几何之美 2

宗传明

本文受到国家 973 项目 2011CB302400, 国家自然科学基金项目 11071003 和长江学者奖励计划的资助。作者感谢贾朝华教授和项武义教授的润色建议。

通讯地址：cmzong@math.pku.edu.cn

引言

按照许多数学先哲（如庞加莱，哈代和冯 • 诺依曼等）的观点，数学不仅是一门科学，也是一门艺术。即数学也是一门追求独创和美的学问。

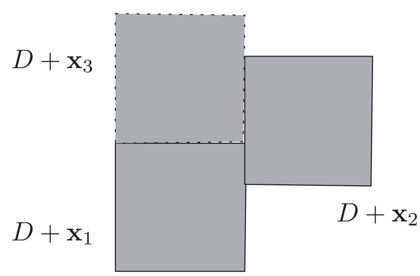
数学中确有一些艺术杰作：自然优美的问题，巧夺天工的构思，荡气回肠的结局。其独创性和优美程度绝不亚于柴科夫斯基的芭蕾舞剧或者雷诺阿的名画，只是对大众来说更难理解和欣赏而已。在这一系列短文中，我们将展示几何学中的几件“艺术珍品”。

对于一个数学家来说，欣赏学习他人的杰作不仅是为了（有可能）直接用到自己的工作中去，更重要的是为了提高修养，开阔眼界。从而使我们远离平庸，接近伟大。

本文将介绍关于立方体的闵可夫斯基猜想和 Keller 猜想。前者由闵可夫斯基（Minkowski，1864-1909）于 1907 年提出，于 1942 年被 Hajós 证明。Hajós 的证明是如此美妙，以至于被 S. K. Stein 比喻为“就像蚕蛹变成蝴蝶的过程一样神奇”。后者由 Keller 于 1930 年提出，是闵可夫斯基猜想的推广，其高维情况于 1992 年被 Lagarias 和 Shor 所否定。Keller 猜想的研究过程比 Hajós 的证明更神奇。

1 观察

假定 D 是一个单位方块，$X=\{\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \cdots\}$ 是平面 E^2 中的一个离散点集合，$D+X=\{D+\mathbf{x}_i:\ \mathbf{x}_i\in X\}$ 是 E^2 的一个平铺 (tiling)。也就是说，方块 $D+\mathbf{x}_i$ 两两内部互不相交且 $E^2=\bigcup_{\mathbf{x}_i\in X}(D+\mathbf{x}_i)$。如果 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是 X 中的两个点并且 $D+\mathbf{x}_1$ 与 $D+\mathbf{x}_2$ 有公共点，那么 $(D+\mathbf{x}_1)\cap(D+\mathbf{x}_2)$ 将是 $D+\mathbf{x}_1$ 的一条边或者是一条边的一部分。如果是后者，由于 $D+X$ 是 E^2 的一个平铺，如下图所示一定存在另一个正方形 $D+\mathbf{x}_3$ 与 $D+\mathbf{x}_1$ 相交于一条完整的边。



这样我们证明了如下结论：

> 如果 $D+X$ 构成 E^2 的一个平铺，那么其中必有两个方块具有一条完整的公共边。

在三维欧氏空间 E^3 中。我们假设

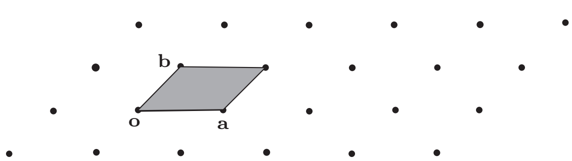
$$C=\{(x_1,x_2,x_3):|x_i|\le 1/2\},$$

X 是一个离散点集合（为了叙述方便，我们假定 $\mathbf{o}\in X$），$C+X$ 是 E^3 的一个平铺。如果 $C+\mathbf{x}$ 碰到 C 的一个顶点 $\mathbf{v}$，那么 $\mathbf{v}$ 可能是 $C+\mathbf{x}$ 的一个面的一个相对内点，或者是它的一条边的一个相对内点，或者是它的一个顶点。如果是第一种情况，通过投影来考虑 $C+X$ 中所有含 $\mathbf{v}$ 的单位立方体（$C+\mathbf{x}$ 除外）可以证明其中必有一个与 C 有一个完整的公共面。这样，假设 $C+X$ 中不存在单位立方体既包含 $\mathbf{v}=(1/2,1/2,1/2)$ 又与 C 共面，那么其中一定存在三个立方体 $C+(1,0,t_1)$，$C+(0,t_2,1)$ 和 $C+(t_3,1,0)$，其中 $0<t_i<1$。这时，$C+(0,t_2,1)$ 的顶点 $(1/2,t_2-1/2,1/2)$ 一定是 $C+(1,0,t_1)$ 的某个面的相对内点。所以 $C+X$ 中一定有一个立方体与 $C+(0,t_2,1)$ 共面。这样我们证明了如下结论：

> 如果 $C+X$ 构成 E^3 的一个平铺，那么其中必有两个立方体具有一个完整的公共面。

2 闵可夫斯基猜想

我们先介绍几个概念。如果 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n$ 是 n 维欧氏空间中的 n 个线性无关向量，Z 表示所有整数构成的集合，我们称 $\Lambda=\left\{\sum_{i=1}^{n}z_i\mathbf{a}_i:z_i\in Z\right\}$ 为一个格并记其基本方体 $P=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{a}_i:0\le\lambda_i\le 1\right\}$ 的体积为 $d(\Lambda)$。格是由高斯为推广整数而引入的一个概念。显然，它是非常有规律的集合。在平面中，所有的格（局部）都有如下形状：



如果 K 是一个几何体，X 是一个格并且 $K+X$ 是一个平铺，我们就称其为一个格平铺。我们称两个立方体为一个共面对如果它们有且仅有一个完整的公共面，并且定义单位立方体 $C^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):|x_i|\le 1/2\}$。

1907 年，闵可夫斯基基于以上观察提出了如下猜想：

闵可夫斯基猜想 E^n 的每一个格平铺 $C^n+\Lambda$ 中都有共面对。

依照上一节的观察，这一猜想很自然，甚至还太保守。实际上，相关的历史非常曲折复杂。也许这正是它的美妙所在。早在 1896 年，闵可夫斯基证明了如下结论：

> 如果 $A=(a_{ij})$ 是一个没有整数列且行列式为 1 的实系数 2×2 矩阵，那么
> $$\begin{cases}|a_{11}z_1+a_{21}z_2|<1\\|a_{12}z_1+a_{22}z_2|<1\end{cases}$$
> 一定有非平凡整数解。

在此基础上，他断言类似的结论对 $n\times n$ 矩阵也是正确的。也就是

闵可夫斯基猜想 * 如果 $A=(a_{ij})$ 是一个没有整数列且行列式为 1 的实系数 $n\times n$ 矩阵，那么

$$\begin{cases}|a_{11}z_1+a_{21}z_2+\cdots+a_{n1}z_n|<1\\|a_{12}z_1+a_{22}z_2+\cdots+a_{n2}z_n|<1\\\qquad\cdots\\|a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+\cdots+a_{nn}z_n|<1\end{cases}$$

一定有非平凡整数解。

他自己没有给出这一断言的证明。11 年后，他又将这一分析形式的猜想转述为前面所说的几何形式。下面，我们简要说明一下它们的等价性。

首先，我们定义一个格 $\Lambda=\{\mathbf{z}A:z_i\in Z\}$。由于格点 $\mathbf{z}A$ 的第 i 个坐标即

$$x_i=a_{1i}z_1+a_{2i}z_2+\cdots+a_{ni}z_n,$$

$C^n+\Lambda$ 是一个堆积 [注 1] 当且仅当分析形式中的不等式组没有非平凡的整数解。另一方面，由于

$$\frac{v\left(C^n\right)}{d\left(\Lambda\right)}=\frac{v\left(C^n\right)}{\det\left(A\right)}=1,$$

$C^n+\Lambda$ 将是 E^n 的一个平铺一旦它是一个堆积。

如果分析形式成立并假设几何形式在 $n-1$ 维空间也是对的，那么只要 $C^n+\Lambda$ 是 E^n 的一个格平铺 A 就一定有一整数列且满足

$$(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}) = 1.$$

假设 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 为满足

$$a_{1i}z_1 + a_{2i}z_2 + \cdots + a_{ni}z_n = 1$$

的一组整数 [注 2]，我们定义

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{n} z_j\mathbf{a}_j,$$

$$U=\bigcup_{z\in Z}(C^n+z\mathbf{u})$$

以及

$$H=\left\{\mathbf{x}\in E^n : x_i=0\right\}.$$

由于 $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})'$ 是一个整列，容易看出 $C^n\cap H+\Lambda\cap H$ 是 H 的一个格平铺。基于前面的归纳假设，容易看出 n 维的几何形式也一定是对的。

反过来，如果几何形式的猜想是对的，那么通过多次递归我们可以导出 Λ 对应着一个如下形式的矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

也就是说，A 一定有一个整数列。所以，如果 A 没有整数列那么 $C^n+\Lambda$ 就不是一个堆积，从而

$$\begin{cases} |a_{11}z_1+a_{21}z_2+\cdots+a_{n1}z_n|<1 \\ |a_{12}z_1+a_{22}z_2+\cdots+a_{n2}z_n|<1 \\ \cdots \\ |a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+\cdots+a_{nn}z_n|<1 \end{cases}$$

一定有非平凡整数解。

注 1

K 是一个几何体，X 是一个离散点集合，如果平移体 K + x_i，$x_i\in$ X，两两内部互不相交我们就称 K + X 是 E^n 中的一个堆积。

注 2

它们的存在性是初等数论的一个基本结论。

赫尔曼 • 闵可夫斯基
Hermann Minkowski (1864-1909)

赫尔曼 • 闵可夫斯基是历史上最著名的天才数学家之一。他以 18 岁荣获巴黎科学院竞赛大奖（确定了将一个自然数表示为五个平方和的不同种数）成就了一位数学天才的美名。在随后的数学生涯中，他以创立了数学分支“数的几何”而名垂青史。在求学时期闵可夫斯基是一个幸运儿：他曾受教于 Weber，Voigt，Kummer，Kronecker，Weierstrass，Helmholtz 和 Kirchhoff，他的获奖论文曾得到 Jordan 和 Bertrand 的推崇，他与希尔伯特结下的友谊更是数学史中的佳话。可惜他与伽罗华（Evariste Galois，1811-1832），阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802-1829）和黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826-1866）一样英年早逝，给数学史留下了悲壮的一页。去世前，他任哥廷根大学教授，成为哥廷根数学名人中的一员（高斯，狄利克雷，黎曼，克莱因，希尔伯特，闵可夫斯基……）。

数的几何起源于拉格朗日，高斯和埃尔米特关于正定二次型在整点取值的研究。闵可夫斯基观察到一个正定二次型确定了一个椭球和一个格（lattice），椭球是凸几何体的特例，格则是所有整点集合的推广。基于天才的几何直觉，他证明了如下结论：

> 假设 C 是 n 维欧氏空间中一个中心对称的凸几何体（以原点为中心）。如果 C 的体积不小于 2^n，那么除原点外它一定还包含一个整点。

这就是数的几何这一数学分支的基石。这一定理不仅可以导出几乎所有经典丢番图逼近的结论以及关于代数数域中单位元的狄利克雷定理，改进埃尔米特常数的估计，也可以导出拉格朗日的四平方和定理。可见其重要性。

3 Hajós 定理

在历史上，许多著名数学家通过分析的方法研究过这一猜想并证明了 $n \le 9$ 的情况，他们包括 T. Schmidt，O.H. Keller 和 O. Perron。然而，这一方法很难在维数上取得突破。基于 T. Schmidt 等人的工作，匈牙利数学家 Hajós 于 1941 年将这一猜想转换成了如下的代数形式并成功地给出了一个完美的证明。

闵可夫斯基猜想* 假设 G 是一个有单位元 $\mathbf{1}$ 的有限阿贝尔群。如果 $\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n$ 是 G 中的 n 个元素，$q_1, \cdots, q_n$ 是 n 个正整数使得 G 中的每一个元素都可以唯一地表示为

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i^{z_i}, \quad 0 \le z_i \le q_i - 1,$$

那么 $\mathbf{g}_i^{q_i} = \mathbf{1}$ 对某一个指标 i 成立。

由于形式上的差异，人们很难想象这一代数形式与原来的猜想会是等价的。的确，导出它们的等价性也确实是非常困难。但道理上也不是完全不着边际。

注 3

> 这里 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数。

首先，如我们介绍格的定义时所说，格本身是一个阿贝尔群。如果 Λ 是一个有理格，也就是它的基的坐标都是有理数

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{q_{11}}{p_{11}}, \frac{q_{12}}{p_{12}}, \cdots, \frac{q_{1n}}{p_{1n}} \right),$$

$$\mathbf{a}_2 = \left(\frac{q_{21}}{p_{21}}, \frac{q_{22}}{p_{22}}, \cdots, \frac{q_{2n}}{p_{2n}} \right),$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{q_{n1}}{p_{n1}}, \frac{q_{n2}}{p_{n2}}, \cdots, \frac{q_{nn}}{p_{nn}} \right) \cdots$$

其中 $(q_{ij}, p_{ij}) = 1$。那么我们定义 [注 3]

$$d_i = [\, p_{1i}, p_{2i}, \cdots, p_{ni} \,],$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{d_i} \mathbf{e}_i,$$

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in E^n : 0 \le x_i \le \frac{1}{d_i} \right\},$$

以及

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{v}_i : z_i \in Z \right\}.$$

可见 $P + \Gamma$ 是 E^n 的一个格平铺，并且 Λ 是 Γ 的一个子格。所以我们得到了一个商群

$$G = \Gamma / A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

其中

$$A_i = \left\{ \bar{\mathbf{o}}, \bar{\mathbf{v}}_i, 2\,\bar{\mathbf{v}}_i, \cdots, (d_i - 1)\,\bar{\mathbf{v}}_i \right\},$$

$\bar{\mathbf{v}}_i$ 表示 $\mathbf{v}_i$ 产生的陪集。如果某一 A_i 是 G 的一个子群，那么 $C^n + \Lambda$ 中就出现共面对。 这是理解这两种形式的等价性最关键的一点。当然，我们还需要证明：

> 如果存在一个无共面对的格平铺 $C^n + \Lambda$，那么一定存在一个没有共面对的有理格平铺。

这是由 Schmidt 发现的。

要证明闵可夫斯基猜想的代数形式，我们还需要引进一个重要的概念。假设 G 是一个阿贝尔群，在它的基础上我们定义一个环

$$\mathfrak{R}(G) = \left\{ \sum z_i \mathbf{g}_i : z_i \in Z \,;\, \mathbf{g}_i \in G \right\},$$

其中加法和乘法分别定义为