期货期权定价与交易保证金、执行手续费

上海期货交易所 发展研究中心　　奚炜

摘要：本文就保证金与手续费这一因素，对 Black F.提出的期货期权定价模型进行了探讨，并推导出了考虑期货交易保证金、期权执行手续费等条件下的期货期权定价模型的解析解。

关键词：期货期权定价 保证金 执行手续费

Abstract: In the article, the Black’s Option on Futures pricing model is adjusted with the factors of margin and transaction fee of futures, and the solution for the adjusted model is included.

Key Words：Futures Option Pricing　Margin　Transaction Fee　Exercise Fee

1. 引言

Black F.与 Scholes M.在 1973 年推导出了基于标的资产的任何衍生证券的价格必须满足的微分方程，即 Black-Scholes 微分方程。从那时起，Black-Scholes 微分方程就成为了衍生品定价理论的重要基石。

1976 年，Black F.在 Black-Scholes 微分方程的基础上，针对期货期权推导出了 Black 期货期权定价模型。但是 Black 期货期权定价模型中没有考虑期货交易中保证金所带来的影响。

2．Black 期货期权定价模型

期货期权的标的是期货，期货认购期权（欧式）允许持有人在认购期权到期时有权利买进期货，期货认沽期权（欧式）则允许持有人在认沽期权到期时有权利出售期货。

假定期货价格 F 和现货价格 S 的关系为：

$$F = e^{\alpha(T-t)}S \tag{1}$$

这里的 α 是无风险利率加上商品的单位时间单位价值存储费减去便利收益。如果

α 仅是时间的函数，我们可进一步假定现货价格 S 遵循如下过程：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw \tag{2}$$

其中波动率 σ 为常数。根据 Itô 定理，期货价格 F 的波动率 σ_F，其中

$$\sigma_F F = \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} = e^{\alpha(T-t)} \sigma S = \sigma F$$

因此，

$$\sigma_F = \sigma$$

即期货价格 F 的波动率等于现货价格 S 的波动率。

因此，我们可以假定期货价格遵循如下过程：

$$dF = \mu_F F dt + \sigma F dw \tag{3}$$

其中 dw 是维纳过程，且 σ 为常数。

构造避险证券组合 Π 如下：

$$-1 : \text{期货期权}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial F} : \text{期货合约}$$

避险证券组合 Π 持有者从组合中的期货期权与期货合约得到的收益应该等于该避险证券组合价值的无风险收益（以 r 表示），而 Black F.又认为期货合约构建成本为零，因此有：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial F^2} \sigma^2 F^2 = rf \tag{4}$$

定义 T 为期货期权的总体有效时间，t 为距离期货期权到期的时间，F_T 为期货期权到期时的期货价格，K 为期货期权的执行价格，考虑欧式期货认购期权边界条件 $\max[(F_T - K), 0]$ 与欧式期货认沽期权边界条件 $\max[(K - F_T), 0]$，则欧式期货认购期权价格为

$$c = e^{-r(T-t)}[FN(d_1) - KN(d_2)] \tag{5}$$

而欧式期货认沽期权价格为

$$p = e^{-r(T-t)}[KN(-d_2) - FN(-d_1)] \tag{6}$$

此处， $N(g)$ 为标准正态分布累积函数，

$$d_1=\frac{\ln(F/K)+(\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \qquad d_2=\frac{\ln(F/K)-(\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

3．考虑期货保证金、交易手续费与执行手续费的 Black 期货期权定价模型

在实际市场交易中，期货的购买不是一个纯粹信用交易，在购买期初就需要缴纳一定量的保证金（假定保证金率为 m_1），虽然交易所在期货交割或者平仓时会归还保证金给投资者，但投资者实际上损失了保证金的利息。同时，而期货期权买方执行期权还需缴纳一定量的执行手续费 m_2。

由于期货期权价格 $f=f(F,t)$ 是 F 与 t 的函数，根据 Itô 定理，它满足：

$$df=(\frac{\partial f}{\partial F}\mu F+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2F^2)dt+\frac{\partial f}{\partial F}\sigma Fdw \tag{7}$$

构造避险证券组合 Π 如下：

-1：期货期权

$+\frac{\partial f}{\partial F}$：期货合约

不考虑交易手续费，期货合约的初始构建成本为零，所以该避险证券组合价值为：

$$\Pi=-f \tag{8}$$

定义 Δf 与 ΔF 分别为期货期权价格 f 与期货价格 F 在时间 Δt 内的变化。在 Δt 时间内，该避险组合的持有者从期货期权中获取的收益为 Δf。考虑期货保证金的便利损失，记 β 为单位时间单位价值的便利损失率（$0\le\beta\le r$）[31]，则该避险组合的持有者在 Δt 时间内的资产变化为：

$$\Delta H=-\Delta f+\frac{\partial f}{\partial F}\Delta F-\beta m_1\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|\Delta t \tag{9}$$

式（3）与（7）的离散形式如下：

---

[31]权利凭证包括国债等有价证券时（且抵押行为具有实际可操作性），β 为国债流动性损失（实际上是国债的平值利率认沽期权费率，可参考近期银行向社会发行的国债的提前赎回费率）；如果权利凭证不包括国债等有价证券时，$\beta=r$。

$$\Delta F = \mu_F F \Delta t + \sigma F \Delta w$$

$$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial F}\mu F + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial F}\sigma F \Delta w$$

其中$\Delta w = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$，$\varepsilon$是标准正态分布的随机抽样。则有：

$$\Delta H = -(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 + \beta m_1\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|)\Delta t$$

因为这是一个无风险的证券组合，因此下列等式是成立的：

$$\Delta H = r\Pi\Delta t$$

而$\Pi = -f$，因此有：

$$-(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 + \beta m_1\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right|)\Delta t = -rf\Delta t$$

则有：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \beta m_1\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right| F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 = rf \qquad (10)$$

因为期权执行手续费为m_2，则欧式期货认购期权持有者在到期时实现的收益是$\max[(F_T - K - m_2), 0]$，且$\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right| = \frac{\partial f}{\partial F}$，则求解欧式期货认购期权的偏微方程式为：

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \beta m_1\frac{\partial C}{\partial F}F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 = rC \\ C_T = \max[(F_T - K - m_2), 0] \end{cases} \qquad (11)$$

求解上式得到欧式期货认购期权价格为：

$$C = e^{-(r-\beta m_1)(T-t)}FN(d_1) - e^{-r(T-t)}(K + m_2)N(d_2) \qquad (12)$$

此处，

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{F}{K+m_2}) + (\beta m_1 + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{F}{K+m_2}) + (\beta m_1 - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

因为期权执行手续费为 m_2，则欧式期货认沽期权持有者在到期时实现的收益是 $\max[(K-F_T-m_2),0]$，且 $\left|\frac{\partial f}{\partial F}\right| = -\frac{\partial f}{\partial F}$，则求解欧式期货认沽期权的偏微方程式为：

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} - \beta m_1 \frac{\partial P}{\partial F} F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 = rP \\ P_T = \max[(K-F_T-m_2),0] \end{cases} \tag{13}$$

求解上式得到欧式期货认沽期权价格为：

$$P = e^{-r(T-t)}(K-m_2)N(d_2^{'}) - e^{-(r+\beta m_1)(T-t)}FN(d_1^{'}) \tag{14}$$

此处，

$$d_1^{'} = \frac{\ln(\frac{F}{K-m_2}) - (\beta m_1 - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2^{'} = \frac{\ln(\frac{F}{K-m_2}) - (\beta m_1 + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

4．模型意义

对于价值较大的平值甚至实值期货期权而言，考虑了期货交易保证金、期货交易手续费与期权执行手续费之后的 Black 修正模型与 Black 模型实际价格差别不是很大；但是对于价值较小的虚值期货期权而言，考虑上述费用之后的 Black F. 修正模型具有一定的实际意义。特别是在交易所调整期货交易保证金水平、期权执行手续费水平的时候，其 Black 修正模型意义更为显著。

参考文献：

Black F., ”The pricing of Commodity Contracts”, Journal of Financial Economics, 3 (March 1976), p.167-179

Martin Cincibuch, “Distributions Implied by American Currency Futures Options: A Ghost’s Smile?”, The Journal of Futures Markets, 2 (February 2004), p.147-178