。从 1 开始，每三个数作为一组，每组前 2 个数不能被 3 整除，第 100 个数为第 50 组的倒数第二个数 149 故 100 个不能被 3 整除的数是 149。

【答案】D

30、【解析】特值法，取 $a = 0, b = 1$ ，得答案为 1。

【答案】C

31、【解析】该自然数为 a^2 ，所以该自然数左右相邻的两个自然数的算术平方根分别为 $\sqrt{a^2-1}, \sqrt{a^2+1}$ 。

【答案】D

32、【解析】条件 (1)， $\frac{3n}{14}$ 是一个整数，3 与 14 互质，即 3 在 $3n$ 被 14 整除的过程中，没有提供任何帮助，完全依靠 n 来被 14 整除，即 n 为 14 的倍数，则 $\frac{n}{14}$ 是一个整数，充分；

条件 (2)， $\frac{n}{7}$ 是一个整数， n 为 7 的倍数，不能推出 $\frac{n}{14}$ 是一个整数，反例为 7，不充分。

【答案】A

33、【解析】条件(1) m 是有理数, 假设 m 是分数, 那么 m^2 也是分数, 矛盾, 所以 m 一定是整数, 充分。条件(2), 举反例 $m = -\frac{1}{2}$, 满足条件, m 不是整数, 不充分。

【答案】A

34、【解析】 $(x+y-2)+\sqrt{3}(2x-y+5)=0$, 所以 $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$, 解的 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

【答案】C

【注】可以代入法验算选项即可选出正确答案

35、【解析】

条件 1: 举反例 $n = 2k$, 无法确定 n 除以 5 的余数。

条件 2: 举反例 $n = 3k$, 无法确定 n 除以 5 的余数。

考虑联合, 假设 $n = 6k$, 同样无法确定 n 除以 5 的余数。

【答案】E

易错题

1、【解析】

每隔 40 米挖坑, 共挖坑 91 个; 若每隔 60 米挖坑, 共挖坑 61 个。

由于 $(40, 60) = 120$, 故有 31 个坑是重复的, 所以还需重新挖坑 30, 填坑 60。

【答案】C

2、【解析】

设三个质数分别为 a, b, c ,

$abc = 5(a+b+c)$, 即 abc 能被 5 整除, 由于三个数均为质数, 5 也是质数, 故三个数中有一个为 5, 不妨设 $a = 5$, $b < c$ 则 $bc = 5 + b + c$

所以 $bc - b - c + 1 = 6 \Rightarrow (b-1)(c-1) = 6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$

$$\begin{cases} b-1=1 \\ c-1=6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b-1=2 \\ c-1=3 \end{cases} \quad (\text{舍})$$

所以 $b = 2, c = 7, a = 5$

则 $a^2 + b^2 + c^2 = 78$

【答案】D

拔高题

1、【解析】

条件(1): $a - b = 126$ 无法推出两数之和, 不充分。

条件(2): 举反例 $a = 1, b = 7$, 不充分。

考虑联合设 $a = mx, b = my$, 则最大公约数为 m , 最小公倍数为 mxy 。

$$\begin{cases} m(x-y) = 126 \\ \frac{mxy}{m} = xy = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \\ m = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 147 \\ b = 21 \end{cases}$$

充分。

【答案】C

2、【解析】

设甲、乙、丙分别得糖 x, y, z 块, 依题意得, 得:

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = z + 13 \\ x + y + z < 50 \text{ 且 } x + y + z \text{ 为质数} \end{cases}$$

两位数数字之和为 $11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$ ，小于 50 的质数只有 29 和 47。

若 $x + y + z = 29$ ，则 $4y = 42$ ， y 不是整数，舍去。

若 $x + y + z = 47$ ，可得 $y = 15, x = 30, z = 2$ ，三人得糖的块数之积为 900

【答案】 A