2018~2019 学年第一学期高三年级阶段性测评

数学试卷分析

说明：本试卷分为第 I 卷（必做题）和第 II 卷（选做题），两部分，答题时间 120 分钟，满分 150 分

第 I 卷（必做题）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 已知集合 $M=\{x||x|<1\},N=\{x|x(x-2)>0\}$，则 $M\cup N=$（　）

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$

考点：集合并集运算

答案：B

解析：解绝对值不等式 $|x|<1$ 得，$-1<x<1,$

解一元二次不等式 $x(x-2)>0$ 得，$x<0$ 或 $x>2,$

故集合 $M=\{x|-1<x<1\},\ N=\{x|x<0\text{或}x>2\}$

$M\cup N=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，所以选 B.

2. 函数 $y=\ln x+\sqrt{1-x}$ 的定义域是（　）

A. $(0,1)$　　B. $[0,1]$　　C. $(0,1]$　　D. $[0,1)$

考点：常见函数定义域求解

答案：C

解析：根据常见函数定义域 $\begin{cases}x>0\\1-x\geq 0\end{cases}$ 解得 $0<x\leq 1$ 所以选 C.

3. 给定函数① $y=x^{\frac{1}{2}}$，② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，③ $y=|x-1|$，④ $y=2^{x+1}$，其中在$(0,1)$上单调递增的函数是（ ）

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

考点：幂函数、对数函数、绝对值函数、指数函数单调性

答案：D

解析：结合函数图象

① $y=x^{\frac{1}{2}}$，在区间$(0,1)$上递增

② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$，在区间$(0,1)$上递减

③ $y=|x-1|$，在区间$(0,1)$上递减

④ $y=2^{x+1}$，在区间$(0,1)$上递增

故①④成立，所以选 D.

4. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2=\frac{1}{2}, a_1-a_3=\frac{3}{4}$，则$a_4=$（ ）

A. $-\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. -4　　D. 4

考点：等比数列通项公式

答案：A

解析：设等比数列$a_n=a_1q^{n-1},(q\neq 0)$

由$\begin{cases}a_1+a_2=\frac{1}{2}\\ a_1-a_3=\frac{3}{4}\end{cases}$ 得$\begin{cases}a_1+a_1q=\frac{1}{2}\\ a_1-a_1q^2=\frac{3}{4}\end{cases}$

解方程组得$a_1=1, q=-\frac{1}{2}$

等比数列通项为：$a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

当$n=4,\ a_4=-\dfrac{1}{8}$.所以选 A.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, x\geq 2,\\ f(x+1), \ x<2,\end{cases}$ 则 $f(\log_2 3)=$（ ）

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{5}{6}$

考点：分段函数求值

答案：C

解析：$f(\log_2 3)=f(\log_2 3+1)=f(\log_2 6)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 6}=\dfrac{1}{6}$，所以选 C.

6. 函数 $y=x+\dfrac{3}{x}+2\ln x$ 的单调递减区间是（ ）

A. $(-3,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-1,3)$　　D. $(0,3)$

考点：利用导数判断单调性

答案：B

解析：$\because y=x+\dfrac{3}{x}+2\ln x(x>0)\therefore y'=1+\left(-\dfrac{3}{x^2}\right)+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2}=\dfrac{(x+3)(x-1)}{x^2}$，

令 $y'<0$ 即 $x-1<0$ 解得：$0<x<1$，所以选 B.

7. 《周髀算经》中有如下问题：从冬至日起，依此是小寒、大寒、立春、雨水惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气，其日影长依此成等差数列，已知某地冬至、立春、春分日影长之和为 31.5尺，则该地芒种日影长为（ ）

A. 1.5尺　　B. 2.5尺　　C. 3.5尺　　D. 4.5尺

考点：等差数列通项公式

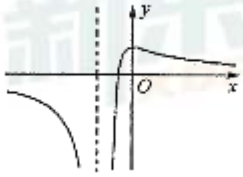
答案：B

解析：设冬至到芒种这 12 个节气的日影长为等差数列$\{a_n\}$，

则有$\begin{cases} a_1+a_4+a_7=31.5 \\ a_1+a_2+\cdots+a_9=85.5 \end{cases}$，即$\begin{cases} 3a_1+9d=31.5 \\ 9a_1+36d=85.5 \end{cases}$解得：$\begin{cases} a_1=13.5 \\ d=-1 \end{cases}$，

故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-n+14.5$，故芒种日影长$a_{12}=-12+14.5=2.5$所以选 B.

8. 函数$f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$的图象大致如右图所示，则下列结论正确的是（　）



A. $a>0,b>0,c>0$　　B. $a<0,b>0,c<0$

C. $a<0,b<0,c>0$　　D. $a>0,b>0,c<0$

考点：函数的图象

答案：A

解析：首先根据定义域可得$-c<0$即$c>0$；其次根据纵截距可得$b>0$；最后根据x轴正半轴上图象在x轴上方可得$a>0$,所以选 A.

9. 已知$f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in R)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点，则$f(x)$在$[-1,1]$上的值域为（　）

A. $[-4,0]$　　B. $[-4,1]$　　C. $[-1,3]$　　D. $[-\frac{3}{2},12]$

考点：函数的值域与零点问题

答案：B

解析：$\because$函数$f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in R)$在$(0,+\infty)$内有且只有一个零点，

$\therefore f'(x)=2x(3x-a)$，$x\in(0,+\infty)$

①当$a\le 0$时，$f'(x)=2x(3x-a)>0$，

函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(0)=1$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点，舍去；

②当 $a>0$ 时，$f'(x)=2x(3x-a)>0$ 的解为 $x>\frac{a}{3}$

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上递增，又 $f(x)$ 只有一个零点，

$\therefore f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$，解得 $a=3$，

$f(x)=2x^3-3x^2+1$，$f'(x)=6x(x-1)$，$x\in[-1,1]$，$f'(x)>0$ 的解集为 $(-1,0)$，

$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递增，在 $(0,1)$ 上递减，

$f(-1)=-4$，$f(0)=1$，$f(1)=0$

$\therefore f(x)_{\min}=f(-1)=-4$，$f(x)_{\max}=f(0)=1$

$\therefore f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的值域为 $[-4,1]$，故选 B

10. 已知集合 $P=\{x\,|\,x=2^n,n\in N^*\}$，$Q=\{x\,|\,x=2n-1,n\in N^*\}$，将 $P\cup Q$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$，记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则使得 $S_n<1000$ 成立的 n 的最大值为（　　）

A. 9　　B. 32　　C. 35　　D. 61

考点：数列求和问题

答案：C

解析：$\because P=\{x\,|\,x=2^n，n\in N^*\}$，$Q=\{x\,|\,x=2n-1，n\in N^*\}$，

$p\cup Q$ 中的所有元素从小到大依次排列，构成数列 $\{a_n\}$，前 n 项和为 S_n

满足条件时，假设 $\{2n-1\}$ 共有 s 个，2^n 共有 t 个

（1）若 s 为最后一项

$$\begin{cases} \dfrac{1+(2s-1)}{2}\cdot s+\dfrac{2\left(1-2^t\right)}{1-2}=s^2+2\cdot 2^t-2<1000① \\ 2^t<2s-1② \end{cases}$$

$\Rightarrow s=30$，代入①求得 $t=5$

（2）若 t 为最后一项

$$\begin{cases} \dfrac{1+(2s-1)}{2}\cdot s+\dfrac{2\left(1-2^t\right)}{1-2}=s^2+2\cdot 2^t-2<1000① \\ 2^t>2s-1② \end{cases}$$

$\Rightarrow t=5, s=16, S_n=318$（舍），或 $t=6, s=32, S_n>1000$（舍）

综上，使得 $S_n<1000$ 成立的 n 的最大值为 $s+t=30+5=35$，故选 C

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 的奇函数，且满足 $f(2-x)=f(x), f(-1)=1$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1, \dfrac{S_n}{n}=\dfrac{2a_n}{n}+1(n\in N^*)$，其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $f(a_5)+f(a_6)=$（　　）

A. -2　　　　B. -1　　　　C. 0　　　　D. 1

考点：数列递推，通项公式和函数周期性及函数值求解

答案：A

解析：$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\because f(2-x)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数

$\because \dfrac{S_n}{n}=\dfrac{2a_n}{n}+1\left(n\in N^*\right)$

$\therefore S_n=2a_n+n①$，$S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1)(n\geq 2)②$

$①-②: a_n=2a_{n-1}-1(n\geq 2)\Rightarrow a_n-1=2\left(a_{n-1}-1\right)(n\geq 2)$

$\therefore a_1-1=-2$

$\therefore$ 数列 $\{a_n-1\}$ 是以 -2 为首项，2 为公比的等比数列

$\therefore a_n-1=-2\times 2^{n-1}=-2^n$，即 $a_n=-2^n+1$，

$\therefore a_5=-31, a_6=-63$

$\therefore f(a_5)+f(a_6)=f(-31)+f(-63)=f(1)+f(1)=2f(1)=-2f(-1)=-2$，故选 A

12. 已知定义在$(0,+\infty)$上的可导函数$f(x)$，满足$xf'(x)<(x-1)f(x)$，则下列结论正切的是（　　）

A. $ef(1)>2f(2)$　　B. $ef(1)<2f(2)$　　C. $f(1)<f(2)$　　D. $f(1)>f(2)$

考点：构造函数证明不等式

答案：A

解析：设函数$g(x)=xf(x)$，则$g'(x)=f(x)+xf'(x)<f(x)+(x-1)f(x)=xf(x)=g(x)$

设函数$h(x)=\dfrac{g(x)}{e^x}$，则$h'(x)=\dfrac{e^xg(x)-e^xg'(x)}{e^{2x}}<0$，因此$h(x)$是单调递减的

$\therefore \dfrac{g(2)}{e^2}<\dfrac{g(1)}{e}\Rightarrow\dfrac{2f(2)}{e^2}<\dfrac{f(1)}{e}\Rightarrow 2f(2)<ef(1)$，故选 A

二、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上）

13. 已知集合$A=\{-1,0,1\}, B=\{x|x^2-3x+m=0\}$，若$A\cap B=\{0\}$，则$B=$______

考点：集合间的运算

答案：$\{0,3\}$

解析：由题可得$0\in B$，即$0-0+m=0\Rightarrow m=0$，此时$B=\{x|x^2-3x=0\}=\{0,3\}$

14. 已知函数$y=(ax+1)e^x$在$x=0$处的切线经过点$(1,-1)$，则实数$a=$______

考点：利用导数研究切线方程

答案：$a=-3$

解析： $y'=a\cdot e^x+(ax+1)e^x=(ax+a+1)e^x$，由题可知 $y'|_{x=0}=a+1$，又因为 $f(0)=1$

即 $\frac{-1-1}{1-0}=a+1$，故 $a=-3$

15．在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$，$a_n=\frac{n^2}{n^2-1}a_{n-1}(n\geq 2)$，记 S_n 为数列 $\left\{\frac{a_n}{n^2}\right\}$ 的前 n 项和，若 $S_n=\frac{49}{25}$，则

$n=$______

考点： 数列求和

答案： $n=49$

解析： 由题可得 $\frac{a_n}{n}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{a_{n-1}}{n-1}$，令 $b_n=\frac{a_n}{n}$，可得 $b_n=\frac{n}{n+1}b_{n-1}$

由 $b_n=b_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}=1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{2}{n+1}$

可得 $a_n=\frac{2n}{n+1}$，即有 $\frac{a_n}{n^2}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

则前 n 项和 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

此时 $S_n=\frac{2n}{n+1}=\frac{49}{25}$，则 $n=49$

16. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x+1$ 若对于任意实数 x，不等式 $f(x^2+a)+f(2ax)>2$ 恒成立，则实数 a 的取值范围______

考点： 函数性质综合

答案： $(0,1)$

解析： 令 $h(x)=f(x)-1=e^x-e^{-x}-2x$，由于 $h(-x)=e^{-x}-e^x+2x$，则 $h(x)=-h(-x)$，

$h(x)$ 为奇函数，$h'(x)=e^x+e^{-x}-2\geq 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，则 $h(x)$ 为增函数。

$f(x^2+a)+f(2ax)>2$ 可化为 $f(x^2+a)-1+f(2ax)-1>0$，则

$h\left(x^2+a\right)+h(2ax)>0$ 恒成立，即$h\left(x^2+a\right)>-h(2ax)$恒成立，根据$h(x)$的单调性与奇偶性可得，$x^2+a>-2ax$恒成立，即$x^2+2ax+a>0$恒成立，则$\Delta=(2a)^2-4\times1\times a=4a^2-4a<0$，解得：$0<a<1$

三、解答题（本大题共 4 小题，共 48 分）

17. 已知集合$A=\left\{x\middle|1\le\sqrt{x}<2\right\}$，$B=\left\{y\middle|y=\log_2 x.x\in A\right\}$，

（1）求$A\cap B$

（2）若$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{x},x\in A\cap B,$求函数$f(x)$的值域

考点：集合与指对函数

解析：（1）$A=\left\{x|1\le\sqrt{x}<2\right\}=\left\{x|\sqrt{1}\le\sqrt{x}<\sqrt{4}\right\}=\left\{x|1\le x<4\right\}$，由于$y=\log_2 x$在$[1,4)$上单调递增，则$B=\left\{y|0\le y<2\right\}$，所以$A\cap B=\left\{x|1\le x<2\right\}$

（2）$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{1}{x},f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{x^2}<0,$则$f(x)$在$[1,2)$上单调递减，

$f(1)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2},f(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，则函数$f(x)$的值域为$\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right]$

18. 已知数列$\{a_n\}$中，$S_n+a_n=2(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_2 a_{n+1}(n\in N^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 若$c_n=a_nb_n(n\in N^*)$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n

考点：数列通项与错位相减求和

解析：(1) $S_n=-a_n+2$，$n=1$时，$a_1=-a_1+2$，则$a_1=1$

$n\ge2$时，$S_{n-1}=-a_{n-1}+2$，$a_n=S_n-S_{n-1}=a_{n-1}-a_n$，$2a_n=a_{n-1}$，所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，

则数列$\{a_n\}$为首项为1，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，所以，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^{-n}$，则$b_n=\log_2 a_{n+1}=\log_2 2^{-n}=-n$

(2) $c_n=(-n)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$T_n=(-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^0+(-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+(-3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(-n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{2}T_n=\quad(-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^1+(-2)\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left[-(n-1)\right]\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(-n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

两式相减可得：

$$\frac{1}{2}T_n=-1+(-1)\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-(-n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2}T_n=-1+(-1)\times\left(\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}\right)-(-n)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

解得：$T_n=(2n+4)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$

19. 已知函数$f(x)=x\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，其中$a>0$，且$a\neq 1$.

(1) 判断$f(x)$的奇偶性，并证明你的结论；

(2) 若关于x的不等式$f(x)\leq\frac{1}{6}$在$[-1,1]$上恒成立，求实数a的取值范围.

考点：函数性质的应用

解析：

（1）$f(x)$为偶函数

证明：由题可知，$f(x)$定义域为$x\in R$

$$f(x)=x\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=-x\left[\frac{a^x-1}{2(a^x+1)}\right]$$

$$f(-x)=-x\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-x\left[\frac{a^x-1}{2(a^x+1)}\right]$$

$\therefore f(x)=f(-x)$

故$f(x)$为偶函数

（2）由（1）得，$f(x)$为偶函数

$\therefore f(x)\le\frac{1}{6}|x|$在$[-1,1]$上恒成立

即$x\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{6}x$在$[0,1]$上恒成立

所以：$\frac{1}{a^x+1}\le\frac{2}{3}$

化简得：$a^x\le\frac{1}{2}$

①当$0<a<1$时，a^x单调递减，$a^x\ge a^1\ge\frac{1}{2}$　$\therefore\frac{1}{2}\le a<1$

②当$a=1$时，$1^x\ge\frac{1}{2}$　恒成立

③当$a>1$时，a^x单调递增，$a^x\ge a^0=1\ge\frac{1}{2}$　恒成立

综上，$a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

20 已知函数$f(x)=\frac{1}{2}ax^2+(1-2a)x-2\ln x$，$a\in R$.

(1) 讨论$f(x)$的单调性；

(2) 若不等式$f(x)\ge\frac{3}{2}$在$(0,1)$上恒成立，求实数a的取值范围.

考点：利用导数判断单调性及求最值

解析：

（1）函数定义域为 $x\in(0,+\infty)$

$$f'(x)=ax+(1-2a)-\frac{2}{x}$$
$$=\frac{ax^2+(1-2a)x-2}{x}$$
$$=\frac{(ax+1)(x-2)}{x}$$

令 $g(x)=(ax+1)(x-2)$

①当 $a=0$ 时，$g(x)=x-2$

$x\in(0,2)$ 时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 单调递减

$x\in(2,+\infty)$ 时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 单调递增

②当 $a>0$ 时，$-\frac{1}{a}<0<2$

$x\in(0,2)$ 时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 单调递减

$x\in(2,+\infty)$ 时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 单调递增

③当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$-\frac{1}{a}>2$

$x\in(0,2)$，$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 单调递减

$x\in\left(2,-\frac{1}{a}\right)$ 时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 单调递增

④当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$-\frac{1}{a}=2$

$x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)\le 0\Rightarrow f'(x)\le 0\Rightarrow f(x)$ 单调递减

⑤当 $a<-\frac{1}{2}$ 时，$0<-\frac{1}{a}<2$

$x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$，$(2,+\infty)$时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)$单调递减

$x\in\left(-\frac{1}{a},2\right)$时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$单调递增

（2）$f(x)\geq\frac{3}{2}$即 $f(x)_{\min}\geq\frac{3}{2}$

由（1）知：

①当 $a\geq-1$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减

$f(x)>f(1)=\frac{1}{2}a+(1-2a)-2\ln1\geq\frac{3}{2}$

$\therefore a\leq-\frac{1}{3}$

即 $a\in\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

②当 $a<-1$时，$f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{1}{a},1\right)$上单调递增

$f(x)\geq f\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{2a}+(1-2\text{a})-2\ln1\geq\frac{3}{2}$

即 $-\frac{1}{2a}+2\ln(-\text{a})\geq-\frac{1}{2}$　　又 $-\frac{1}{2a}+2\ln(-a)>0$

则 $a<-1$时，$-\frac{1}{2a}+2\ln(1-a)\geq-\frac{1}{2}$恒成立

$\therefore a\in(-\infty,-1)$

综上，$a\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$

2018~2019 学年第一学期高三年级阶段性测评

数 学 试 卷

第 II 卷（选做题 共 30 分）

本卷包括（选修 4-4 极坐标与参数方程），（选修 4-5 不等式选讲）共两个模块的试题，请考生在下列两个模块中任选一个作答，如果多选则按所做的第一模块记分.

选修 4-4 极坐标与参数方程

一、选择题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请将其字母代号填入下表相应位置）

1. 在平面直角坐标系 xoy 中，点 P 的坐标为 $(1,1)$，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，则点 P 的极坐标为（　　）

A. $(1,\dfrac{\pi}{4})$　　B. $(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4})$　　C. $(\cos 1,\sin 1)$　　D. $(\sqrt{2}\cos 1,\sqrt{2}\sin 1)$

考点：极坐标定义

答案：B

解析：由极坐标定义可得，$\rho=\sqrt{2},\theta=\dfrac{\pi}{4}$，则极坐标为 $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$

2. 在平面直角坐标系 xoy 中，若直线 $y=x$ 与曲线 $\begin{cases}x=2+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$，($\theta$ 是参数，$t>0,t\neq\sqrt{2}$) 有公共点，则下列说法正确的是（　　）

A. $0<t<\sqrt{2}$　　B. $t>\sqrt{2}$　　C. $\theta=\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$

考点：直线的参数方程

答案：D

解析：由题意可得，曲线 $\begin{cases}x=2+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$ 恒过定点 $(2,0)$，当 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，直线斜率为 -1，与 $y=x$ 相交

二、填空题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

3. 在平面直角坐标系 xoy 中，曲线 $C_1:\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$，($t$ 是参数)，曲线 $C_2:\begin{cases} x=2+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}$，($\theta$ 是参数)，若曲线 C_1 与 C_2 相交于 A,B 两个不同点，则 $|AB|=$_______.

考点： 直线参数方程 t 的几何意义

答案： $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

解析： 由题意可得，曲线 C_2 的直角坐标方程为：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，将 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t, y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t$ 带入可

得：

$3t^2-4\sqrt{2}t=0$，则 $t_1+t_2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, t_1\cdot t_2=0$，$|AB|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

4. 在极坐标系中，点 P 的坐标为 $(1,\dfrac{\pi}{2})$，点 Q 是曲线 $\rho^2(1+\sin^2\theta)=2$ 上的动点，则 $|PQ|$ 的最大值为_______.

考点： 极坐标方程

答案： 2

解析： 由题可得：

$$\rho^2\left(1+\sin^2\theta\right)=2 \Rightarrow \rho^2+\left(\rho\sin\theta\right)^2=2$$

$$x^2+y^2+y^2=2$$

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

设 $Q\left(\sqrt{2}\cos\theta,\sin\theta\right)$，则 $P\left(0,1\right)$

$$|PQ|=\sqrt{2\cos^2\theta+(\sin\theta-1)^2}=\sqrt{2\cos^2\theta+\sin^2\theta-2\sin\theta+1}=\sqrt{-\sin^2\theta-2\sin\theta+3}$$
$$=\sqrt{-(\sin\theta+1)^2+4}\le 2$$

故$|PQ|_{max}=2$

三、填空题（本大题共 1 小题，满分 10 分. 解答需写出文字说明、证明过程或演算步骤）

5. 在平面直角坐标系 xoy 中，曲线$C_1: x^2-2ax+y^2=0(a>0)$，曲线C_2的参数方程为

$\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$ (α 是参数)，以坐标原点O为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系.

（1）求曲线C_1与C_2的极坐标方程；

（2）已知极坐标方程为$\theta=\dfrac{\pi}{6}$的直线与曲线C_1，C_2分别交于P,Q两点（均异于原点O），若$|PQ|=2\sqrt{3}-1$，求实数a的值.

考点：极坐标与参数坐标

解析：（1）由题：$C_1: x^2-2ax+y^2=0, C_2: x^2+(y-1)^2=1$

即$C_2: x^2+y^2-2y=0$

又$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1: \rho=2a\cos\theta \\ C_2: \rho^2-2\rho\sin\theta=0 \end{cases}$

（2）$\begin{cases} \theta=\dfrac{\pi}{6} \\ \rho=2a\cos\theta \end{cases} \Rightarrow P\left(\sqrt{3}a, \dfrac{\pi}{6}\right)$

点P的直角坐标为$P\left(\dfrac{3}{2}a, \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

$\begin{cases} \theta=\dfrac{\pi}{6} \\ \rho^2-2\rho\sin\theta=0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(1, \dfrac{\pi}{6}\right)$

点 Q 的直角坐标 $Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$$|PQ|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}-1\Rightarrow\sqrt{3a^2-2\sqrt{3}a+1}=2\sqrt{3}-1$$

$\Rightarrow a=2$

选修 4-5　不等式选讲

一、选择题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请将其字母代号填入下表相应位置）

1. 不等式 $|2x-1|>1$ 的解集为（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

考点：解绝对值不等式

答案：B

解析：由题 $|2x-1|>1$，即 $2x-1>1$ 或 $2x-1<-1$

解得：$x>1$ 或 $x<0$

故答案选 B

2. 若关于 x 的不等式 $|x+1|-|x-2|\le m$ 在 $(-\infty,1]$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $[3,+\infty)$　　D. $(-\infty,3]$

考点：绝对值不等式恒成立问题

答案：A

解析：由题令 $f(x)=|x+1|-|x-2|$，

当 $x\le-1$ 时 $f(x)=-(x+1)+(x-2)=-3$

当 $-1<x\le1$ 时 $f(x)=(x+1)+(x-2)=2x-1$

函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,1\right]$ 的最大值为 $f(1)=1$

所以 $m\geq 1$

故答案选 A

二、填空题（本大题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

3. 不等式 $|x+1|<2x-1$ 的解集为________.

考点： 解绝对值不等式

答案： $(2,+\infty)$

解析： 由题 $\left|x+1\right|<2x-1$，则有 $2x-1>0$，即 $x>\dfrac{1}{2}$

则不等式等价于 $x+1<2x-1$，解得：$x>2$

4. 若关于 x 的不等式 $|ax-1|\leq 2$ 在 $\left[-1,1\right]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为________.

考点： 不等式恒成立

答案： $\left[-1,1\right]$

解析： 不等式 $|ax-1|\leq 2$ 左右两边同时平方，可得 $(ax-1)^2\leq 4$

即 $a^2x^2-2ax-3\leq 0$ 在 $x\in\left[-1,1\right]$ 上恒成立

①当 $a^2=0$ 时，$-3\leq 0$ 成立

②当 $a^2\neq 0$ 时，此时 $a^2>0$，需满足以下条件，则 $a^2x^2-2ax-3\leq 0$ 在 $x\in\left[-1,1\right]$ 上恒成立

$$\begin{cases}\Delta>0\\ f(-1)\leq 0\\ f(1)\leq 0\end{cases}\text{可解得}\begin{cases}16a^2>0\\ -3\leq a\leq 1\\ -1\leq a\leq 3\end{cases}\Rightarrow -1\leq a\leq 1$$

综上所述：. $\left[-1,1\right]$

三、填空题（本大题共 1 小题，满分 10 分. 解答需写出文字说明、证明过程或演算步骤）

5. 已知 $f(x)=|x-2|$.

（1）解不等式 $f(x)+1\geq f(2x)$；

（2）若 $f(m)\leq 1$，$f(2n)\leq 2$，求 $|m-2n-1|$ 的最大值，并求此时实数 m,n 的取值.

考点： 解不等式

答案： $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$m=1$，$n=2$

解析：（1）代入得：$|2x-2|-|x-2|<1$

①当 $x<1$ 时，解得 $-1<x<1$

②当 $1\leq x<2$ 时，解得 $1\leq x<\frac{5}{3}$

③当 $x\geq 2$ 时，无解

综上：原不等式的解集是 $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$

（2）由题：$|m-2|\leq 1\therefore 1\leq m\leq 3$

$|2n-2|\leq 2\therefore 0\leq n\leq 2$

$\therefore -4\leq -2n\leq 0,-3\leq m-2n\leq 3,-4\leq m-2n-1\leq 2$

$\therefore |m-2n-1|\leq 4$ 即 $m-2n-1=-4$，此时 $m=1$，$n=2$