Vol. 38 ( 2018 )
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

# 几个关于极坐标的 Bonnesen 型不等式

郑高峰, 周 阳
(华中师范大学数学与统计学学院, 湖北 武汉 430079)

**摘 要**: 本文研究了平面上 $C^2$ 闭凸曲线的极坐标形式 $\{O;\rho(\theta)\}$. 运用 Bonnesen 不等式的推广形式 [1,2], 得到关于 $\rho$ 及 $\rho_\theta$ 的一些积分形式的 Bonnesen 型不等式, 使得我们很容易得到等周不等式取等时的条件.

**关键词**: 等周不等式; 闭凸曲线; 极坐标; Bonnesen 不等式
MR(2010) **主题分类号**: 53A04 **中图分类号**: O186.11
**文献标识码**: A **文章编号**: 0255-7797(2018)06-1119-04

## 1 引言

经典等周不等式: 对平面内任一条简单闭曲线 $\gamma$, 设其周长为 $L$, 所围区域面积为 $A$, 有

$$L^2-4\pi A\geq 0, \tag{1.1}$$

等号成立当且仅当 $\gamma$ 是一个圆周.

1882 年, Edler 第一个给出严格的数学证明, 此后相继出现多种不同证明方法 [3], 而在这些证明中, 用到极坐标的情况非常少, 不等式中带有极坐标形式的基本没有. 因此给出一些带有极坐标形式的等周型不等式是必要的. 并且从文中定理 2.4, 定理 2.5 中带有极坐标的等周型不等式来看, 当 $L^2-4\pi A=0$ 时, 可以很直观的发现该曲线为圆周.

## 2 主要结果及其证明

**引理 2.1** [4] 对任意一条简单闭曲线 $\gamma$, 存在唯一一个包含 $\gamma$ 的最小圆环. 并且至少存在四点 $P_1,P_2,P_3,P_4$, 其中 $P_1,P_3$ 在该圆环的内圆周上, $P_2,P_4$ 在该圆环的外圆周上, 使得 $P_1,P_2,P_3,P_4$ 依次排列在曲线 $\gamma$ 上.

**注** Chouikha [5] 对 Jordan 多项式的情形作出了证明, 在文献 [4] 中推广到一般简单闭曲线.

接下来, 如无特别说明, 我们一直假设 $\gamma$ 是一条 $C^2$ 可求长的正定向闭凸曲线, 设其周长为 $L$, 所围区域面积为 $A$. 由引理 2.1, 存在唯一一个包含 $\gamma$ 的最小圆环, 记其中心为 $O$, 其内外圆周的半径分别为 $r_{\rm in}(O),r_{\rm out}(O)$. 以 $O$ 为坐标原点, 任选一方向为极轴方向, 建立极坐标系 $\{O;\rho(\theta)\}$.

**引理 2.2** [2] 如果 $O$ 是包含闭凸曲线 $\gamma$ 的最小圆环的中心, 则 $\gamma$ 的 Bonnesen 函数

$$g(r)=Lr-A-\pi r^2\geq 0,\ \ r_{\rm in}(O)\leq r\leq r_{\rm out}(O). \tag{2.1}$$

*收稿日期: 2016-11-22 接收日期: 2017-11-17
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11171126; 11571131).
作者简介: 郑高峰 (1976–), 男, 湖北黄冈, 教授, 主要研究方向: 椭圆抛物型偏微分方程, 几何发展方程.

**注** Bonnesen [1] 在 1921 年提出了 Bonnesen 不等式, 由文献 [2] 中 (1.7) 式可以得到此引理.

**定理 2.3** 若 $\rho(\theta)$ 是按上述定义在 $C^2$ 闭凸曲线 $\gamma$ 上的极坐标, 则有

$$L \geq \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta, \ \ \sqrt{4\pi A} \geq \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta. \tag{2.2}$$

并且两个不等式取等皆当且仅当 $\gamma$ 为圆周.

**证**

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho_\theta^2} \, d\theta \geq \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta. \tag{2.3}$$

由于

$$2A = \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta, \tag{2.4}$$

再运用 Cauchy 不等式

$$\int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \leq \sqrt{\int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta} = \sqrt{4\pi A}. \tag{2.5}$$

**定理 2.4** 若 $\rho(\theta)$ 是按上述定义在 $C^2$ 闭凸曲线 $\gamma$ 上的极坐标, 则有

$$L^2 - 4\pi A \geq L \int_0^{2\pi} (\sqrt{\rho^2 + \rho_\theta^2} - \rho) \, d\theta, \tag{2.6}$$

并且该不等式取等当且仅当 $\gamma$ 为圆周.

**证** 由于 $\{O; \rho(\theta)\}$ 是以包含 $\gamma$ 的最小圆环的中心为原点, 故

$$\rho([0, 2\pi]) = [r_{\text{in}}(O), r_{\text{out}}(O)]. \tag{2.7}$$

因此由引理 2.2,

$$g(\rho) = L\rho - A - \pi\rho^2 \geq 0. \tag{2.8}$$

关于 $\theta$ 在 $[0, 2\pi]$ 上积分, 再利用 $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho_\theta^2} \, d\theta$ 和 $2A = \int_0^{2\pi} \rho^2 \, d\theta$ 得到

$$L \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta - 4\pi A \geq 0. \tag{2.9}$$

由此可得 (2.6) 式.

若 $\gamma$ 为圆周, 则 $\rho(\theta) \equiv 0$, (2.6) 式两边恒为 0, 故取等. 反过来, 若 (2.6) 式取等, 则 (2.9) 式取等, 由 (2.8) 式左边函数的连续性可知 $g(\rho) \equiv 0, \forall \rho \in [r_{\text{in}}(O), r_{\text{out}}(O)]$, 因此 $r_{\text{in}}(O) = r_{\text{out}}(O)$, 故 $\gamma$ 为圆周.

**定理 2.5** 若 $\rho(\theta)$ 是按上述定义在 $C^2$ 闭凸曲线 $\gamma$ 上的极坐标, 则有

$$L^2 - 4\pi A \geq \frac{\pi}{m} \int_0^{2\pi} \rho_\theta^2 \, d\theta, \tag{2.10}$$

其中 $m=\max\{\max\limits_{[0,2\pi]}|\frac{-\rho_{\theta\theta}}{\rho}|,1\}$, 并且该不等式取等当且仅当 $\gamma$ 为圆周.

**证** 考虑 $\sqrt{\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2}$ 的值域, 其中 $\varepsilon$ 为任意正数.

若

$$(\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2)'_\theta=2\rho\rho_\theta+\frac{2}{m+\varepsilon}\rho_\theta\rho_{\theta\theta}=0. \tag{2.11}$$

由于 $m+\varepsilon>\max|\frac{-\rho_{\theta\theta}}{\rho}|$, 故 $\rho_{\theta\theta}+(m+\varepsilon)\rho>0$. 因此, 由 (2.11) 式得到 $\rho_\theta=0$, 此时有 $\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2=\rho^2$, 即 $\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2$ 在极值点处均等于 $\rho^2$.

由于 $\{O;\rho(\theta)\}$ 是以包含 $\gamma$ 的最小圆环的中心为原点, 故

$$\rho([0,2\pi])=[r_{\text{in}}(O),r_{\text{out}}(O)]. \tag{2.12}$$

因此有

$$\sqrt{\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2}\Big([0,2\pi]\Big)=[r_{\text{in}}(O),r_{\text{out}}(O)]. \tag{2.13}$$

因此由引理 2.2,

$$g(\sqrt{\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2})=L\sqrt{\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2}-A-\pi(\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2)\geq 0. \tag{2.14}$$

关于 $\theta$ 在 $[0,2\pi]$ 上积分, 再利用 $L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\rho_\theta^2}\,d\theta$, $2A=\displaystyle\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\theta$ 和 $m+\varepsilon>1$, 得到

$$L^2-4\pi A\geq L\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\frac{1}{m+\varepsilon}\rho_\theta^2}\,d\theta-4\pi A\geq\frac{\pi}{m+\varepsilon}\int_0^{2\pi}\rho_\theta^2\,d\theta. \tag{2.15}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性可得 (2.10) 式.

若 $\gamma$ 为圆周, 则 $\rho(\theta)\equiv 0$, 则 (2.10) 式两边恒为 0, 故取等. 反过来, 若 (2.10) 式取等, 则由被积函数的连续性, $g(\sqrt{\rho^2+\frac{1}{m}\rho_\theta^2})\equiv 0, \forall\sqrt{\rho^2+\frac{1}{m}\rho_\theta^2}\in[r_{\text{in}}(O),r_{\text{out}}(O)]$, 因此 $r_{\text{in}}(O)=r_{\text{out}}(O)$, 故 $\gamma$ 为圆周.

**推论 2.6** 若 $\rho(\theta)$ 是按上述定义在 $C^2$ 闭凸曲线 $\gamma$ 上的极坐标, $k$ 为曲线 $\gamma$ 的曲率, 且有 $0\leq k<\frac{2}{\sqrt{\rho^2+\rho_\theta^2}}$, 则有

$$L^2-4\pi A\geq\pi\int_0^{2\pi}\rho_\theta^2\,d\theta\geq\frac{1}{2}(L^2-4\pi A), \tag{2.16}$$

并且其中两个不等式取等皆当且仅当 $\gamma$ 为圆周.

**证** 由于

$$k=\frac{\rho^2+2\rho_\theta^2-\rho\rho_{\theta\theta}}{(\rho^2+\rho_\theta^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.17}$$

故

$$k<\frac{2}{\sqrt{\rho^2+\rho_\theta^2}}\iff\rho_{\theta\theta}+\rho>0. \tag{2.18}$$

按照定理 2.5 的证明方法, 可得 (2.16) 式左侧不等式, 至于后面的不等式, 可由 Cauchy 不等式

$$2\pi\int_0^{2\pi}\rho_\theta^2\,d\theta+4\pi A=2\pi\int_0^{2\pi}(\rho^2+\rho_\theta^2)\,d\theta\geq(\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\rho_\theta^2}\,d\theta)^2=L^2. \tag{2.19}$$

**注** 对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a,b>0$. 若 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{b}{a}<\sqrt{2}$ 成立, 则该椭圆满足推论 2.6 的条件.

事实上, 由椭圆极坐标形式

$$\rho(\theta)=\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}, \tag{2.20}$$

由

$$\rho+\rho_{\theta\theta}=\frac{ab}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{5/2}}(2a^4\sin^2\theta+2b^4\cos^2\theta-a^2b^2) \tag{2.21}$$

可知当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{b}{a}<\sqrt{2}$ 时, $\rho+\rho_{\theta\theta}>0,\forall\theta\in[0,2\pi]$. 再由 (2.18) 式即可.

## 参 考 文 献


[1] Osserman R. Bonnesen-style isoperimetric inequalities[J]. Amer. Math. Month., 1979, 86(1): 1–6.

[2] 潘生亮. 关于凸曲线的一些注记及其对曲率流的应用 [J]. 数学年刊 A 辑 (中文版), 2000, 21(1): 53–56.

[3] Burago Y D, Zalgaller V A. Geometric inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1961.

[4] 潘生亮. 几何不等式与曲率流 [D]. 上海: 华东师范大学, 2001.

[5] Chouikha A R. Problems on polygons and Bonnesen-type inequalities[J]. Indagationes Mathematicae, 2001, 10(4): 495–506.


# SEVERAL BONNESEN-STYLE INEQUALITIES ABOUT POLAR COORDINATES


ZHENG Gao-feng, ZHOU Yang

(*School of Mathematics and Statistics, China Central Normal University, Wuhan 430079, China*)



**Abstract:** In this paper, we study $C^2$ convex closed plane curve inpolar coordinates $\{O;\rho(\theta)\}$. By using the extended Bonnesen inequalities [1, 2], we obtain some new Bonnesen-type inequalities about integration of $\rho$ and $\rho_\theta$, so that we can easily get the conditions under which equality in the isoperimetric inequality holds.



**Keywords:** isoperimetric inequality; convex closed curve; polar coordinates; Bonnesen inequality

**2010 MR Subject Classification:** 53A04