

# *Chapter 4*

## *Special Relativity*

### 狭义相对论

“你和一个漂亮姑娘在公园长椅上坐一小时，觉得只过了一分钟；你紧挨着一个火炉坐一分钟，却觉得过了一小时。这就是相对论。”

---Einstein常常这样向媒体和公众开玩笑。

相对论为什么会受到如此狂热追捧？连Einstein本人也觉得不可思议！

# Alexander Pope

(1688-1744):

--- a famous 18th century English poet, best known for his satirical verse and for his translation of Homer.



Nature, and Nature's Laws lay hid in night:  
God said, let Newton be! And all was light.

自然和自然定律隐没在黑暗中：  
神说，让牛顿去吧！万物遂成光明。

# 自然和自然定律隐没在黑暗中： 神说，让牛顿去吧！万物遂成光明。

这首诗已被凿刻在了牛顿的墓碑上，广为人知。

后来有人在后面加了一句：“**但不久，魔鬼说：让爱因斯坦去吧，于是一切又重新回到黑暗中。**”

当年牛顿诸定律的发现，使人们摆脱了对自然规律茫然无知的历史。大到宇宙星体，小到沙砾尘埃，所有物体的运动规律尽在掌控之中，世界万物一下都变得井然有序。

而Einstein提出了相对论，又一下把千百年来人们关于时间，空间和天体和宇宙的经典观念弄得颠三倒四：什么动钟变慢、动尺变短、时空弯曲、双生子谬悖等等。原来许多人习以为常、认为公理的东西都成错误，人们觉得又重新回到了黑暗之中。

The background features a large, faint watermark of the Fudan University logo. The logo is circular and contains the Chinese characters '復旦大學' (Fudan University) in the center. Around the perimeter of the circle, the text 'FUDAN UNIVERSITY' is written in English, and '復旦物理' (Fudan Physics) is written in Chinese at the top. The entire logo is rendered in a light blue color that blends with the dark blue background.

**从经典物理到近代物理**

**——相对论和量子力学——**

# 十九世纪末经典物理学的“危机”：

## 两朵乌云和三大发现：

物理学发展到19世纪末期，可以说是达到相当完美、相当成熟的程度

19世纪的最后一天，欧洲著名的科学家欢聚一堂。会上，英国著名物理学家W. Thomson（即Lord Kelvin）发表了新年祝词。

他在回顾物理学所取得的伟大成就时认为，科学大厦已经基本建成，后辈物理学家只要做一些零碎的修补工作。



完美的经典物理大厦

# 完美的经典物理大厦

力学---Newton三定律和万有引力定律

热学---热力学定律(第零、一、二、三定律)

分子物理---Maxwell分子运动论, Boltzmann  
统计

电磁学---Maxwell电磁理论

光学---Huygens(光的波动说)、Fresnel原理

# William Thomson 瞻望20世纪物理学：

“未来物理学真理将不得不在小数点后第六位去寻找”

“但是在物理学晴朗天空的远处，还有两朵小小的令人不安的乌云”：

两朵乌云



第一朵乌云：  
Michelson-  
Morley实验 —  
以太说破灭



第二朵乌云：  
黑体辐射实  
验 — 紫外灾  
难





Michelson  
-Morley  
实验——以太说破灭

黑体辐射  
实验——紫外灾难

奠定了现代物理大厦的基础

导致了相对论的诞生

导致了量子论的诞生

# Chapter 4      Relativity

**Special Theory of Relativity (1905)**

**General Theory of Relativity (1915) (omitted)**

**What will we discuss?**

**Basis of Special Relativity**

**Relativistic Kinematics**

**Relativistic Mechanics**

**(1) Basis of Special Relativity**

**二个原理一个变换**

**Two postulates (principles):**

**狭义相对性原理**

**光速不变原理**

**One transformation:**

**Lorentz变换**

## (2) Relativistic Kinematics

### 相对论运动学

狭义相对论中只描述和研究物体位置随时间的变化规律（不考虑引起运动状态改变的原因）

**Conception of space-time**

**Velocity transformation**

## (3) Relativistic Mechanics

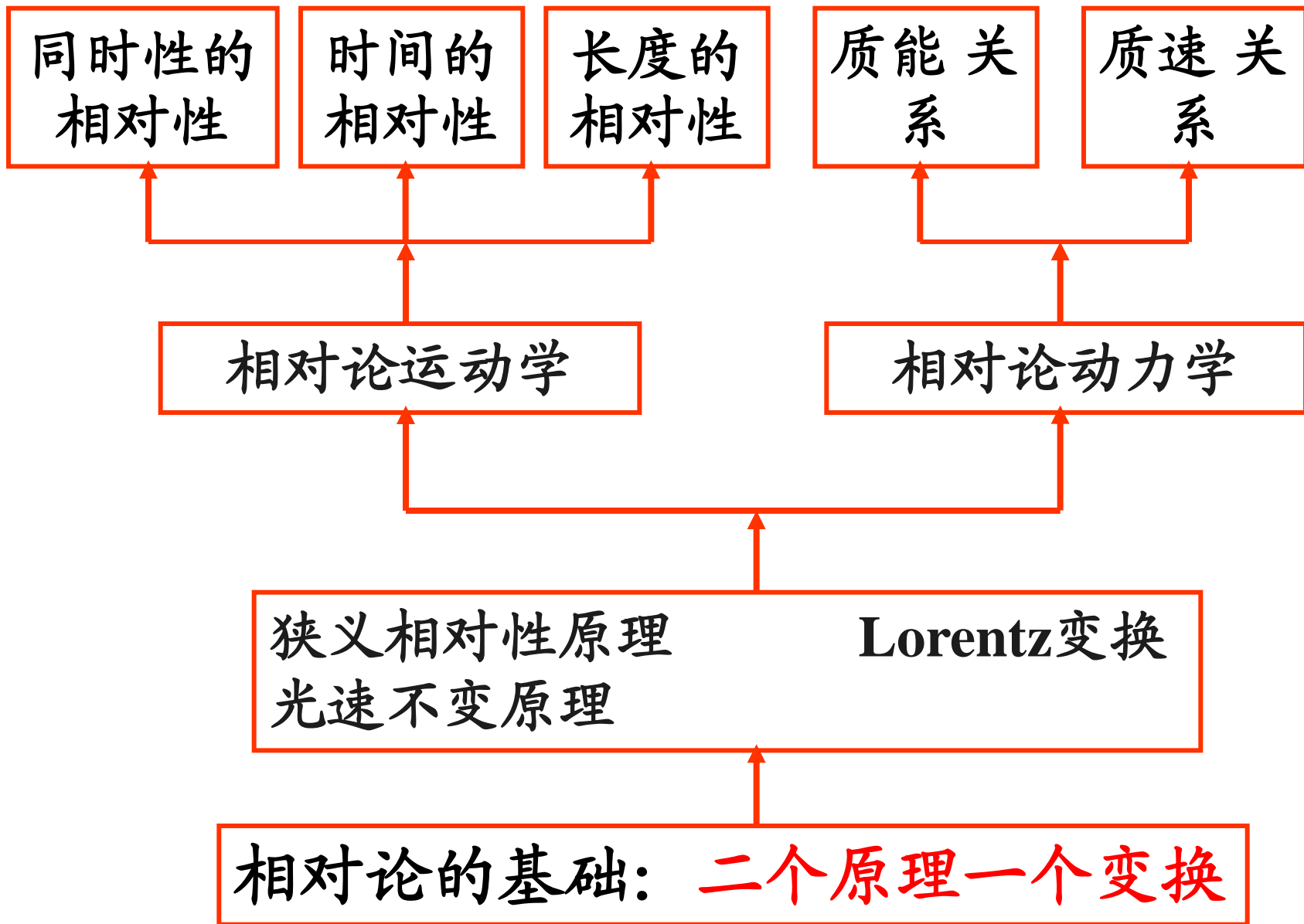
### 相对论力学

与相对论相一致的任何力学形式

**(relativistic mass) mass-velocity**

**(relativistic momentum) energy-momentum**

**(relativistic energy) mass-energy**



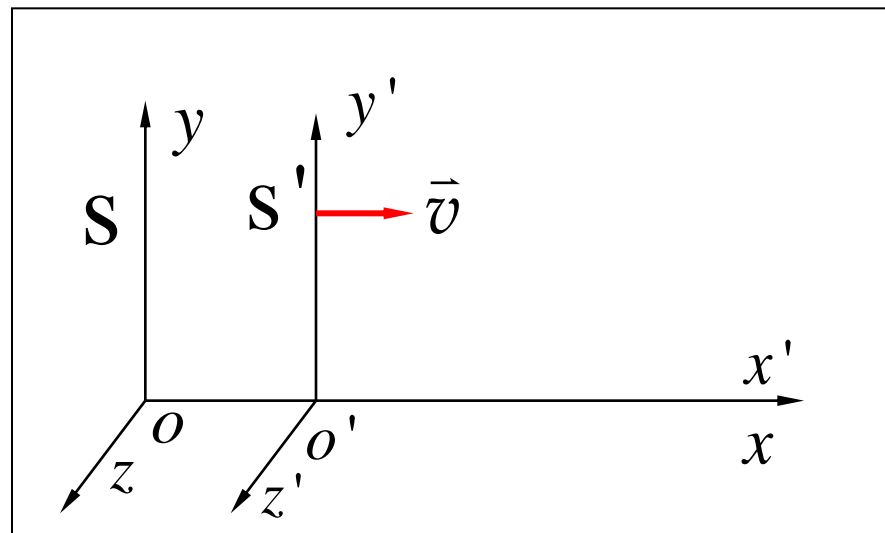
# 1 Classical Conception of Space-time

绝对时空观：时间和空间的量度和参考系无关（不同惯性参考系中，时间和空间的量度都相同）。

长度和时间的测量是绝对的，时间和空间是相互独立的。

二个惯性参考系S和S'，S'相对于S的速度为 $v$ ，一事件发生在S的时间为 $t$ ，在S'的时间为 $t'$ ，则

$$t = t'$$



时间

proper time 本征时间 静止时间  
(在所有惯性系中都相同)

空间

proper length rest length

# Galileo Transformation

时空坐标  $(x, y, z, t)$  在不同惯性系之间的变换

静  $S(x, y, z, t)$

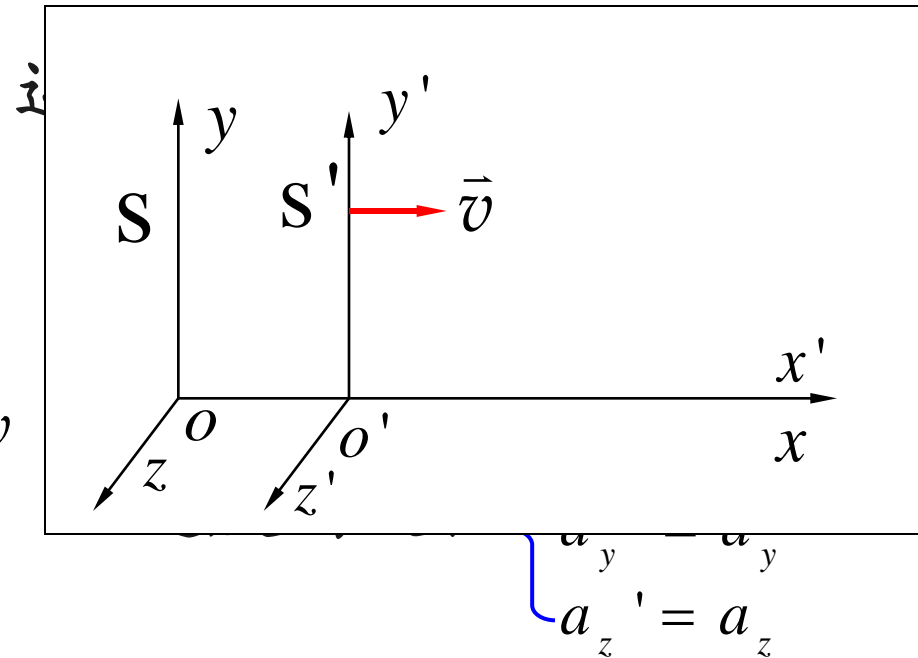
动  $S'(x', y', z', t')$

正变换

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

速度的变换

$$\begin{cases} u_x' = u_x - v \\ u_y' = u_y \\ u_z' = u_z \end{cases}$$



Galileo相对性原理 (经典力学的相对性原理)

对于任何惯性参照系, 牛顿力学的定律都具有相同的形式。

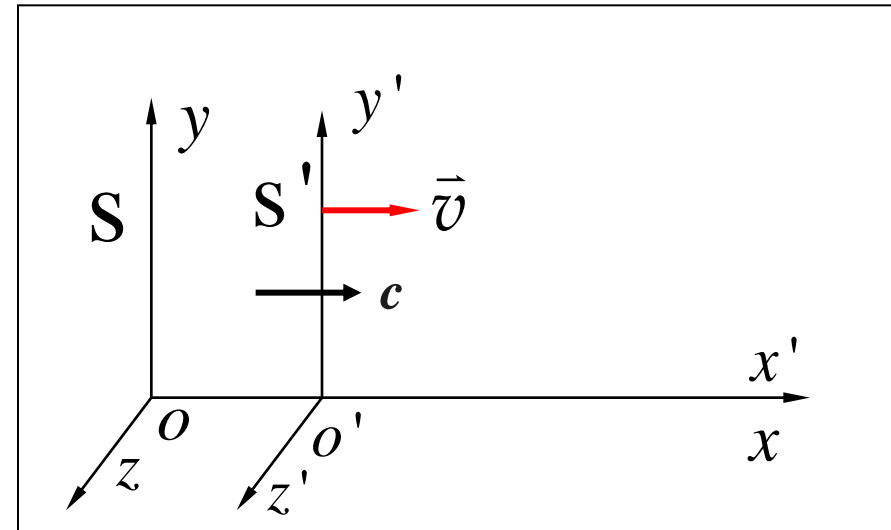
## 2 Troubles with Classical Physics

### 1. 电磁波的传播不满足Galileo相对性原理

对于不同的惯性系，电磁现象基本规律的形式是一样的吗？光速满足伽利略变换吗？

S系 电磁波沿各方向速度  
均为  $c$

S'系中 沿  $x'$  方向速度为  $c-v$   
- $x'$  方向为  $c+v$   
各向异性



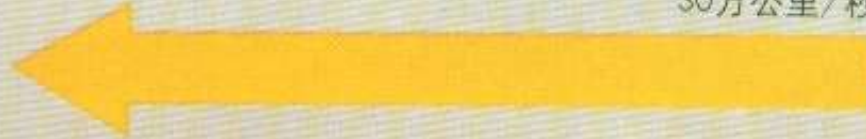
S系有特殊性，是绝对静止的（绝对惯性系，或以太系 ether or aether）。

必须找出以太系，经典物理学对电磁学才是正确的。

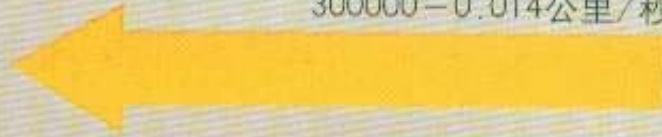
驶近的汽车发出的光的假想速度：  
 $300000 + 0.014$ 公里/秒



分道线小灯发出的光的速度：  
30万公里/秒



远去的汽车发出的光的假想速度：  
 $300000 - 0.014$ 公里/秒





# Michelson-Morley Experiment

In 1887, Albert A. Michelson and Edward W. Morley tried to measure the speed of the *ether*.

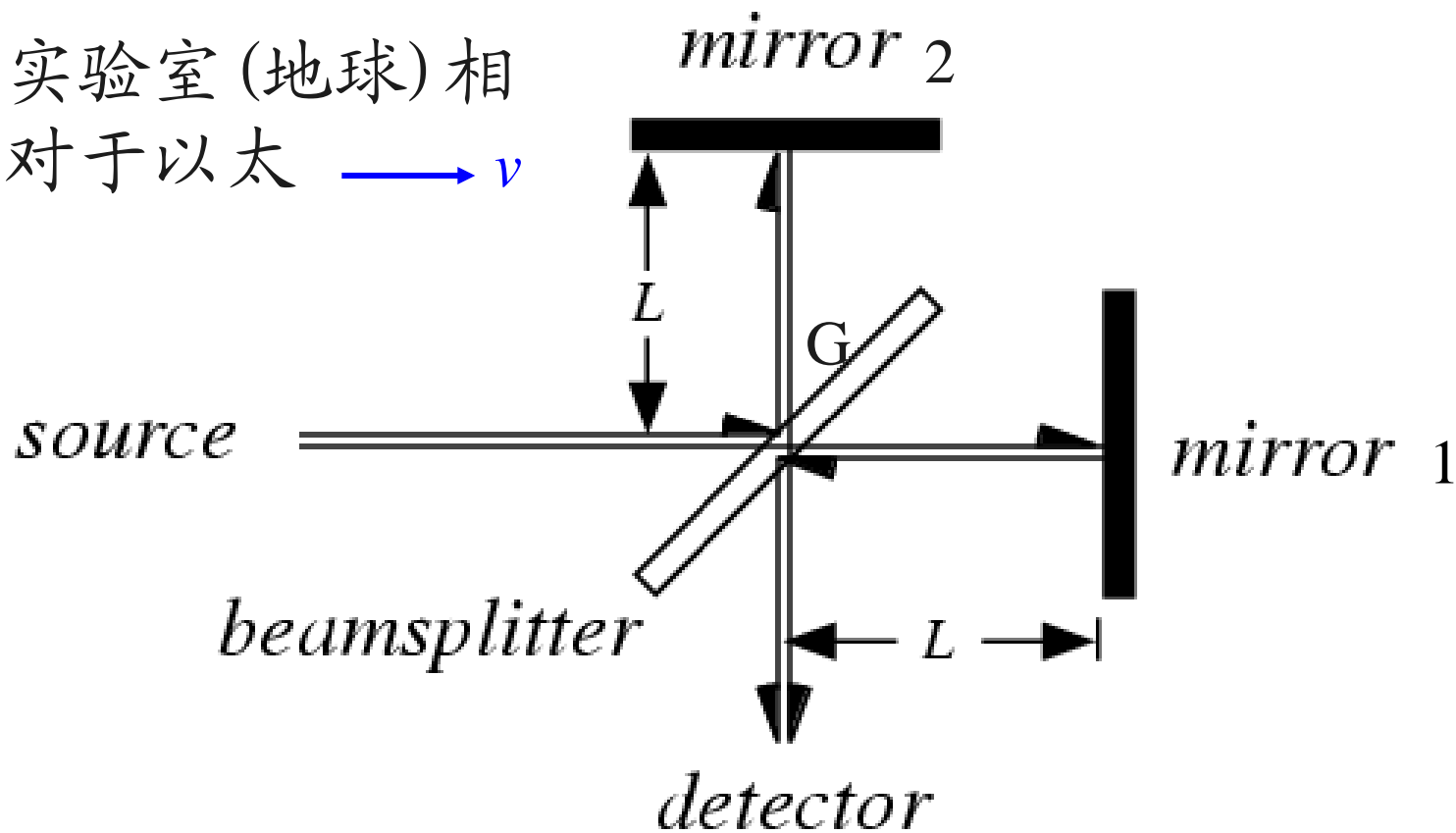
The **result** of the *Michelson-Morley experiment* was that the **speed of the Earth through the ether was zero**. Therefore, this experiment also showed that **there is no need for any ether at all**.

Michelson and Morley repeated their experiment many times up until 1929, but always with the same results and conclusions.



The first American Nobel Prize winner in Physics in 1907.

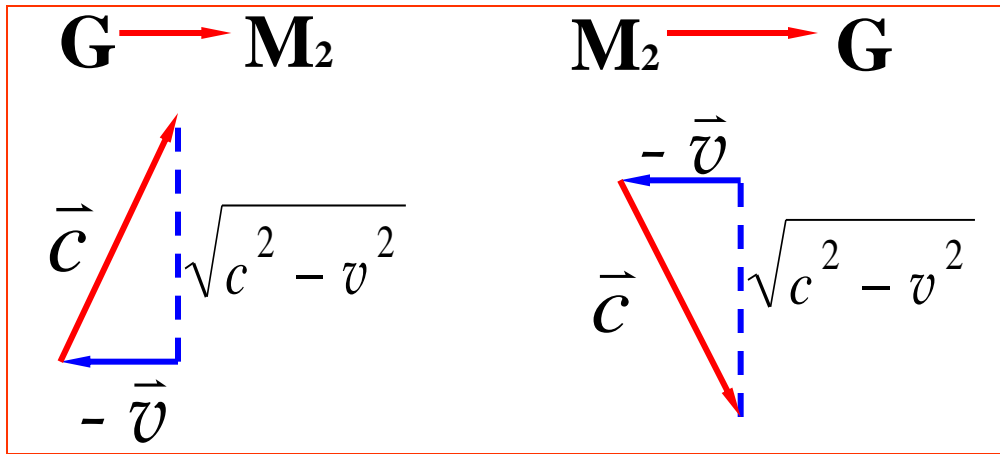
实验室(地球)相  
对于以太  $\longrightarrow v$

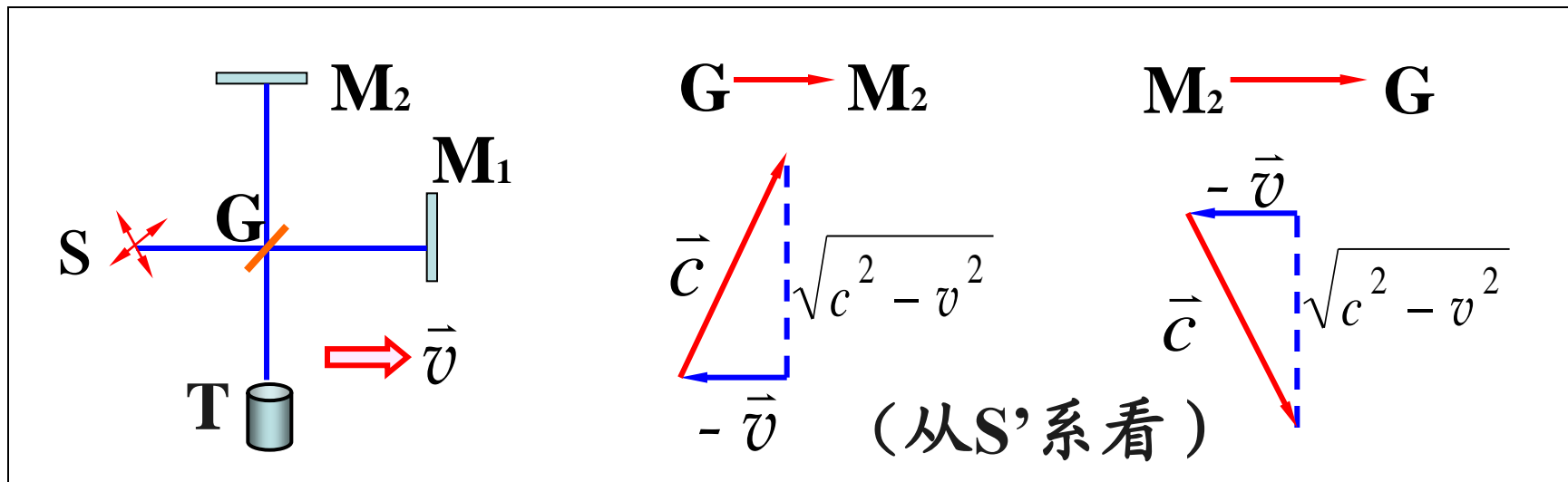


G-M1-G 沿以太风方向  
G-M2-G 垂直于以太风  
速度为  $\sqrt{c^2-v^2}$  (向上)  
和  $\sqrt{c^2-v^2}$  (向下)

速度为  $c-v$  (向右)和  $c+v$  (向左)

水平光和垂直光有光程差,  
到达探测器时产生干涉。





设“以太”参考系为S系，实验室为S'系

$$G \xrightarrow{\text{blue}} M_1 \xrightarrow{\text{blue}} G$$

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v}$$

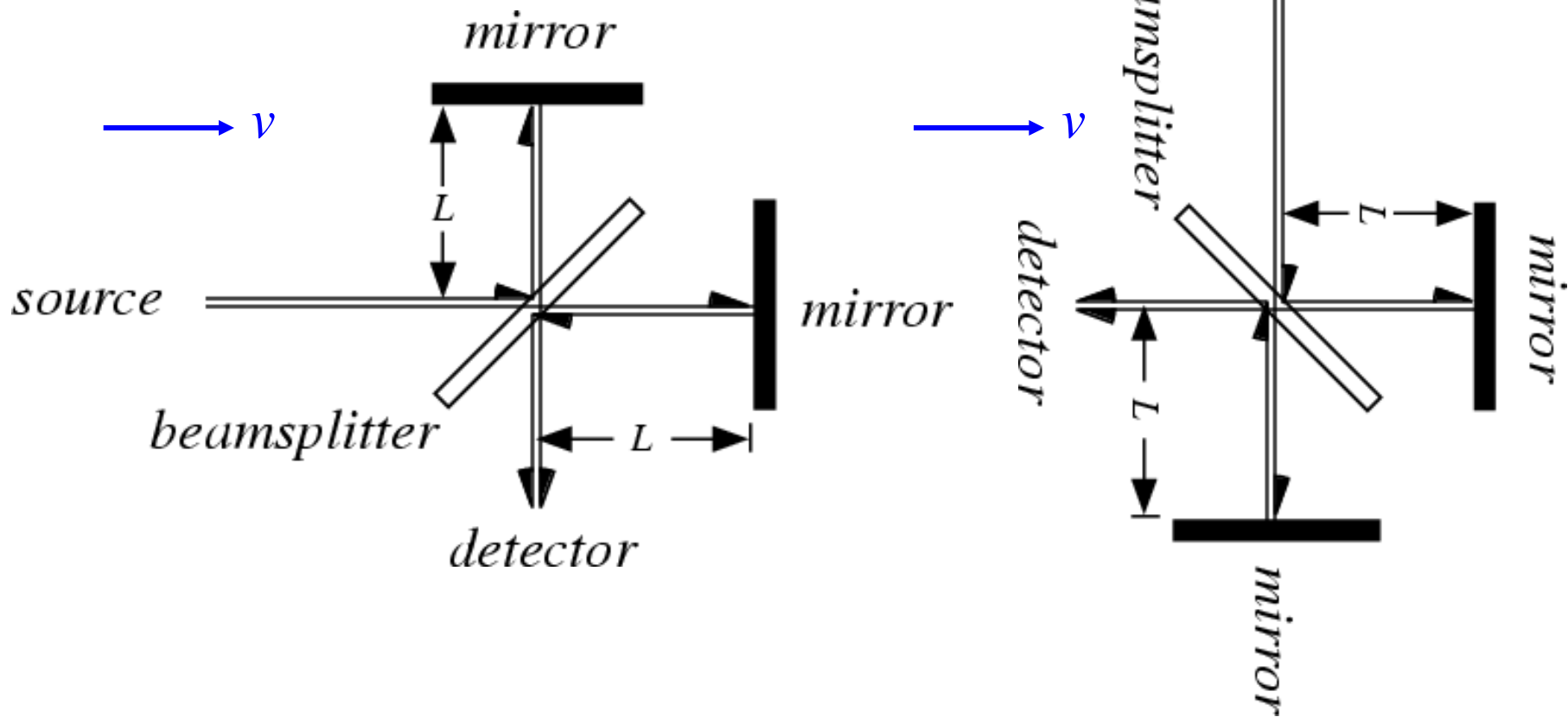
$$G \xrightarrow{\text{red}} M_2 \xrightarrow{\text{red}} G$$

$$t_2 = \frac{2l}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

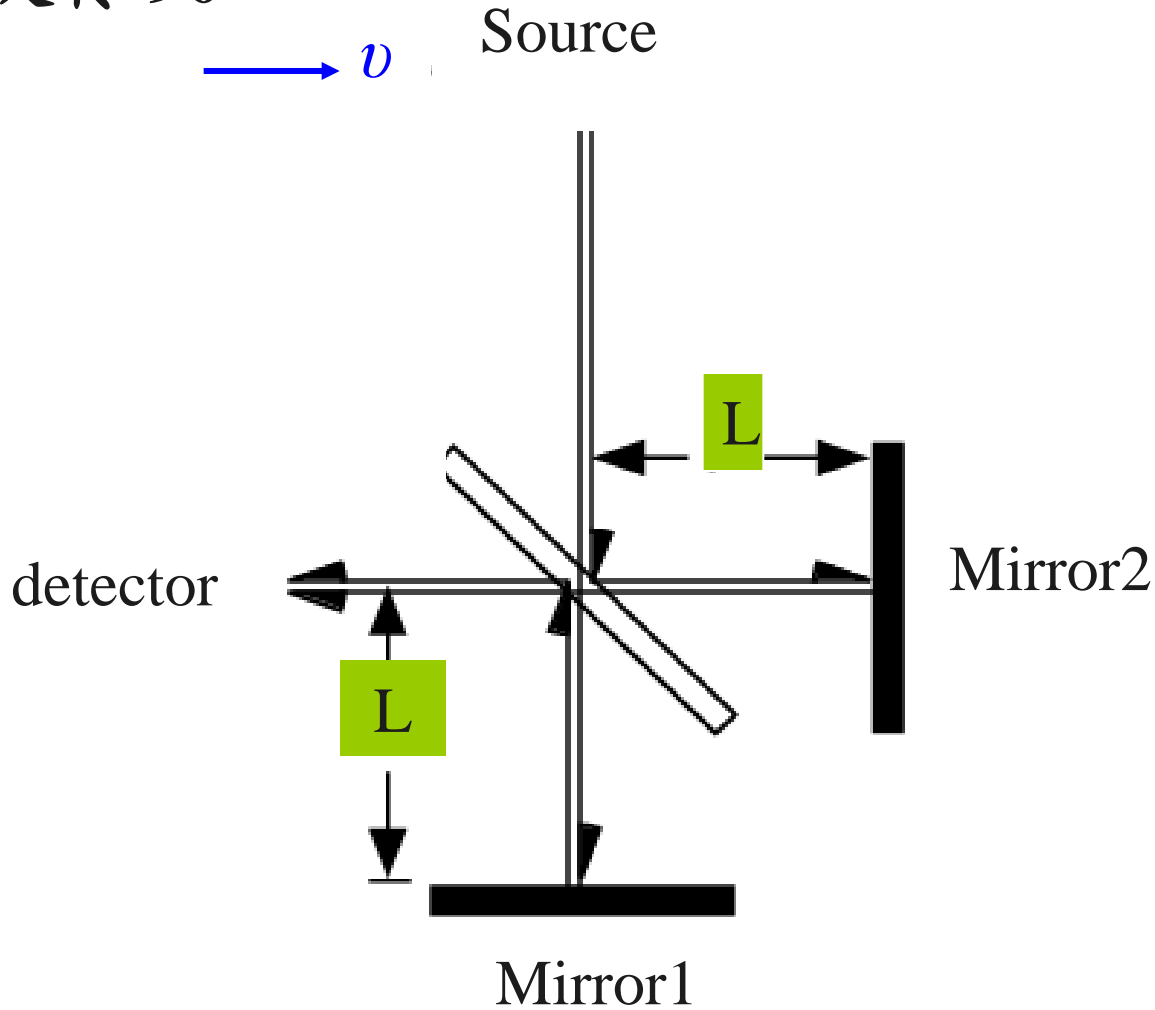
光程差  $\Delta = c\Delta t \approx l \frac{v^2}{c^2}$

条纹  $\Delta N = \frac{2\Delta}{\lambda} \approx 2l \frac{v^2}{\lambda c^2}$

# 干涉仪旋转 $90^\circ$



# 干涉仪旋转 $90^\circ$

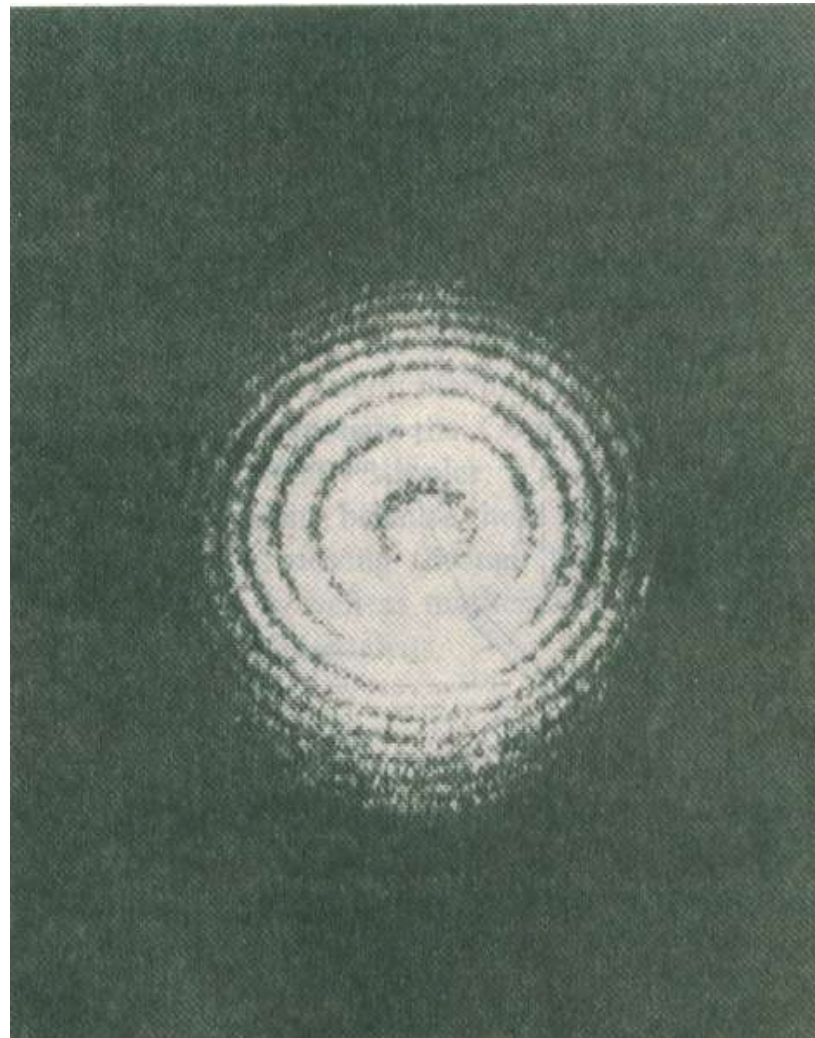
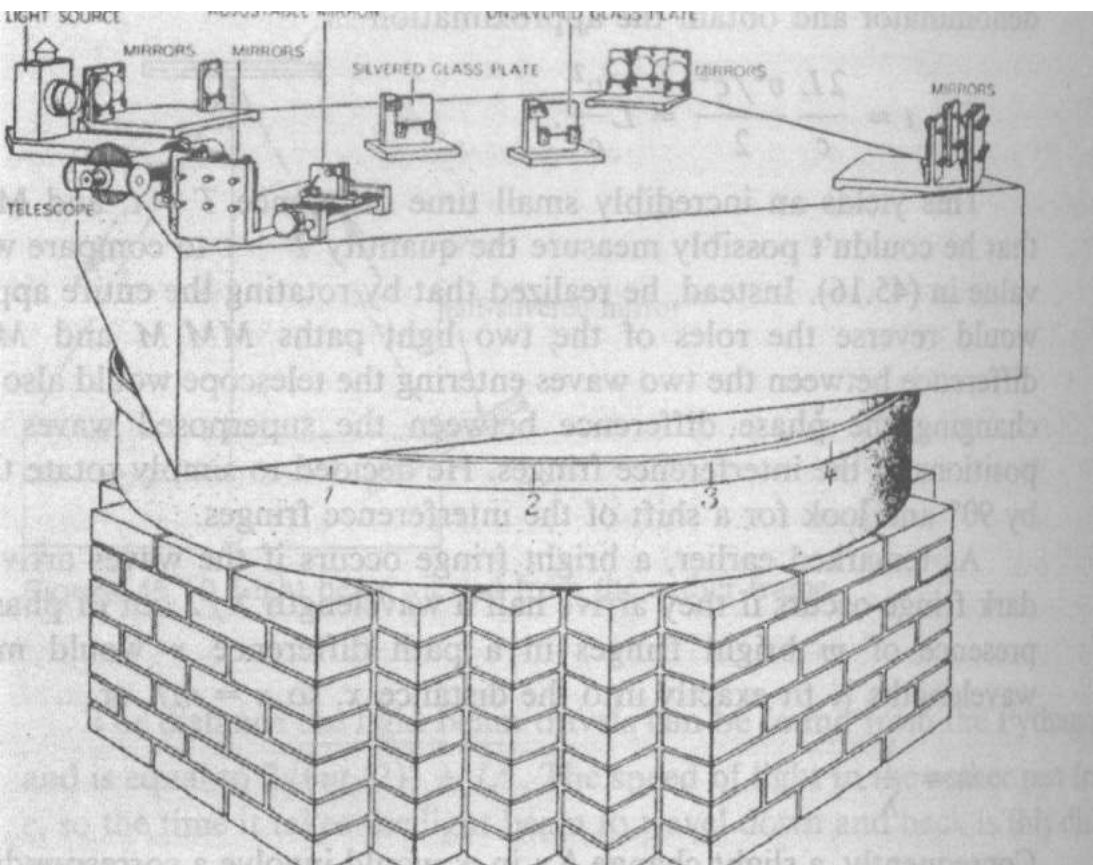


G-M2-G 由平行于以太风  $\rightarrow$  垂直

G-M1-G 由垂直于以太风  $\rightarrow$  沿以太风方向

光程差改变

如果存在以太系，干涉仪转 $90^\circ$ 应该可以看到条纹移动。



**实验结果 未**观察到地球相对于“以太”的运动。

Michelson实验没有找到ether

为什么：

---电磁理论不是普适的，不符合相对性原理？

---相对性原理不对？

---Galileo变换不适用？

Einstein put his faith in electromagnetic theory and sought an alternative to the kinematics of Galileo and Newton.

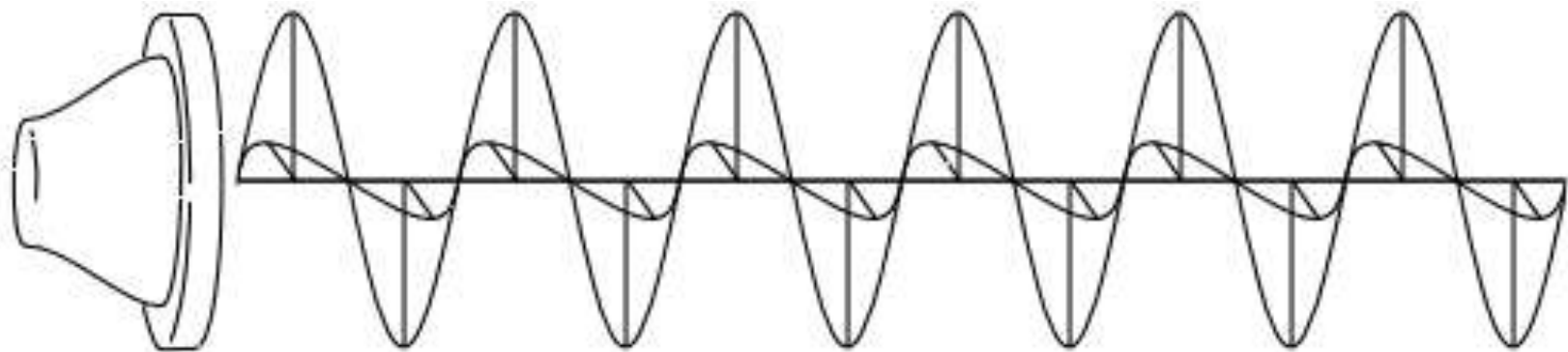
# Einstein's thought experiment (追光佯谬)

Einstein在16岁时提出的一个佯谬——一个人如果以光速和光波一起运动，会看到什么现象呢？。

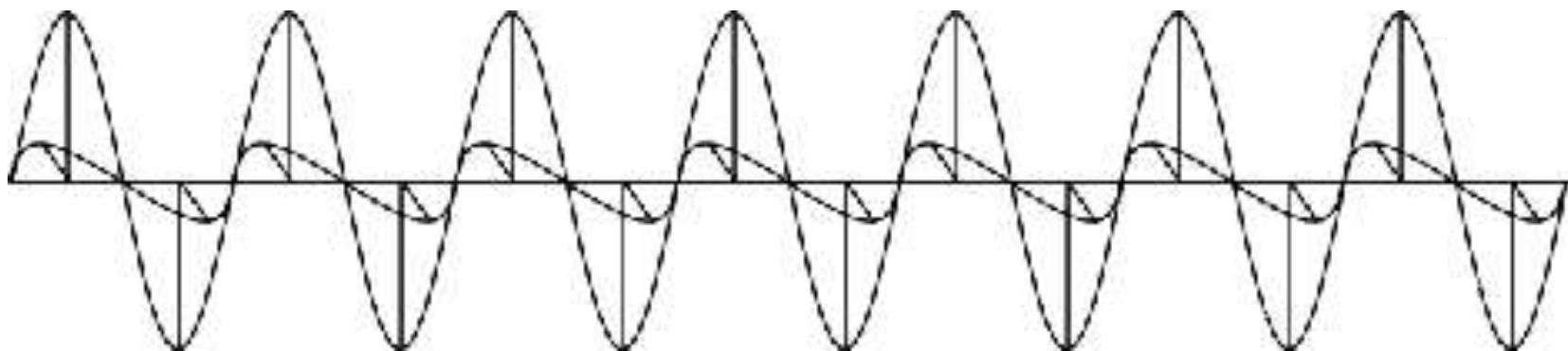
他后来回忆：“经过十年的沉思之后，我从一个悖论中得到了这样的原理：如果我以真空中的光速 $c$ 追随一条光线运动，那么我就应当看到，这样一条光线就好像一个在空间里振荡着而停滞不前的电磁场。”



光是电磁场不断振荡地向前传播



以光速运动的人是不是看到的是一个在空间里振荡着而停滞不前的电磁场？即一个“冻结”的光波？



可是，Einstein认为：“无论是依据经验，还是根据Maxwell方程，看来都不会有这样的事情。

从一开始，我直觉地认为，从这个观察者的观点来判断，一切都应当同一个相对于地球是静止的观察者所看到的一样，都按同样的一些定律进行。因此，第一个观察者怎样会知道或者能够判明他是处于均匀的快速运动之中呢？”

这个佯谬，既暴露出经典物理学的局限性和非科学性，同时也潜藏着狭义相对论的两个基本假设，即光速不变原理（在任何惯性参考系内真空中的光速是不变的）和相对性原理（物理学的规律在任何惯性参考系内都是一样的）。

# 3 The Postulates of Special Relativity

## and Lorentz Transformation

**Two postulates:**

**(1) The principle of relativity (狭义相对性原理)**

The laws of physics are the same in all inertial reference frames.

**(2) The principle of the constancy of the speed of light**

The speed of light in free space has the same value  $c$  in all inertial reference frames.

It violates our “common sense”, which is firmly grounded in the Galilean kinematics.

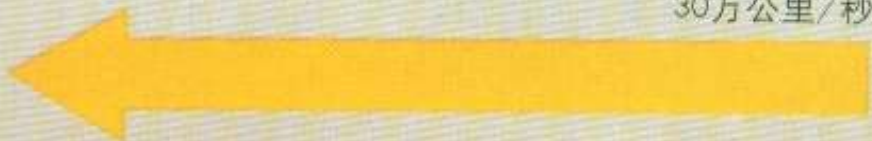
It implies that “it is impossible to accelerate a particle to a speed greater than  $c$ ”.



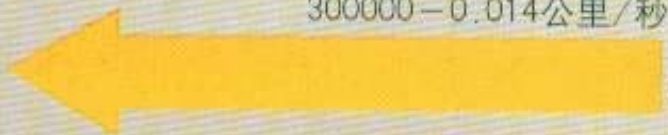
驶近的汽车发出的光的假想速度：  
 $300000 + 0.014$ 公里/秒



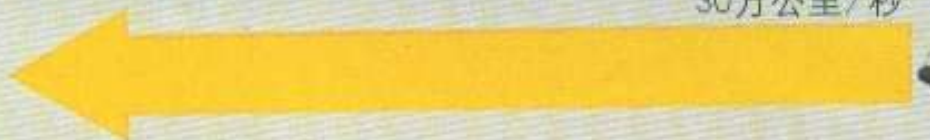
分道线小灯发出的光的速度：  
 30万公里/秒



远去的汽车发出的光的假想速度：  
 $300000 - 0.014$ 公里/秒



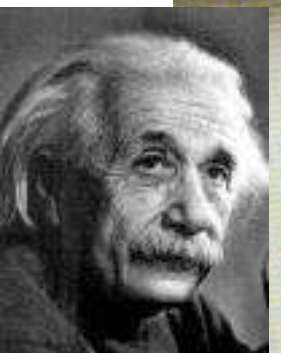
驶近的汽车发出的光的速度：  
 30万公里/秒



分道线小灯发出的光的速度：  
 30万公里/秒



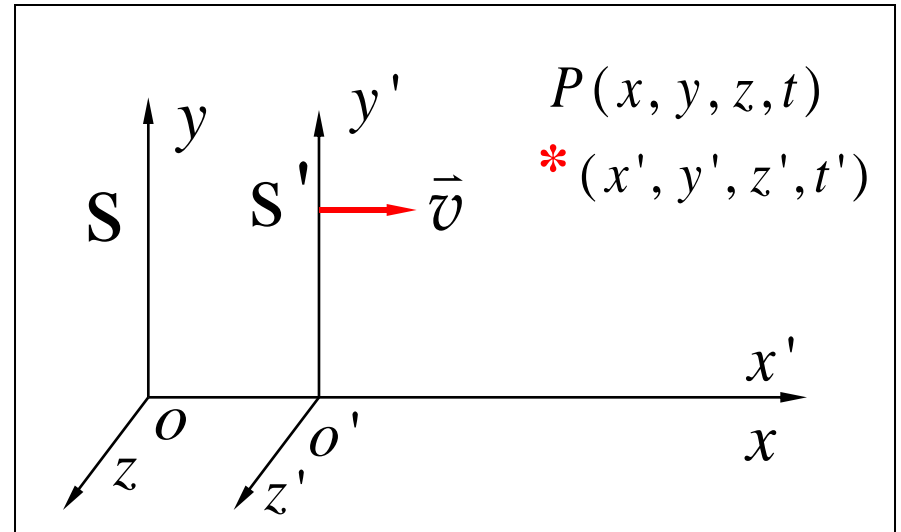
远去的汽车发出的光的速度：  
 30万公里/秒



# Lorentz Transformation

S'相对于S的速度为v

事件P发生在 $(x, y, z, t)$   
和 $(x', y', z', t')$



设：  $t = t' = 0$  时,  $O, O'$  重合

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{array} \right.$$

$$\beta = v/c$$
$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$$

Speed parameter  
Lorentz parameter

正  
变  
换

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

逆  
变  
换

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

- 1)  $v \ll c$  时, 洛伦兹变换  $\Rightarrow$  伽利略变换。
- 2) 时间不独立,  $t$  和  $x$  变换相互交叉。

Lorentz 变换满足

$$[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2]^{1/2} =$$

$$[(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2]^{1/2}$$

$(x, y, z, ict)$  构成 4-D 空间 (Minkowski space)

# Velocity Transformation in Special Relativity

物体  $P$  相对于  $S$  系的速度

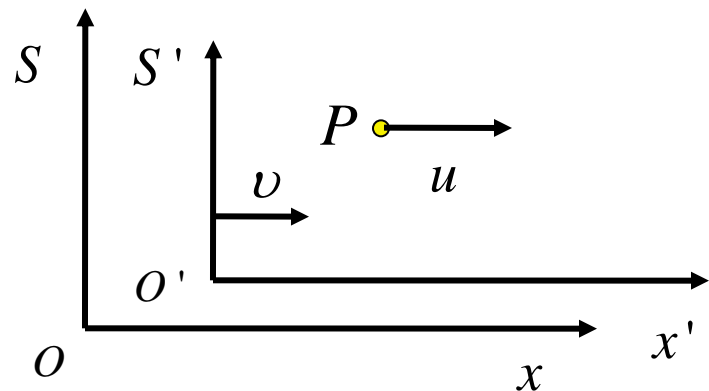
$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

物体  $P$  相对于  $S'$  系的速度

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

经典的速度变换  $u'_x = u_x - v$

相对论的速度变换可以由坐标变换对时间求导得到



$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{array} \right.$$

正变换

$$\left\{ \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \\ u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \end{aligned} \right.$$

逆变换

$$\left\{ \begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \end{aligned} \right.$$

可以证明：若  $u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z = c^2$

则  $u^2_x + u^2_y + u^2_z = c^2$

光速不变



# 4 Space-time Conception in Special Relativity

## Relativistic Kinematics

(1) The Relativity of Simultaneity

(2) The Relativity of Length

(3) The Relativity of Time

**(1) Relativity of simultaneity (同时性的相对性)**

--What is simultaneity?

两个事件的时间间隔在不同的惯性系中是否相同的概念。

## --经典力学中同时性是绝对的

根据Galileo变换，两个事件（不论发生在同地或异地）之间的时间间隔，在任何惯性系中均相同

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \Delta t$$

## --相对论中同时性概念是相对的

根据Lorentz变换，在S系中发生的两个事件1和2的时空坐标为 $(x_1, t_1)$   $(x_2, t_2)$ ，在S'系(速度 $v$ )中的坐标为 $(x_1', t_1')$   $(x_2', t_2')$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \neq \Delta t$$

所以在S系中同时发生的两个事件( $t_1 = t_2$ )，在S'系中不是同时发生( $t_1 \neq t_2$ )。

(1) 只有在同地( $x_2 = x_1$ )发生的同时事件( $\Delta t = 0$ ), 在不同的惯性系中才是同时的。

(2) S系中的同时异地事件( $\Delta t = 0, \Delta x \neq 0$ ), 在S'中不同时。  
在S'中的同时异地事件, 在S中也不同时。

(3) 不同时事件在不同惯性系中发生的时序可以倒过来。

即在S中事件1早于事件2,  $t_2 - t_1 > 0$ ,

若  $(t_2 - t_1) < (v/c^2)(x_2 - x_1)$

则  $t_2' - t_1' < 0$ , 在S'中事件1晚于事件2。

**结论:** 沿两个惯性系运动方向, 不同地点发生的两个事件, 在其中一个惯性系中是同时的, 在另一惯性系中观察则不同时; 只有在同一地点, 同一时刻发生的两个事件, 在其他惯性系中观察也是同时的。

## 同时性的相对性

在某一惯性系中**同时**发生的两个事件，在相对于此惯性系运动的另一惯性系中观察，并**不一定是同时**发生的。



车厢

地面

开始

事件 1：车厢**后**壁接收器接收到光信号。

事件 2：车厢**前**壁接收器接收到光信号。

## (2) Relativity of length 长度的相对性 length contraction

a) 静止系S中量运动系S'中的尺

标尺相对S'系静止

在S'系中测量

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = l'$$

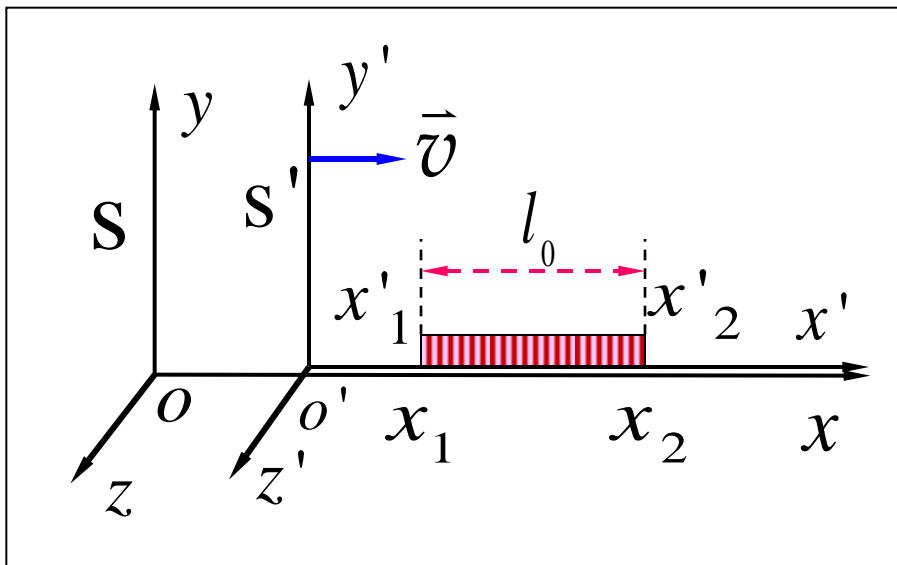
在S系中测量

$$l = x_2 - x_1$$

S中测量 $x_1, x_2$ 必须同时

测量两个事件  $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$  要求  $t_1 = t_2$

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



$$l_0 = x'_2 - x'_1 = l'$$

$$l = x_2 - x_1$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} < l_0$$

$l_0$  固有长度:

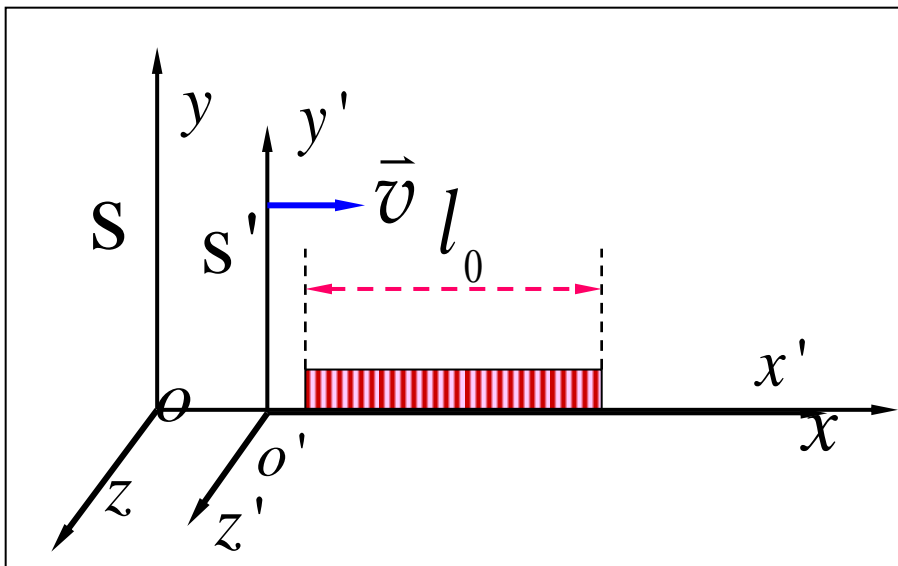
物体相对静止时所测得的长度。(最长)

运动的尺变短!

当  $\beta \ll 1$  时  $l \approx l_0$ .

洛伦兹收缩: 运动物体在运动方向上长度收缩.

## b) 运动系S'中量静止系S中的尺



标尺在S系两端点 $(x_1, x_2)$   
固定  $l_0 = x_2 - x_1$

在S'系中同时测量两端  
点 $x_1', x_2'$ 的时间 $t_1', t_2'$

$$t_1' = t_2'$$

同样可以求得

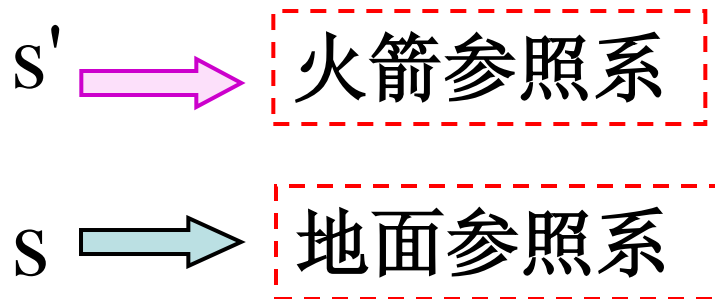
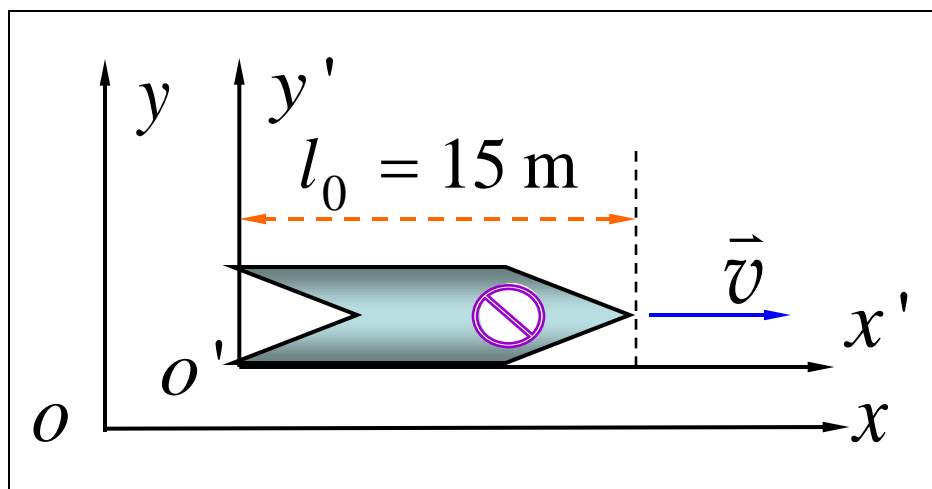
$$l' = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

同样尺也变短!

一物体的长度在与其相对静止的惯性系中测得的最长，  
在其它惯性系中所测得的都较短些。

动尺收缩 与同时性的相对性 联系在一起  
是时空的属性，而不是运动物体的性质。

**例1** 设想有一光子火箭，相对于地球以速率  $v = 0.95c$  飞行，若以火箭为参考系测得火箭长度为  $15\text{ m}$ ，问以地球为参考系，此火箭有多长？



**解：** 固有长度

$$l_0 = 15\text{ m} = l'$$

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$l = 15 \sqrt{1 - 0.95^2} \text{ m} = 4.68 \text{ m}$$



### (3) Relativity of time 时间的相对性

Time dilation 时间间隔因观察者的运动而变长

证明

在静止的S系中，时钟纪录同一地点发生两事件  $(x_1, t_1)$  和  $(x_1, t_2)$   $\Delta t = t_2 - t_1$  (S钟计时)

在运动的S'系中，两事件为  $(x_1', t_1')$  和  $(x_2', t_2')$

$\Delta t' = t_2' - t_1'$  (S'钟计时)

$$t_1' = \gamma \left( t_1 - \frac{v x_1}{c^2} \right) \quad t_2' = \gamma \left( t_2 - \frac{v x_1}{c^2} \right)$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\Delta t' > \Delta t = \Delta t_0$$

$\Delta t_0$ 为stationary time---同地发生的两事件的时间间隔

$\Delta t'$ 为dilated time

在S'系中看到钟在S系中的计时 $\Delta t$ ，比在S'系中的计时 $\Delta t'$ 短，动钟变慢了。

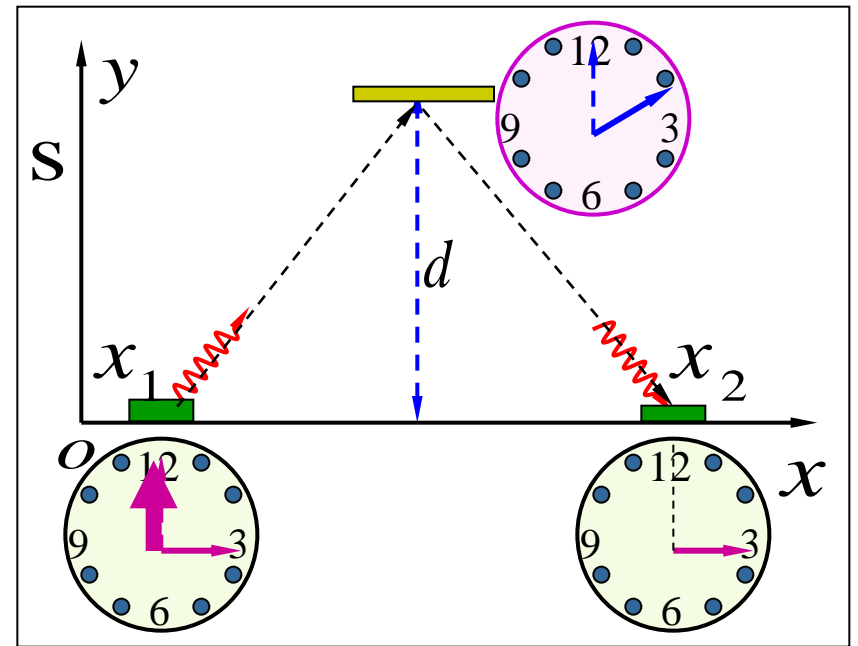
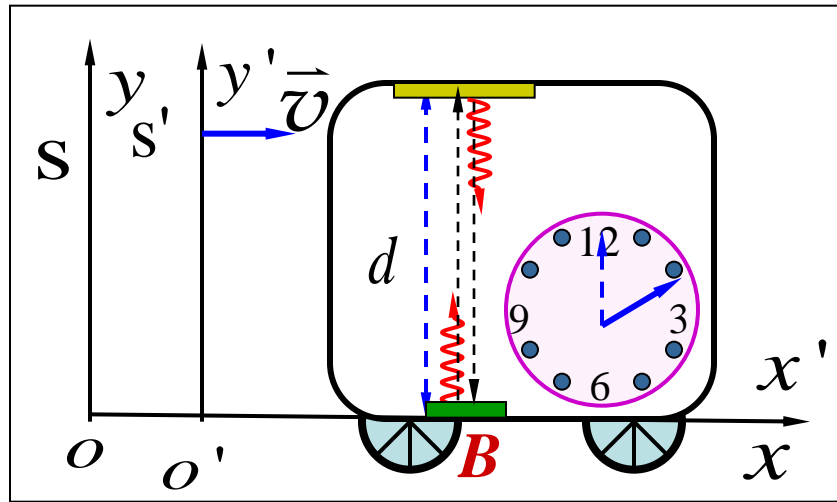
$$v \ll c \quad \Delta t \approx \Delta t'$$

动钟变慢也是相对的

在S'系中看S是运动的，S的钟比S'的慢

在S系中看S'是运动的，S'的钟比S的慢

# 用光的往返传输来计时



钟在运动的  $S'$  系中计时

$$\Delta t' = 2d/c$$

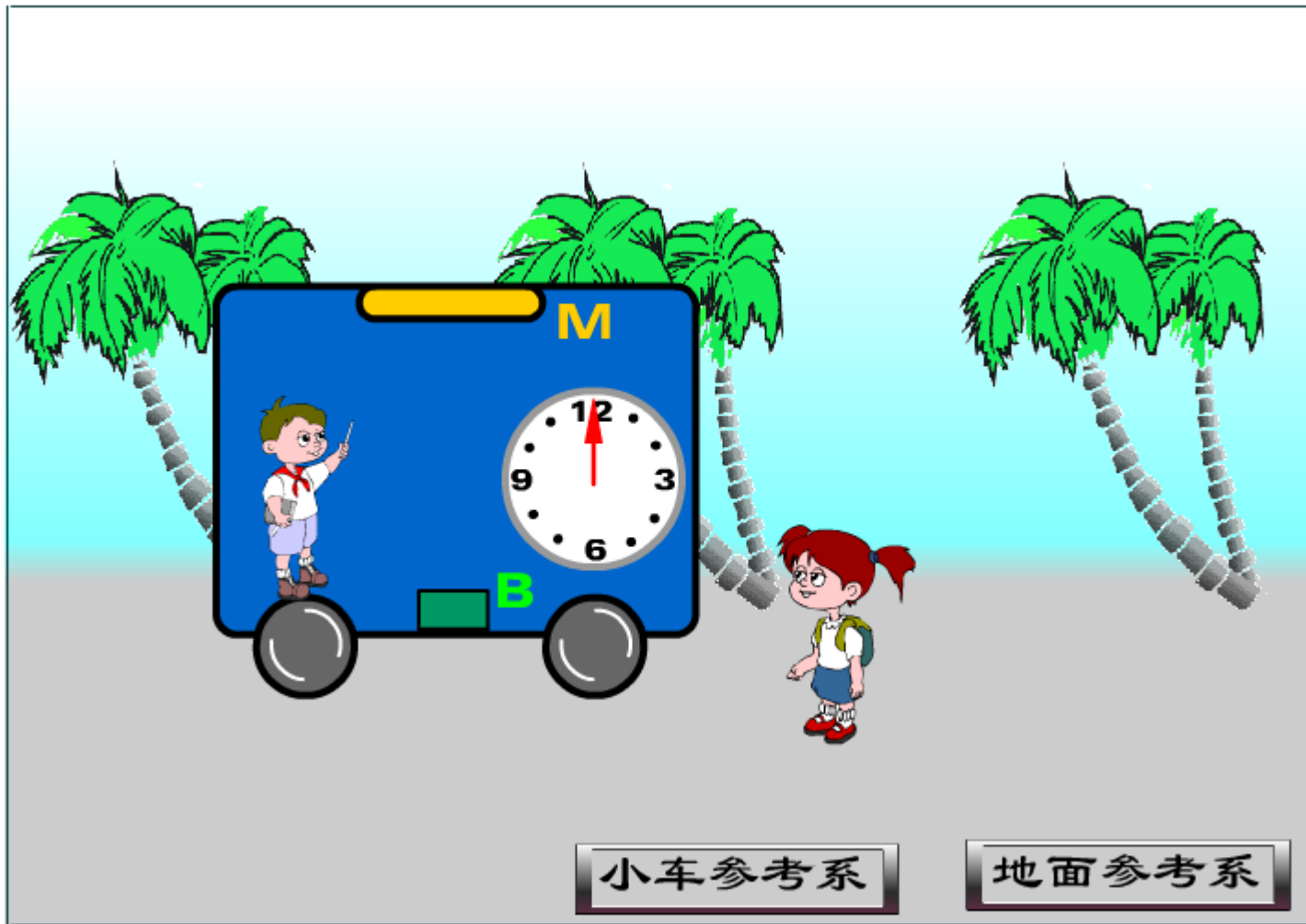
在静止的  $S$  系中观测

$$(c\Delta t/2)^2 = d^2 + (v\Delta t/2)^2$$

$$\Delta t = \frac{2d}{c\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} > \Delta t'$$

**动钟变慢 与同时性的相对性 联系在一起**  
**是时空的属性，而不是运动物体的性质。**

# Relativity of time 时间的相对性



**Moving clocks run slow (运动的钟走得慢)**

天上一日 人间一年

**例：**设想有一光子火箭以  $v = 0.95c$  速率相对地球作直线运动，若火箭上宇航员的计时器记录他观测星云用去 10 min，则地球上的观察者测得此事用去多少时间？

**解：**设火箭为  $S'$  系、地球为  $S$  系

$$\Delta t' = 10 \text{ min}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{10}{\sqrt{1 - 0.95^2}} \text{ min} = 32.01 \text{ min}$$

动钟变慢

# Twin Paradox

两个双生子 { 甲留在地球上  
乙乘极高速的飞船到宇宙空间去旅行

经过若干年 飞船返回到地球

根据time dilation, 甲和乙重逢时, 乘飞船航行的乙比留在地球上的甲年轻一些。

但根据时间相对性, 乙看甲作高速运动, 甲应该比他年轻。

此为佯谬!

问题出在那里?

参考系不等价:

地球是惯性系, 而飞船经过: 加速 $\Rightarrow$ 匀速 $\Rightarrow$ 减速 $\Rightarrow$ 反向加速 $\Rightarrow$ 匀速 $\Rightarrow$ 减速 (不是惯性系)

# 7 Relativistic Mechanics

## 狭义相对论力学的基本方程

Newton's law  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  具有Galileo变换不变性

如物体受力获得加速度，其速度持续增大，最终可以超过光速，与相对论不符。

怎么解决？物体的质量与其运动速度有关，Newton's law在Lorentz变换下改为：

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

**Momentum conservation**

**Energy conservation**

**都成立**

**Mass conservation**

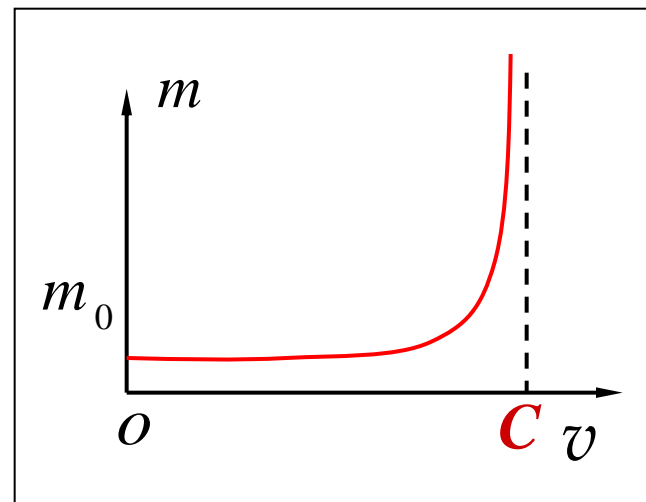
# 1. Mass-velocity relation 质速关系

Relativistic mass (相对论质量)

根据动量守恒，可以导出 (略) :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$m(v)$  在不同惯性系中大小不同 .



$m_0$  为静质量: 物体相对于惯性系静止时的质量

当  $v \ll c$  时  $m \rightarrow m_0$

对于  $v=c$  的粒子 (如光子), 静质量为零,  $m_0=0$



In relativistic mechanics, this equation

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

is also adopted as the definition of force, with the understanding that  $\mathbf{p}$  is relativistic momentum.

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 \vec{v} = m \vec{v}$$

## 2. Relativistic energy

### Mass-energy relation (质能关系)

物体初始静止，受外力 $F$ 做功，动能 $E_k$ 增加

$$E_k = \int_0^x F ds = \int_0^x \frac{dp}{dt} v dt = \int_0^p v dp$$

利用  $d(pv) = p dv + v dp$  和  $\bar{p} = \frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

得到 
$$E_k = \int_0^v v d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \int_0^v \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} dv$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - m_0 c^2$$

$$E_k = m c^2 - m_0 c^2$$

$$\begin{aligned} E_k &= m c^2 - m_0 c^2 \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 c^2 \end{aligned}$$

当  $v \ll c$

利用  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$

得到

$$E_k \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2$$

相对论**动能**

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = E - E_0$$

相对论**质能关系**

$$E = mc^2 = m_0c^2 + E_k$$

**静止能量**

$$E_0 = m_0c^2$$

质能关系**预言**：物质的质量就是能量的一种储藏。

爱因斯坦认为（1905）

懒惰性  $\Rightarrow$  **惯性** (inertia)

活泼性  $\Rightarrow$  **能量** (energy)

物体的懒惰性就是物体活泼性的度量。

# Mass energy equivalence

物理意义

$$E = mc^2$$

$$\Delta E = (\Delta m)c^2$$

惯性质量的增加和能量的增加相联系，质量的大小应标志着能量的大小，这是相对论的又一极其重要的推论。

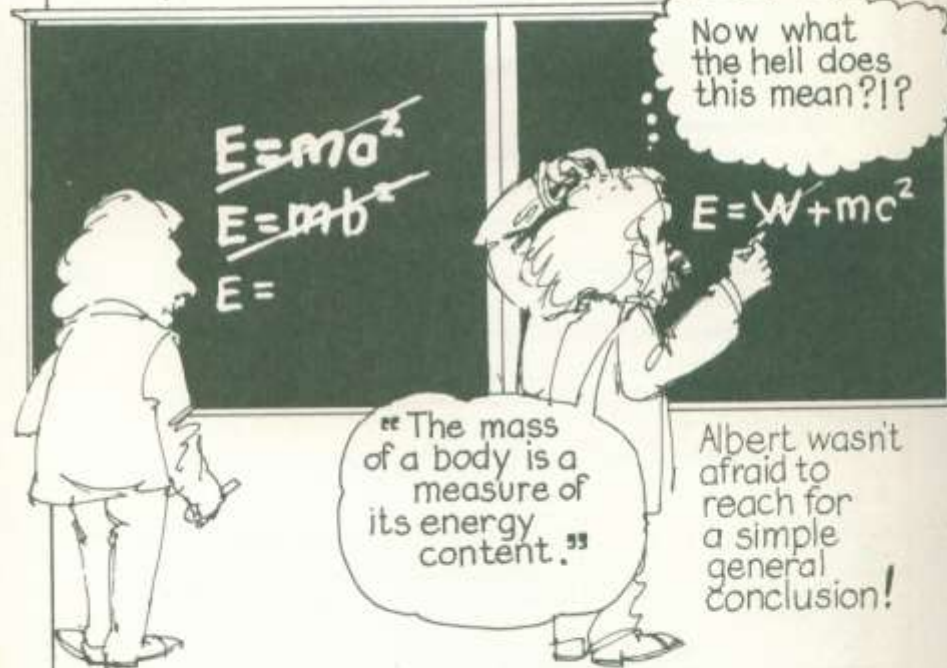
相对论的质能关系为开创原子能时代提供了理论基础，这是一个具有划时代的意义的理论公式。

**$E=MC^2!$**

the most famous equation of the

**20<sup>th</sup> century**

Not quite like this..... but more like **this:**



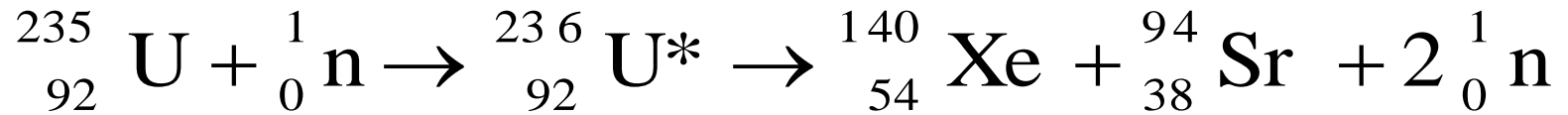
And to show how it could work he wrote a little 3 page paper in 1905 called .....



Annalen der Physik  
18, 639-641 (1905)

# 质能公式在原子核裂变和聚变中的应用

## 1 核裂变



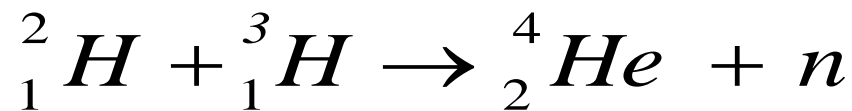
质量亏损

$$\Delta m \approx 0.22 u$$

原子质量单位  $1u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$

放出的能量  $Q = \Delta E = \Delta m \cdot c^2 \approx 200 \text{ MeV}$

## 2 轻核聚变



质量亏损

$$\Delta m = 0.018885u$$

释放能量

$$Q = \Delta E = (\Delta m)c^2 = 17.6 \text{ MeV}$$

Ernest Rutherford (1908年Nobel化学奖得主)认为：“通过打破原子来产生能量是不合算的，任何希望将原子嬗变转化成能源的想法都是空想。”

瑞典女物理学家**Lise Meitner**，长期在德国做研究，1938年她首先观察到铀原子核裂变释放能量，开启人类利用原子能的大门。

但1944年Nobel化学奖(1945年才颁发)却授予她的合作者德国人Otto Hahn (for his discovery of the fission of heavy nuclei)。

Meitner拒绝参加希特勒的研制原子弹计划，毅然返回瑞典，高风亮节令人由衷景仰。



### 3. Energy-momentum relation $E(p)$

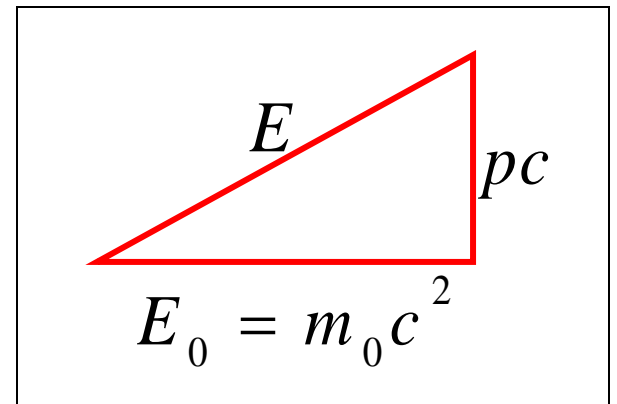
#### 能量与动量的关系

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

等式两边平方后得到:

$$(mc^2)^2 = (m_0 c^2)^2 + m^2 v^2 c^2$$

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$



• 极端相对论近似  $E \gg E_0$ ,  $E \approx pc$

• 静止质量为零的粒子

如光子  $m_0 = 0$ ,  $v = c$

$$p = E/c = mc$$

粒子以光速运动

## 8 General Theory of Relativity

自然定律在任何参考系（包括非惯性系）中都可表示为相同的数学形式。

狭义相对论的局限（困难）：

(1) 不能处理引力问题

(2) 仅在惯性系成立

万有引力的产生是由于物质的存在及其分布使时间和空间性质变得不均匀（时空扭曲）所致，并由此建立起引力场理论。

狭义相对论是广义相对论在引力场很弱时的特殊情况。

广义相对论的数学表述是非欧几里得的黎曼时空。

# Summary

狭义相对论：关于物质运动的时间空间关系的理论。

## 1. 狭义相对论的基础

相对性原理

光速不变原理 (任何物体速度不能超过光速)

Lorentz变换

## 2. 狭义相对论的时空观

$(x, y, z, ict)$ 四维空间

长度的相对性---运动的尺变短

$$l' = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

时间的相对性—运动的钟变慢

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2}$$

同时性的相对性

### 3. 相对论力学

牛顿第二定律

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

相对论质量---

运动的质量变大

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

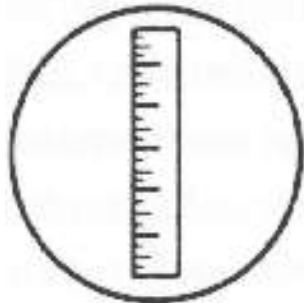
相对论动量

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 \vec{v} = m \vec{v}$$

相对论能量---质能关系

$$E^2 = mc^2 = E_0^2 + p^2 c^2$$

SPACE



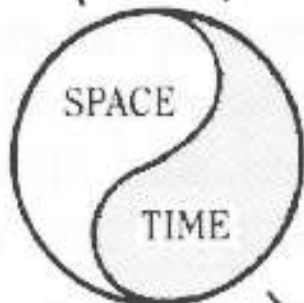
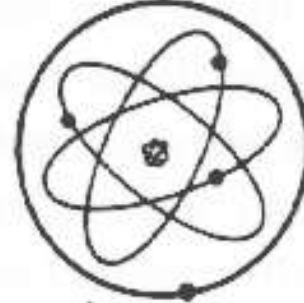
TIME



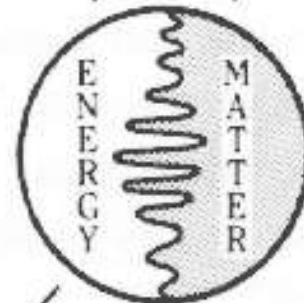
ENERGY



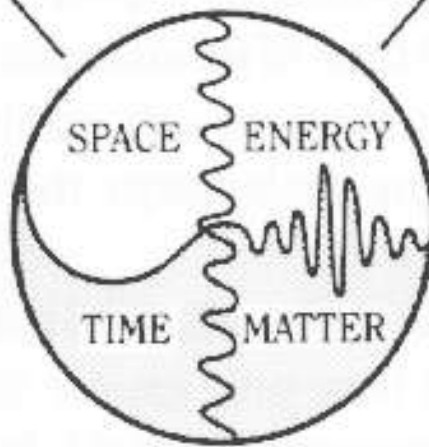
MATTER



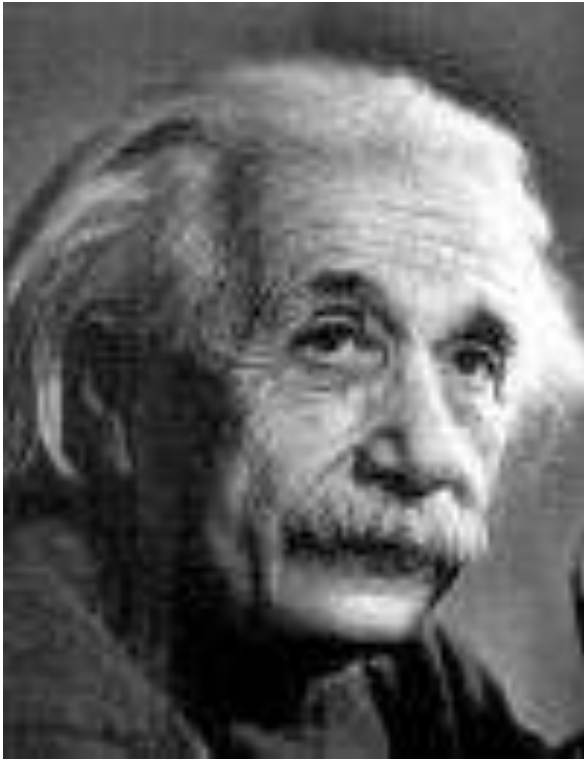
1905 SPECIAL THEORY OF RELATIVITY



1905 ENERGY-MASS EQUIVALENCE



1915 GENERAL THEORY OF RELATIVITY



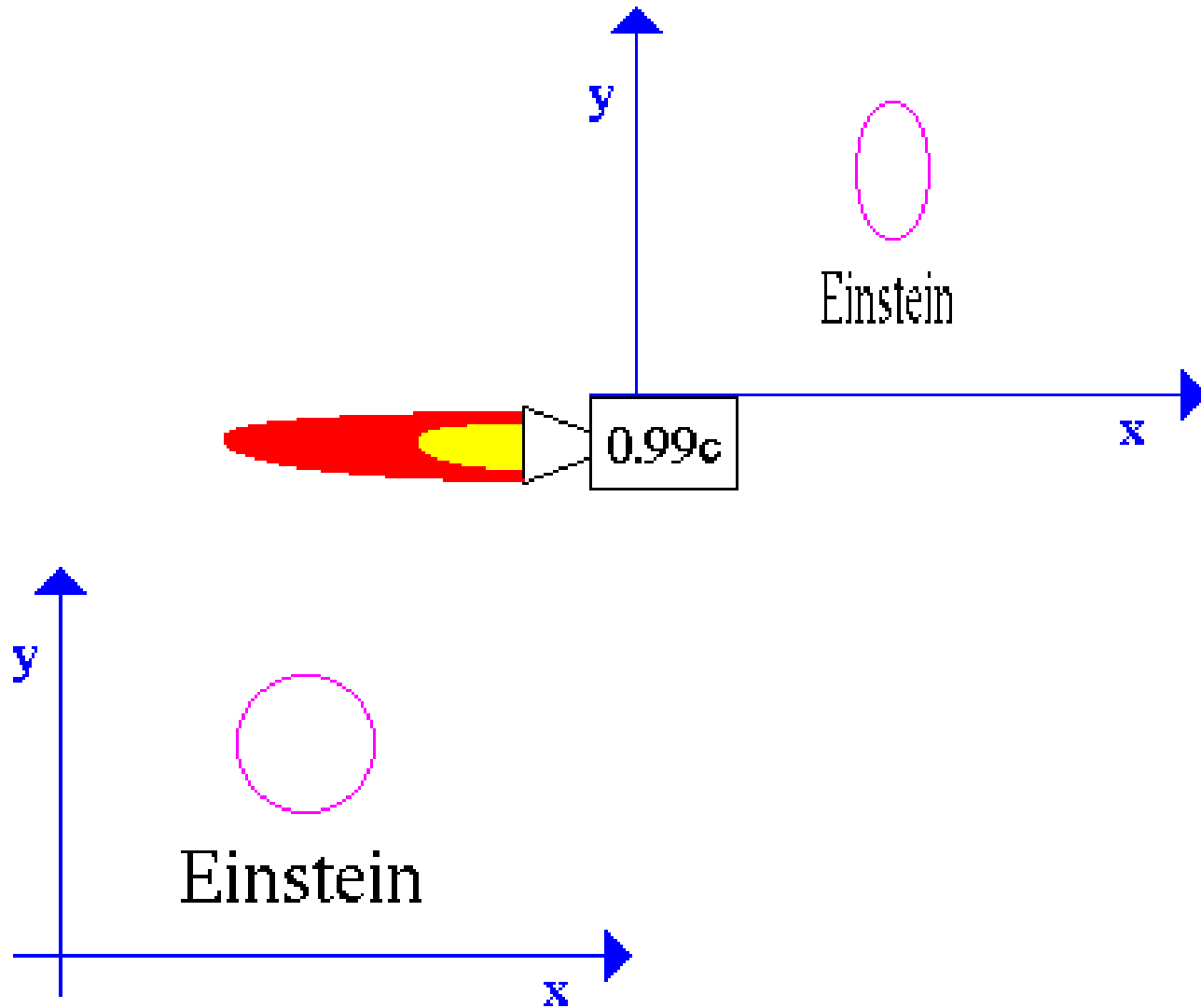
*If relativity is proved right the Germans will call me a German, the Swiss will call me a Swiss citizen, and the French will call me a great scientist.*

*If relativity is proved wrong the French will call me a Swiss, the Swiss will call me a German, and the German will call me a Jew.*

**世态炎凉 洋人亦然！**

**See cartoons please**

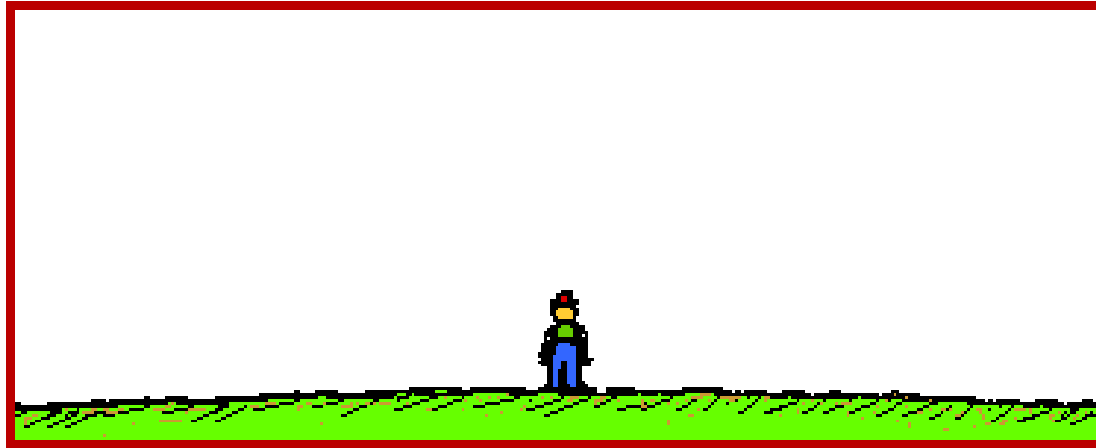
# Lorentz Contraction



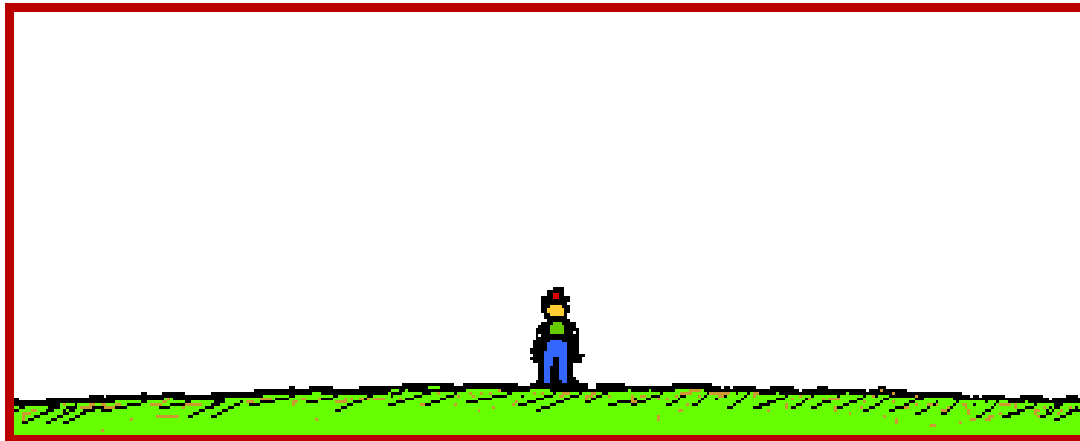
an object moving close to the speed of light appears shortened



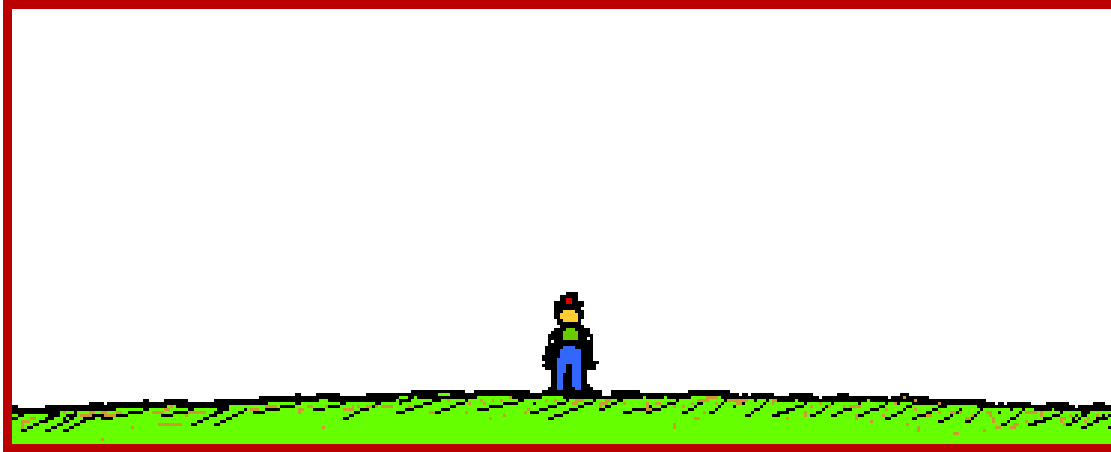
## Spaceship Moving at the 10 % the Speed of Light



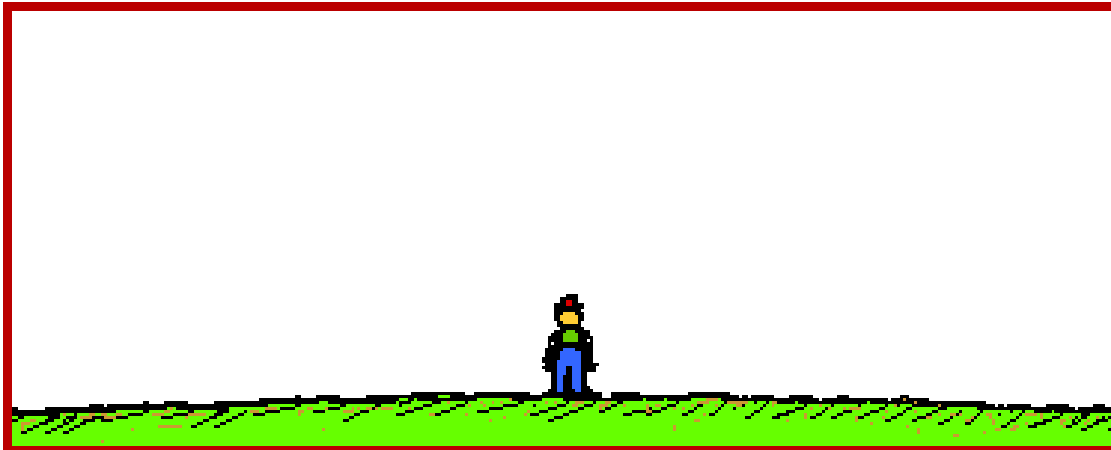
## Spaceship Moving at the 86.5 % the Speed of Light



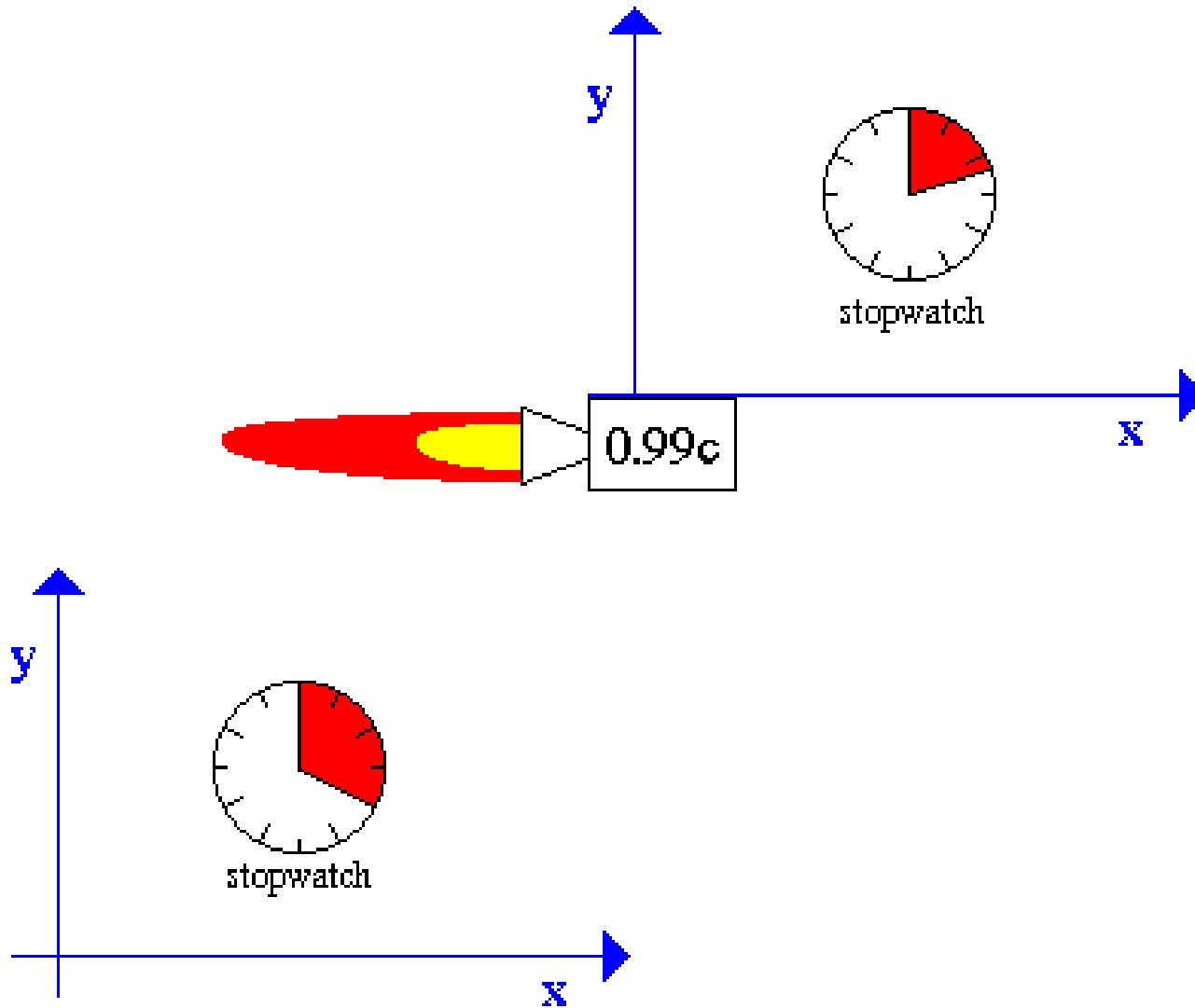
## Spaceship Moving at the 99 % the Speed of Light



## Spaceship Moving at the 99.99 % the Speed of Light



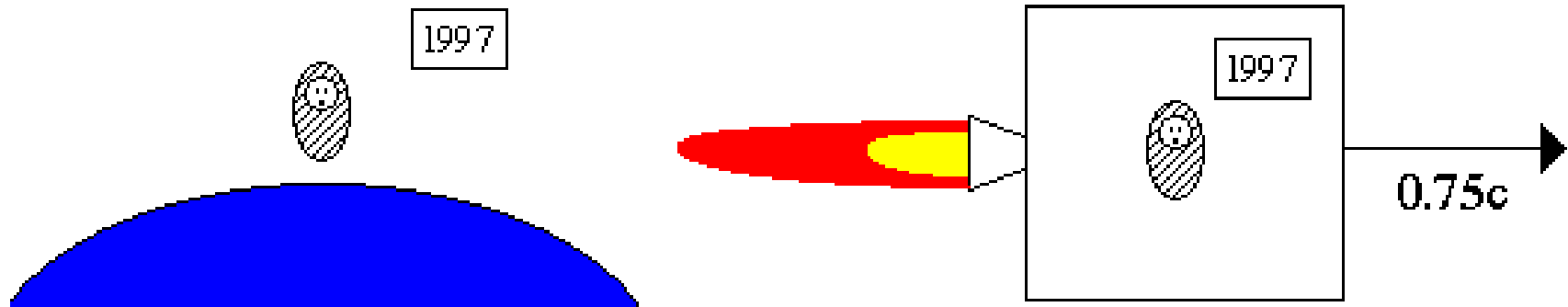
# Time Dilation



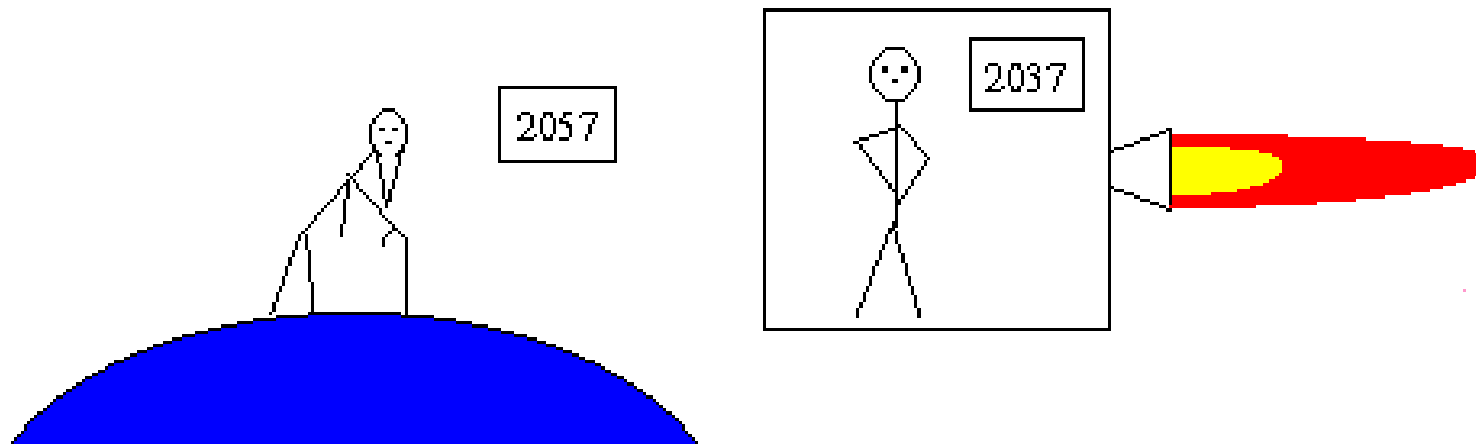
clocks run slower as one approaches the speed of light

## Twin Paradox

one set of twins leaves the Earth in a rocketship bound for the stars



60 years later the rocket returns to with the astronaut only 40 years old due to time dilation



# 回乡偶书

(唐)贺知章

少小离家老大回 乡音无改鬓毛衰  
儿童相见不相识 笑问客从何处来

自编打油诗

# 李生子伴谬

少小离家老大回 容貌无改乡音变  
兄长相见似相识 惊问侄从何处来

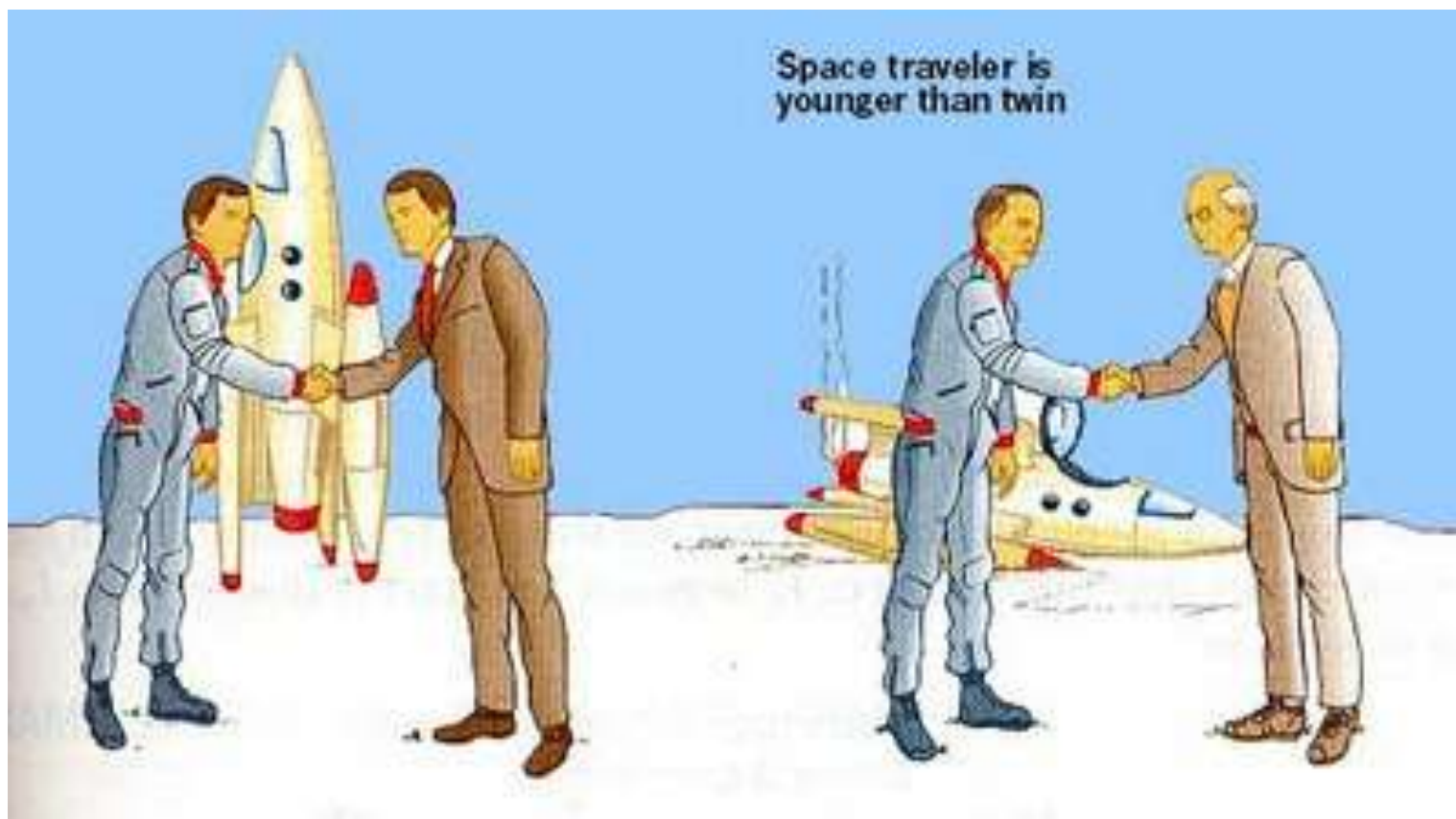
# 孪生子佯谬

少小离家老大回

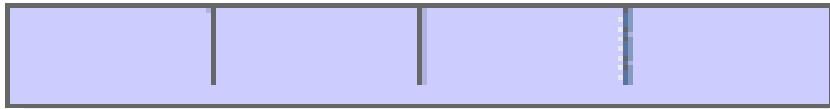
容貌无改乡音变

兄长相见似相识

惊问侄从何处来



# Length contraction



$v = 0$



$v = 0.9c$

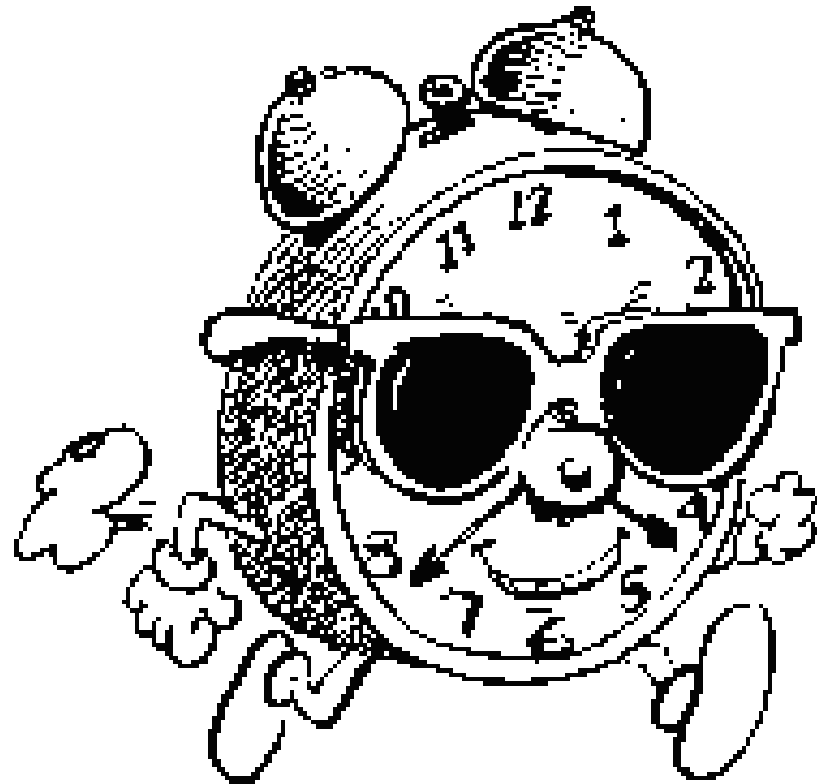
**Moving ruler becomes shorter**

动尺变短

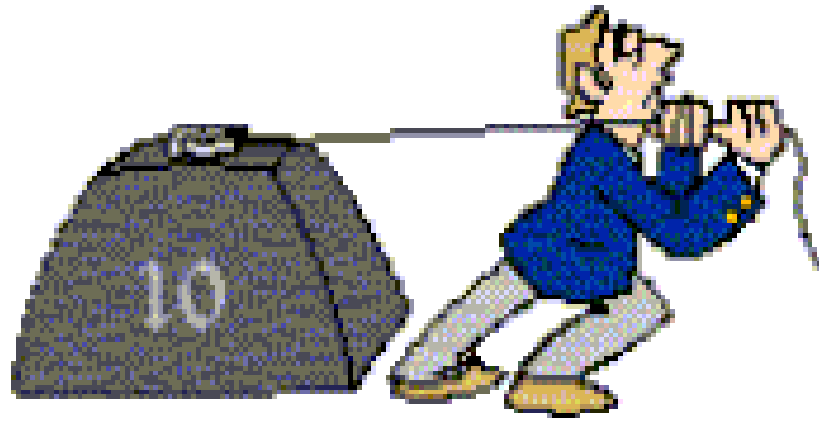
**Moving clock runs slow**

动钟变慢

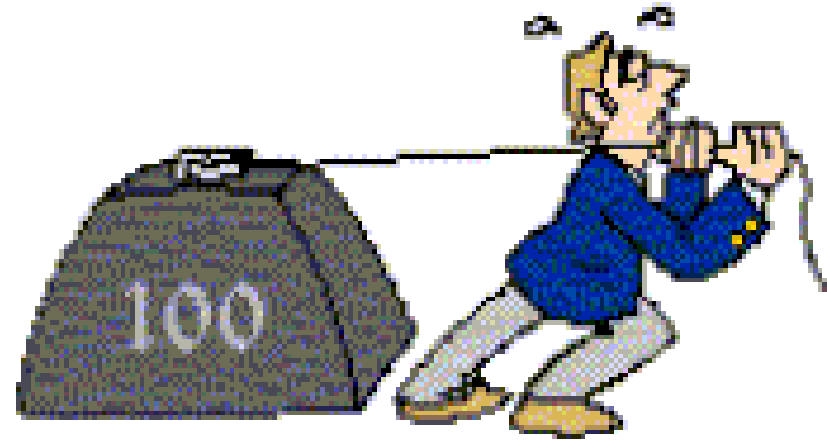
# Time dilation



# Mass increase due to very high speeds



Mass at 0% of the  
speed of light = 10kg



Mass at 99.5 % of the  
speed of light = 100kg

**Moving guy gets heavy**

动猪变重





# The greatest equation in physics

In October 2004 readers of Physics World voted for their favorite equation in the scientific equivalent of Pop Idol.

The following equations are listed in order of the number of people who proposed them.

The first two received about 25 mentions each out of a total of about 120; the rest received between two and 10 each.

1. Maxwell's **Gauss's law**  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int \rho dV$   $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

**Gauss's law for magnetism**  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$   $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

**Faraday's law**  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$   $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$

**Ampere's law**  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{A}$   $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{J}$

1. Euler's equation:  $e^{i\pi} + 1 = 0$

3. Newton's second law:  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

4. Pythagoras's theorem:  $a^2 + b^2 = c^2$

5. Schrödinger's equation:  $\mathbf{H}\psi = \mathbf{E}\psi$

**6. Einstein's equation:**

$$\mathbf{E} = mc^2$$

**7. Boltzmann equation**

$$\mathbf{S} = k \ln W$$

**8.  $1 + 1 = 2$**

**9. Principle of least action**

$$\delta S = 0.$$

**10. De Broglie's equation**

$$p = h/\lambda$$

# Comment

1. Maxwell's equations:  $\nabla \cdot D = \rho$

“Maxwell’s theory contains four equations, not one. So many votes these equations should have been split four ways, which would surely have taken them out of top ten.”

1. Euler’s equation: “This is mathematics, not physics!”

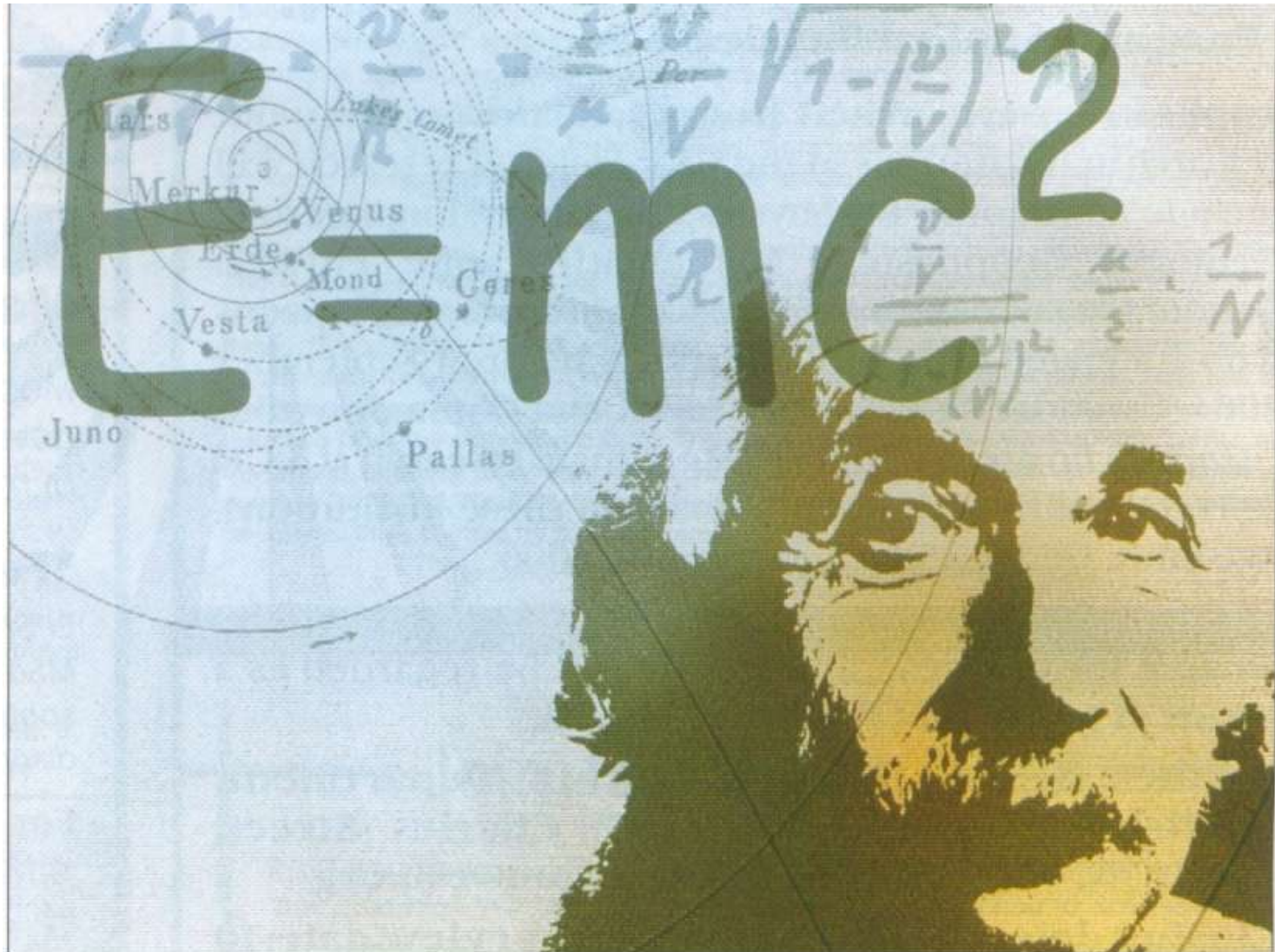
3. Newton’s law of gravitation: “This law brought physics into the modern era, but is it really one of the greatest equations ever?”

4. Pythagoras’s theorem: “It is mathematical, not scientific.”

5. Schrödinger’s equation: “It is great but very abstruse and complicated.”

# 6. Einstein's equation: $E = mc^2$

Must be the greatest one





This large outdoor sculpture representing Einstein's famous equation went on show during 2006 World Cup in Germany

# “符号艺术墙”亮相街头

上海新民晚报2007年12月17日  
A4版

图为由“音符”“数学符号”组成的艺术彩墙出现在广灵二路上

杨建正 摄影报道





## 爱因斯坦雕像在沪揭幕

### 德国前总理施罗德出席仪式并致辞

本报讯（见习记者刘力尊）昨天，由上海市人民政府新闻办公室、上海市城市雕塑委员会办公室联合策划、制作的爱因斯坦雕像在上海城市雕塑中心举行揭幕仪式。德国前总理格哈特·施罗

德、中共上海市委常委、宣传部部长王仲伟共同为雕像揭幕，副市长沈晓明在仪式上致辞。

这一雕像的落成，缘起于前年德国曼哈姆市前常务副市长艾格尔博士委托中国前驻德国大使

梅兆荣转给上海市府新闻办的一封信。信中，透露了爱因斯坦与上海的特殊的历史交往。爱因斯坦曾两次访问上海，他于1922年10月7日首次航行至上海的途中，获悉自己已获得诺贝尔物理学

奖的消息，1923年元旦前一天他第二次到上海，并作关于相对论的演讲。一封海外飞鸿引出一段情缘。由此，由上海市人民政府新闻办公室牵头，文汇报等媒体推出了“爱因斯坦与上海”、“国际科学文化名人与上海”等系列跟踪采访活动。在上海落成爱因斯坦雕像的创意也因此而生。

在昨天的揭幕仪式上，施罗德在致辞中热情地说，很高兴上海至今仍怀念着这位伟人，这体现了上海这座城市的开放胸襟和国际化程度，在上海建一座这样的雕像是最合适不过的。他并对记者表示，这是他看到过的爱因斯坦雕像中最传神的一座，“那一双明眸中透出的目光让人印象深刻”。

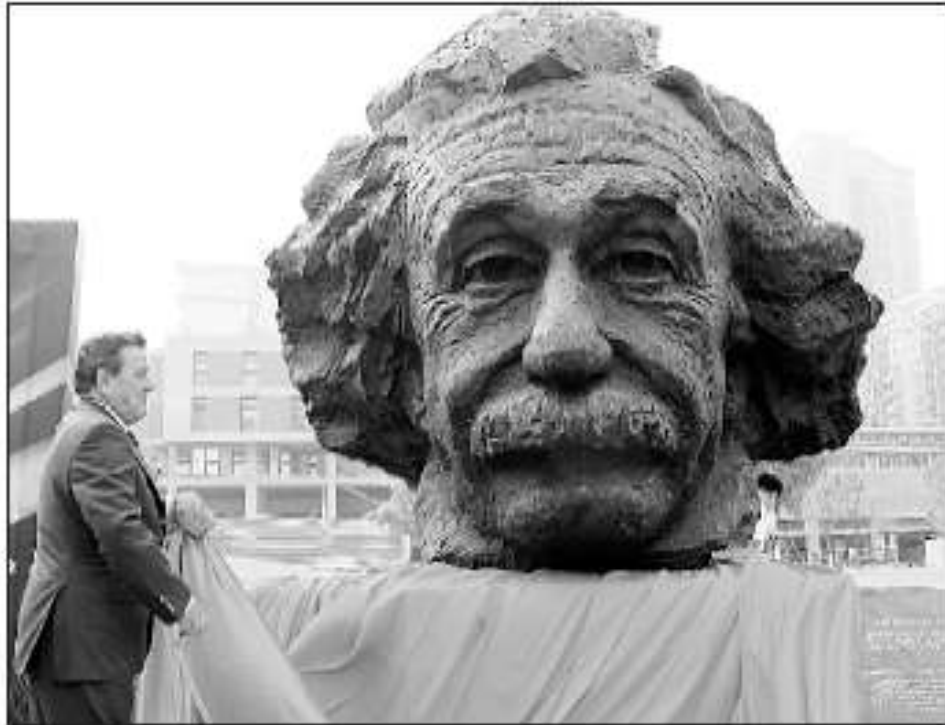
爱因斯坦雕像系青铜铸造，高2.8米，由著名雕塑家唐世镛历时两年多创作完成。已为马克思、恩格斯等多位伟人、名人立像的唐世镛谈到这次创作，充满自豪。他说：“这一雕像的完成体现了政府对科学、科学家的重视。爱因斯坦外貌、个性都有特征，他的思维是超前的，许多想法后人仍在继续研究，我希望用一种有视觉冲击力的方式来表现这位世界伟大科学家的形象。现在伟人已去，但他的目光仍关注着人们在科学上的探索之路。”

参加昨天揭幕仪式的还有最先促成这一佳事的原中国外交学会会长梅兆荣和德国友人艾格尔博士。

据悉，施罗德此次访沪期间，还向上海市儿童福利院捐赠1万欧元。

左图为施罗德为爱因斯坦雕像揭幕。

陈正宝摄



德国前总理施罗德

座落在上海城市雕塑中心

# 美丽的公式： $E = mc^2$

沈致远

(摘自《解放日报》2005.12.3)

她丽质天生，素面朝圣，美在简约。 $E = mc^2$ 只有三个符号和一个数字： $E$ 为能量， $m$ 为质量， $c$ 为光速， $c$ 右肩上的2表示取其平方。如此简单的公式，学过代数的中学生都能理解：能量等于质量乘以光速之平方。

她系出名门，世代书香，源远流长。 $E = mc^2$ 包含三个物理量：能量、质量和光速。质量这个概念可以追溯到16世纪的伽利略和17世纪的牛顿，能量这个概念可以追溯到17世纪的笛卡儿和19世纪的焦耳，光速则和19世纪创建电磁理论的麦克斯韦的名字分不开。

她现身大漠，惊鸿一瞥，令人惊艳。美丽的公式“养在深闺无人识”，直到第一颗原子弹在美国新墨西哥州沙漠中试爆，一道霞光耀目，令全世界人惊艳。

她显示出逻辑思维之魅力。 $E = mc^2$ 是逻辑推理的结果。狭义相对论探究时间空间的性质，其基本原理是光速不变原理和相对性原理。从表面看，这些和质能相当公式根本不搭界。妙的是，你只要承认这两条基本原理， $E = mc^2$ 就是逻辑推理的必然结果

她“动如脱兔，静若处子”。质量是静止的，能量是运动的， $E = mc^2$ 将两者联系起来——动静相通。质能相当使得原来的两个基本定律——物质不灭定律和能量守恒定律，合二为一，归结为一个包罗万象的能量守恒定律。质量和能量是同一种东西的不同形式，好比有两种货币E和m，原先认为不能互相兑换。爱因斯坦发现：E是流通货币，m是存款，两者可以兑换，兑换率是 $c^2$ 。她开辟了一个新时代——原子能时代。就像存款可以取用一样，既然质量是物质所存储的能量，它就是能源，将之取出来就是原子能。

# Most beautiful mathematic formula

Euler equation  $e^{i\pi}+1=0$

Leonhard Euler (1707-1783) --  
-生活在俄罗斯的瑞士科学家，  
被广泛地认为是18世纪最伟大  
的人物之一。

他受眼疾折磨而最终致盲，  
留给我们超过80个以他的名字  
命名的数学和科学概念。



若干年前，*Mathematical Intelligencer* 杂志的读者投票选出Euler方程为迄今最美的方程，甚至超过了Pythagoras方程。

当年14岁的 R Feynman第一次读到 $e^{i\pi} + 1 = 0$ ，这位未来的Nobel物理奖得主用大的粗体字在日记本上写下：它是 “the most remarkable formula in math”。

实际上，Euler从未将这一著名的公式写成 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 。他只是写出了它的等效的表达式。当他21岁时，写信告诉他老师 Johann Bernoulli的公式是  $\pi = \ln(-1) / \sqrt{-1}$  (Euler用了  $\sqrt{-1}$  而不是 “ $i$ ”，因为他直到1770年代才发明了 “ $i$ ”。)

过了几年，他给在圣彼得堡的老师 Christian Goldbach写信时，把公式表示为  $1/2\sqrt{(-1)\ln(-1)}=\sqrt{\pi}/2$ 。

$e^{i\pi}+1=0$ 和这二个式子都等效，但它不是当初 Euler所写的形式。而我们并不确切地知道是谁把Euler公式的早期形式改成为我们今天所用的这样美丽的方程。

最美丽的数学公式

欧拉公式

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



# 最美丽的数学公式：

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

孙珺

复旦大学数学学院07级

2008年6月7日 0:54

王迅老师近日讲相对论，引用沈致远先生的文章赞美爱因斯坦的公式 $E = mc^2$ ，并向在座数学系同学征求一篇类似的描绘欧拉公式的文章。去年正好是欧拉诞生300周年，且试着写一下我对欧拉公式的感受，虽然也没有什么新意，但毕竟也算动了脑筋，谨以略表我对王迅老师这几次授课的感谢吧。

## 玄兮妙兮，欧拉公式，她是数学美的金科玉律。

宫商角徵羽，声韵合于五音；金木水火土，万物化于五行； $10\pi e i$ ，等式成于五数。五个最重要的常数，用加乘幂等系于一线，熔于一炉。

道生一，一生二，二生三，三生万物。自然数1，是整数的单位，是数字的始祖。

无为有处有还无。中性数0，空间原点，非正非负，亦庄亦谐，加之减之而不变，乘之则归尽，除之则无穷。

山巅一寺一壶酒，地老天荒无尽头。圆周率 $\pi$ ，脍炙人口，妇孺皆诵。割圆祖率，幂级展开；无理数，超越数，正态数？计算证明，永无止境。

自然对数，顺其自然，以 $e$ 为底，简洁方便。是欧拉首先将 $e$ 作为专门的数学符号使用。人口增长、生存竞争、布朗运动、冷却定律…… $e$ 无处不在，宛若美神，赋予各种函数和公式最洒脱的形式。

太虚幻境，即是真如福地。欧拉首先使用符号 $i=\sqrt{-1}$ ，以更深的认识为数学王国又开辟出一块疆域，从此方程求根，交流电的表示.....各种计算都面貌一新。

五朵金花，各放异彩，天造地设，珠联璧合。

**名兮贵兮，欧拉公式，她是数学家的智慧结晶。**

她出身显赫，来历不凡，源自大师的手笔。她是复分析中欧拉得到的等式的特殊情况，这个等式是指数函数的中心。欧拉瞽目，顽强不屈，以炳烛之明，产史上之最。1907年开始出版的欧拉全集，横跨天文、物理、建筑、地质、音乐、医学、植物学、化学、神学、哲学和语言学等众多学科，卷数何止两位，至今没有出齐。拉普拉斯说欧拉“是我们每个人的老师”。

她端庄大方，秀外慧中，简洁包含着深刻。悬挂于巴黎发明宫数学陈列室的间墙，如莎士比亚的十四行诗，达芬奇的蒙娜丽莎，王羲之的兰亭集序，人人都可驻足欣赏，顶礼膜拜。

《数学信使》杂志将她评为最美的数学定理。2004年《物理世界》杂志，将她和麦克斯韦方程组一起列为最伟大的等式。

《欧拉神话般的公式》的作者，在书中称她为“数学美的典范”。

康斯坦斯·里德称她为“最卓越的数学公式”，而理查德·费曼把她唤作“欧拉的宝石”。

伟大的高斯更是语出惊人：“如果被告知这个公式的学生不能立即领略她的风采，这个学生将永远不会成为一流的数学家。”

# 元素周期律赋

秦振清

基地班08级化学系

2009.06.06 17:50

王老师，  
您好。

在您的课上，您向我们展示了两篇论述了两个公式的优美文章，看了以后，一时兴起，也跟风写了一篇，凑凑热闹，这里给您过目下。里面如果有什么不当的地方，还请不吝赐教。谢谢。

# 元素周期律赋

夫太初之时天地浑，万物皆同而道未生，东皇一钟而镇鸿蒙，太阴一幡而分乾坤。天地立而道法定，然万物衍而人未知，神农尝百草而法自然，轩辕辨万象而明善恶。

大道五十，天衍四九。夫九天之外，苍穹之下，人虽察而不知；璇玑之内，毫末之上，人虽知而不察。虽有所成，难成大器。是故无法则不察，无律则不知。禹铸九鼎而治九州，封诸侯而建万国，顺其法也；纣兴宫室而乱华夏，戮贤圣而裂诸邦，逆其律也。

德氏（德谟克利特）创原子，波氏（波义尔）述微粒，道氏（道尔顿）有倍比，布朗自运动。门氏（门捷列夫）集大成，万物皆元素，先绘元素表，后制周期律。

昔者仓颉造字而天地动，今者门氏制律而鬼神惊，太白一梦诗赋成，门氏一觉元素阵。锂钠钾铷铯，氟氯溴碘砷，位两极而周期继。钪钛钒铬锰，铁钴镍铜锌，主副错而PD序。氦氖氩氪氙，惰素非懈惰，铍镁钙锶钡，碱土亦非土。硼铝镓铟铊，氮磷砷锑铋，金石本不同，但为同一族。

周期律既定，万物自有序。佛家有云，大千世界，万象迁易。然元素者，恒也，非增非减，不生不灭。门氏列元素而制此律，并既往而言莫测，举八荒而烁千古，镇宇内而伏万世，视之天下，莫出其右。

呜呼，一表成而万邦名，一律定而列国知，何须土木金石以记之。夫兴土木而废金石以留其名者，不亦愚乎？



*3Q*

*3Q!*



*Thank*

*you!*