2018 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（理）答案解析（北京卷）

1.　【答案】A

集合 $A=\{x||x|<2\}$，$B=\{x|-2,0,1,2\}$，则 $A\cap B=\{0,1\}$.

故选 A.

2.　【答案】D

$z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$,

则 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，故 $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数在第四象限，

故选 D .

3.　【答案】B

【解析】根据程序框图可知，开始 $k=1$，$s=1$，

执行 $s=1+(-1)^1\cdot\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$，$k=2$，此时 $k\geq 3$ 不成立，循环，

$s=\dfrac{1}{2}+(-1)^2\cdot\dfrac{1}{1+2}=\dfrac{5}{6}$，$k=3$，此时 $k\geq 3$ 成立，结束，

输出 $s=\dfrac{5}{6}$． 故选 B .

4.【答案】D

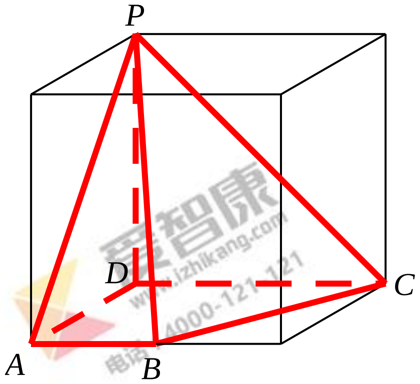
【解析】根据题意可得，此十三个单音形成一个以 f 为首项，$\sqrt[12]{2}$ 为公比的等比数列，

故第八个单音的频率为 $f\cdot\left(\sqrt[12]{2}\right)^{8-1}=\sqrt[12]{2^7}f$.

故选 D .

5.　【答案】C

【解析】由三视图可知，此四棱锥的直观图如图所示，



在正方体中，$\triangle PAD$，$\triangle PCD$，$\triangle PAB$均为直角三角形，

$PB=3$，$BC=\sqrt{5}$，$PC=2\sqrt{2}$，故$\triangle PBC$不是直角三角形.

故选C.

6. 【答案】C

【解析】 充分性：$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$，

$|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$，

又$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，可得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，故$\vec{a}\perp\vec{b}$.

必要性：$\vec{a}\perp\vec{b}$，故$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

所以$|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$，

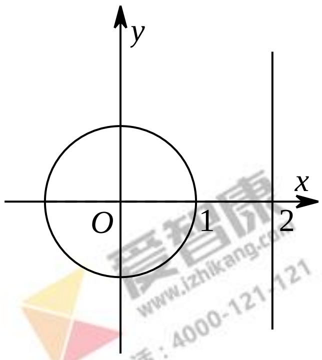
所以$|\vec{a}-3\vec{b}|=|3\vec{a}+\vec{b}|$.

7. 【答案】C

【解析】：$\because P(\cos\theta,\sin\theta)$，所以$P$点的轨迹是圆.

直线$x-my-2=0$恒过$(2,0)$点.

转化为圆心到直线的距离加上半径取到最大值，所以答案为3.



8.　【答案】：D

【解析】：若 $(2,1)\in A$，则 $\begin{cases}2-1\geq 0\\2a+1>4\\2-a\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow a>\dfrac{3}{2}$.

则当 $a>\dfrac{3}{2}$ 时，$(2,1)\in A$；　当 $a\leq\dfrac{3}{2}$ 时，$(2,1)\notin A$，选 D .

二．填空题

9.【答案】：$a_n=6n-3\left(n\in\mathbf{N}_+\right)$

【解析】：由题知，设等差数列公差为 d，所以：$\begin{cases}a_1=3\\a_2=a_1+d\\a_5=a_1+4d\end{cases}$，即 $\begin{cases}a_1=3\\a_1+d+a_1+4d=36\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=3\\d=6\end{cases}$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=6n-3\left(n\in\mathbf{N}_+\right)$.

10.【答案】：$1+\sqrt{2}$

【解析】：　Q $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=a$，

直线方程转化为 $x+y=a$　即 $x+y-a=0$，

Q $\rho=2\cos\theta$，$\rho^2=2\rho\cos\theta$，

圆的方程转化为 $x^2+y^2=2x$　即 $(x-1)^2+y^2=1$　， Q 直线与圆相切$\therefore \frac{|1-a|}{\sqrt{2}}=1$，

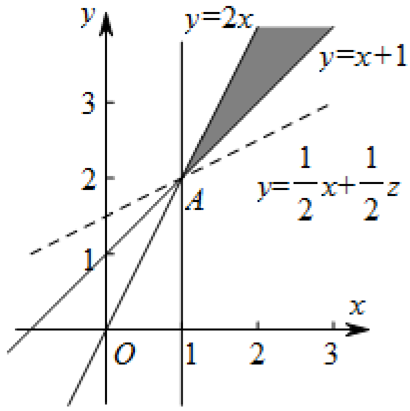
解得$a=1\pm\sqrt{2}$，Q $a>0$，$\therefore a=1+\sqrt{2}$。

11．【答案】：$\frac{2}{3}$

【解析】：由题知：$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，即$\cos\left(\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以$\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

解得：$\omega=8k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，$\omega>0$，所以$k=0$时，$\omega_{\min}=\frac{2}{3}$．

12．【答案】：3



【解析】：将不等式转换成线性规划，即$\begin{cases}x+1\le y\\ y\le 2x\\ x\ge 1\end{cases}$，

目标函数$z=2y-x$，

如右图z在$A(1,2)$处取最小值

$\therefore\ z_{\min}=3$

13．【答案】：$f(x)=-x^2+3x$，（答案不唯一）

【解析】：函数需要满足在$[0,2]$上的最小值为$f(0)$，并且在$[0,2]$上不单调．选取开口向下，对称轴在$(0,2)$上的二次函数均可，其余正确答案也正确．

14．【答案】：$\sqrt{3}-1$，2

【解析】：设正六边形边长为t；根据椭圆的定义$2a=(\sqrt{3}+1)t$，$2c=2t$，$e_{椭圆}=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$

双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以$e_{双曲线}=\frac{c}{a}=2$．

三．解答题

15．【解析】

（I ）$\triangle ABC$ 中，$\cos B=-\dfrac{1}{7}$，所以 $\angle B$ 为钝角，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$；

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $\sin A=\dfrac{a\cdot \sin B}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$；或者 $A=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$；

又 $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 为钝角，所以 $\angle A$ 为锐角，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（II）$\triangle ABC$ 中，$\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(B+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

三角形 ABC 的面积 $S_{VABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=6\sqrt{3}$，设 AC 边上的高为 h，

$S_{VABC}=\dfrac{1}{2}bh=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot h=6\sqrt{3}$，所以 $h=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，即 AC 边上的高为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

16. 【解析】

（1）证明：$\because AB=BC$，且 E 是 AC 的中点，

$\therefore AC\perp BE$，

$\because$ 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E，F 分别是 AC，A_1C_1 的中点，

$\therefore EF /\!/ CC_1$

$\because CC_1\perp$ 平面 ABC，

$\therefore EF\perp$ 平面 ABC，

$\because AC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore EF\perp AC$，

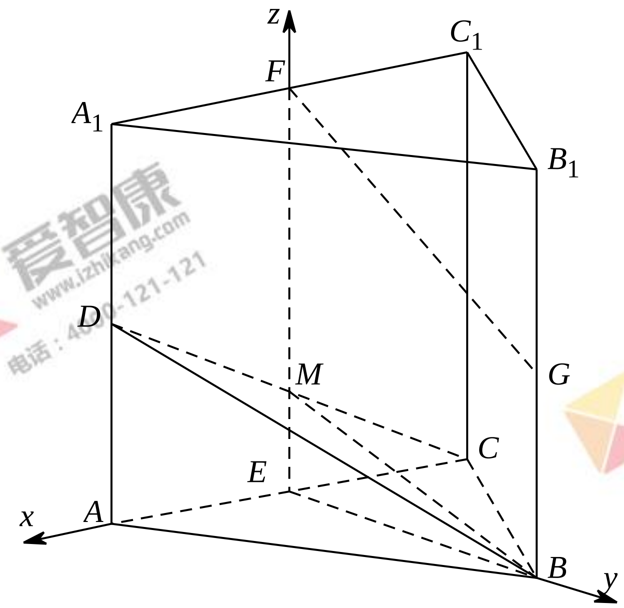
$\because EF$，$BE\subset$ 平面 BEF，$EF \mathrm{I} BE=E$，

$\therefore AC\perp$ 平面 BEF.

（2）由（1）知，$EF\perp AC$，$AC\perp BE$，$EF\perp EB$，

$\therefore$ 以 E 为原点，EA，EB，EF 分别为 x 轴，y 轴，z 轴

建立如图所示空间直角坐标系，



则有，$B(0,2,0)$，$C(-1,0,0)$，$D(1,0,1)$，$C_1(-1,0,2)$

$\overrightarrow{BC}=(-1,-2,0)$，$\overrightarrow{CD}=(2,0,1)$

设平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x-2y=0\\ 2x+z=0\end{cases}$，$\therefore \vec{n}=(2,-1,-4)$，.

易知平面 CDC_1 法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{1}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$，

由图可知，二面角 $B-CD-C_1$ 的平面角为钝角，

$\therefore$ 二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值 $-\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

（3）方法一：

$\because F(0,0,2)$，$G(0,2,1)$，$\therefore \overrightarrow{FG}=(0,2,-1)$

$\because$ 平面 BCD 的法向量 $\vec{n}=(2,-1,-4)$，

设直线 FG 与平面 BCD 的夹角为 θ，

$\therefore \sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{FG},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{FG}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{FG}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\dfrac{\left|-2+4\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{21}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{21}}\neq 0$，

$\therefore \theta\neq 0$，$\therefore$直线 FG 与平面 BCD 相交.

方法二：

假设直线 FG 与平面 BCD 平行，

$\because$设 CD 与 EF 的交点为 M，连结 BM，

$\because FG\subset$平面 BB_1FE，且平面 $BB_1FE\cap$ 平面 $BCD=BM$，

$\therefore FG//BM$，$\because BG//FM$，

$\therefore$四边形 $BMFG$ 为平行四边形，

$\therefore FM=BG$，易知 $FM\neq BG$，$\therefore$假设不成立，

$\therefore$直线 FG 与平面 BCD 相交.

17.【解析】(1)由表格可知电影的总部数 $140+50+300+200+800+510=2000$

获得好评的第四类电影 $200\times 0.25=50$

设从收集的电影中选1部，是获得好评的第四类电影为事件 A，则 $P(A)=\dfrac{50}{2000}=\dfrac{1}{40}$

（2）由表格可得获得好评的第五类电影 $800\times 0.2=160$

第五类电影总数为800 未获得好评的第五类电影 $800-160=640$

第四类电影总数为200 未获得好评的第四类定影 $200-50=150$

设从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部，估计恰有1部获得好评为事件 B

则 $P(B)=\dfrac{C_{50}^1C_{640}^1+C_{150}^1C_{160}^1}{C_{200}^1C_{800}^1}=\dfrac{35}{100}=\dfrac{7}{20}$

（3）$D\xi_1>D\xi_4>D\xi_2=D\xi_5>D\xi_3>D\xi_6$

18.【解析】（1）函数定义域为 $x\in\mathbf{R}$，

$$f'(x)=\left[2ax-(4a+1)\right]e^x+\left[ax^2-(4a+1)x+4a+3\right]e^x$$

$$=e^x\left[ax^2-(2a+1)x+2\right]$$

$$=e^x(ax-1)(x-2),$$

若函数在 $(1,f(1))$ 处切线与 x 轴平行，则

$f'(1)=-e(a-1)=0$，即 $a=1$.

（2）由（1）可知 $f'(x)=\left[ax^2-(2a+1)x+2\right]e^x=(x-2)(ax-1)e^x$，

①当 $a=0$ 时，令 $f'(x)=0$， $x=2$，

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	Z	极大值	]

不满足题意；

当 $a\neq 0$ 时，令 $f'(x)=0$， $x=2$ 或 $x=\dfrac{1}{a}$，

②当 $a<0$ 时，即 $\dfrac{1}{a}<2$，

x	$\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)$	$\dfrac{1}{a}$	$\left(\dfrac{1}{a},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$-$
$f(x)$	]	极小值	Z	极大值	]

不满足题意；

③当 $a>0$ 时，

1）当 $\dfrac{1}{a}=2$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时， $f'(x)\geqslant 0$，函数 $f(x)$ 无极值点；

2）当 $\dfrac{1}{a}<2$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，

x	$\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)$	$\dfrac{1}{a}$	$\left(\dfrac{1}{a},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	Z	极大值	]	极小值	Z

满足题意；

3）当 $\dfrac{1}{a}>2$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，

x	$(-\infty,2)$	2	$\left(2,\dfrac{1}{a}\right)$	$\dfrac{1}{a}$	$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	Z	极大值	]	极小值	Z

不满足题意.

综上所述，若 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，$a>\frac{1}{2}$.

19. 【解析】（1）由已知可得 $4=2p$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

令 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

直线 l 显然不能与 x 轴垂直，令其方程为 $y=kx+1$，

带入 $y^2=4x$ 整理得 $y=k\cdot\frac{y^2}{4}+1$，即 $ky^2-4y+4=0$.

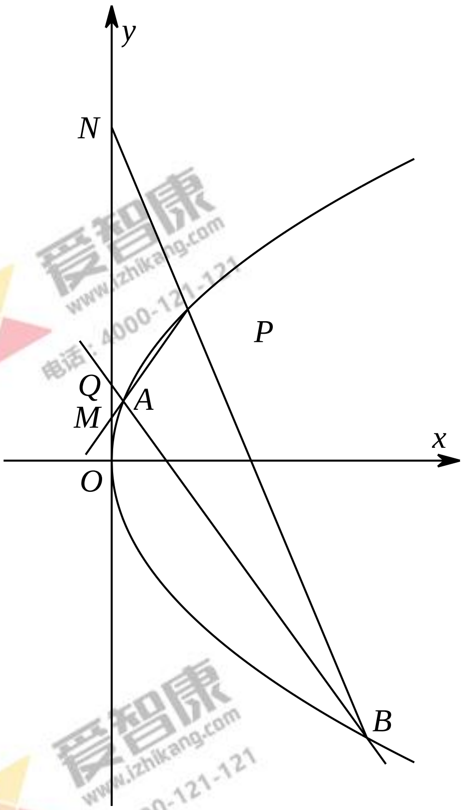
所以由已知可得 $\begin{cases}k\neq 0\\ \Delta=16-16k>0\end{cases}$，解得 $k<1$ 且 $k\neq 0$.

又因为直线 l 不能过点 $(1,-2)$，否则 PA 或 PB 会与 y 轴平行，无交点.

所以 $k\neq\frac{-2-1}{1-0}=-3$.

所以直线 l 的斜率 k 的取值范围为 $(-\infty,-3)\cup(-3,0)\cup(0,1)$.

（2）



由（1）知 $y_1+y_2=\frac{4}{k}$， $y_1y_2=\frac{4}{k}$.

而点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$ 均在抛物线上，所以 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$， $x_2=\frac{y_2^2}{4}$.

因为直线 PA 与直线 PB 与 y 轴相交，

则直线 PA 与直线 PB 的斜率均存在，即 $y_1\neq -2$， $y_2\neq -2$.

因为 $k_{PA}=\frac{y_1-2}{x_1-1}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}=\frac{4(y_1-2)}{y_1^2-4}=\frac{4}{y_1+2}$，

所以直线 PA 的方程为 $y-2=\frac{4}{y_1+2}(x-1)$，

令 $x=0$，可得 $y_M=2-\frac{4}{y_1+2}=\frac{2y_1}{y_1+2}$，即 $M(0,\frac{2y_1}{y_1+2})$.

同理可得 $N(0,\frac{2y_2}{y_1+2})$.

而由 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$ 可得， $\frac{2y_1}{y_1+2}-1=-\lambda$，所以 $\frac{1}{\lambda}=\frac{2+y_1}{2-y_1}$.

同理由 $\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$ 可得， $\frac{2y_2}{y_2+2}-1=-\mu$，所以 $\frac{1}{\mu}=\frac{2+y_2}{2-y_2}$.

所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{2+y_1}{2-y_1}+\frac{2+y_2}{2-y_2}=\frac{(2+y_1)(2-y_2)+(2+y_2)(2-y_1)}{(2-y_1)(2-y_2)}$

$$=\frac{8-2y_1y_2}{4+y_1y_2-2(y_1+y_2)}=\frac{8-\frac{8}{k}}{4+\frac{4}{k}-2\times\frac{4}{k}}=\frac{8-\frac{8}{k}}{4-\frac{4}{k}}=2.$$

20. 【解析】

解：（1）$\alpha=(1,1,0)$， $\beta=(0,1,1)$

$M(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}[(1+1-|1-1|)+(1+1-|1-1|)+(0+0-|0-0|)]=\frac{1}{2}[2+2+0]=2$，

$M(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}[(1+0-|1-0|)+(1+1-|1-1|)+(0+1-|0-1|)]=\frac{1}{2}[0+2+0]=1$，

（2）$\because x_i,y_i\in\{0,1\}$，$\therefore x_i+y_i-|x_i-y_i|=\begin{cases}0, & x_i=y_i=0\text{或}x_i\neq y_i\\ 2, & x_i=y_i=1\end{cases}$，

$n=4$，因为 $M(\alpha,\alpha)$ 为奇数，则 α 有1项或3项为1，其余为0，

所以理论上元素个数最多有 $C_4^1+C_4^3=8$ 个.

因为 $M(\alpha,\beta)$ 为偶数（α,β 不同），则两者同为1的项数为0或者2（若为4，则 α 与 β 相同）.

综上，最大个数为4，

$B=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ 或者 $B=\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$.

易知以上两种情况都可以满足题意，且一种情况集合中的元素与另一种情况集合中的元素结合，不满足题意，故最大个数为4.

（3）由（2）可知，任两不同的元素 α 与 β 满足 $M(\alpha,\beta)=0$，

则 α 与 β 无同一位置同为1，∴元素个数最大为 $n+1$，

$B=\{(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$.