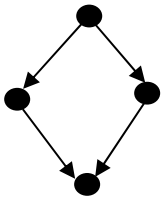
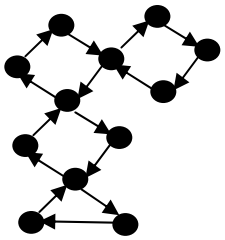
仙人掌图分析：

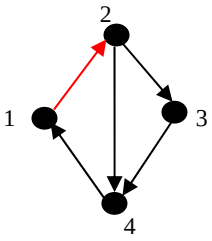
为了对仙人掌图有一个感性认识，我们先看下面三个图。



a)非强连通



b)仙人掌图



c)红色的弧同时属于两个圈

其中 a)和 c)都不是仙人掌图，因为 a)不是强连通的、c)中的红弧同时属于两个圈 1→2→3→4→1 和 1→2→4→1。

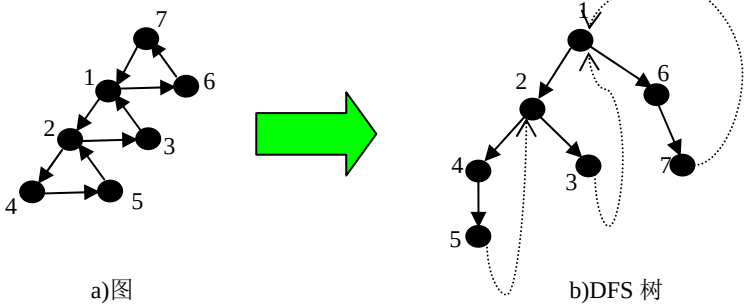
b)就是一个仙人掌。直观的说，仙人掌图就是一个一个的圈直接“粘”在一起的图，圈之间没有公共边。

于是我们很容易得到这样的一个算法：每次找一个圈，如果圈中不相邻的点之间有边，那么该图就不是仙人掌；否则把圈缩成点，然后把圈、点、边的关系进行适当的调整，继续缩圈。

权且不说具体该如何调整圈、点、边的关系，光是缩点这一项就要大费周章。该算法的思维和编程复杂度将非常高。

本文要介绍的另一个种算法是 DFS。对该图进行 DFS 遍历，建立 DFS 树。

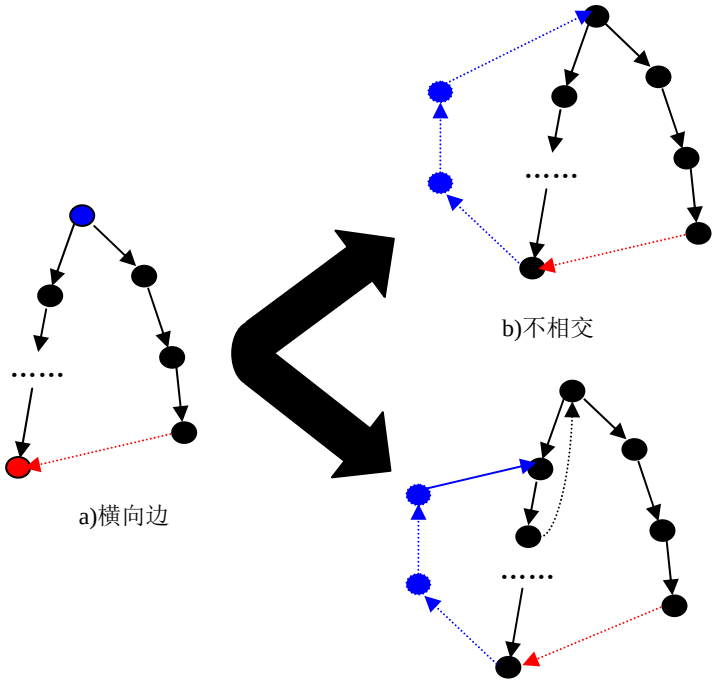
譬如下图：



a)图　　b)DFS 树

如果一个图是仙人掌的话，它的 DFS 生成树有什么特点呢？分析 DFS 树的一般方法是从逆向边和横向边入手。

首先考虑它的横向边。



上面 a)图中的红边是横向边。蓝点是红点的祖先，称从蓝点遍历到红点的这条路为红点的“祖先路径”，记作 P。因为仙人掌图强连通，所以必须存在一条从红点到蓝点的路。

如果这条路不和 P 相交，则如 b)图所示；如果这条路和 P 相交，则如 c)图所示。不论是 b)图还是 c)图，蓝色的点和边都同时隶属两个圈。也就是说，只要存在横向边，这棵 DFS 树的原图就肯定不是仙人掌图。

所以：

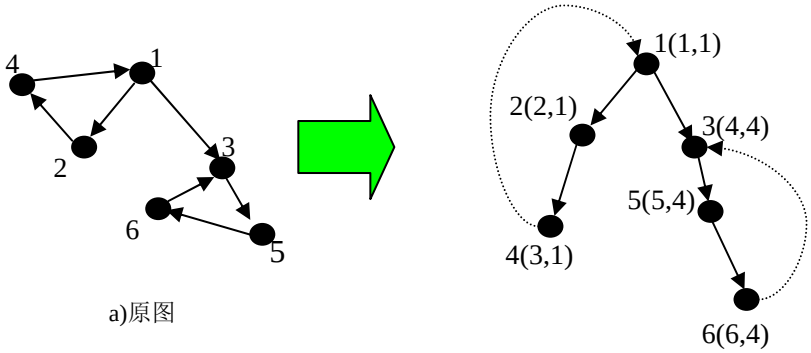
性质 1 仙人掌图的 DFS 树没有横向边。

下面我们进一步考虑逆向边。

对于每个节点 v，定义两个函数：

1. DFS(v)表示 v 在 DFS 树中是第几个被遍历到的点。
2. Low(v)表示通过从 v 以及 v 的所有后代直接指出去的边，可以访问到的 DFS 值最小的点的 DFS 值。

通过下图读者可以对 DFS 和 Low 的定义获得一个更感性的认识。



a)原图

b)DFS 树

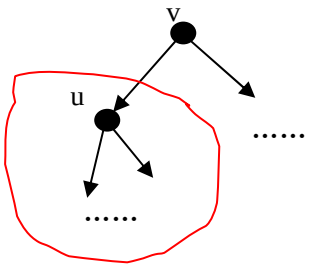
括号中第一个数是 DFS 值，第二个是 LOW 值

DFS 函数的求解可以通过设立一个计数器，在深度优先遍历的时候每碰到一个新的点就累加 1 来实现。

Low 函数的计算如下：

Low(v)=min{DFS(v), Low(u)} (其中 u 是 v 的儿子)

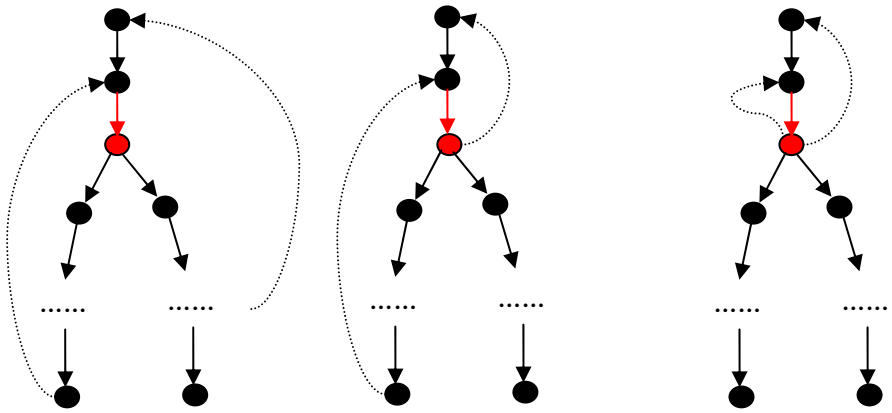
下面考虑某一个点 v。如果它存在一个儿子 u 满足 Low(u)>DFS(v)，那么这个 DFS 树的原图肯定不是仙人掌。



如上图所示，因为 Low(u)>DFS(v)，所以 u 以及 u 的后代都被限制在红色的线圈范围之内，没有指出去的逆向边。这样<v, u>就成了桥。我们知道在一个强连通图中是不可能有桥的，所以：

性质 2 Low(u)<=DFS(v) (u 是 v 的儿子)

然后看下面三个图。



a)图　　b)图　　c)图

上图中的红点都是 v。

在 a)图中，v 有两个儿子的 Low 值小于 DFS(v)，这时红边就同时属于两个圈了。

在 b)图中，v 有一个儿子的 Low 值小于 DFS(v)，同时 v 自己也有一条逆向边。这时红边也同时属于两个圈。

在 c)图中，v 有两条逆向边。这时红边同样属于两个圈。

以上三种情况下，原图都不是仙人掌。归纳起来就是：

性质 3 设某个点 v 有 a(v)个儿子的 Low 值小于 DFS(v)，同时 v 自己有 b(v)条逆向边。那么 a(v)+b(v)<2。

至此我们已经获得了仙人掌图 DFS 生成树的三条性质：

性质 1 仙人掌图的 DFS 树没有横向边。

性质 2 Low(u)<=DFS(v) (u 是 v 的儿子)

性质 3 设某个点 v 有 a(v)个儿子的 Low 值小于 DFS(v)，同时 v 自己有 b(v)条逆向边。那么 a(v)+b(v)<2。

与以上任意性质相悖的图肯定不是仙人掌；反之如果一个图的 DFS 生成树满足以上所有性质，那么它也肯定是仙人掌图（这个可以通过对生成树边和逆向边的分析证明，在此略）。

至此我们就得到了一个仙人掌图判定的 DFS 算法。时间复杂度是 O(n+e)。与“缩圈”算法比较起来，DFS 算法最吸引人的地方还在于其编程复杂度小。

我们把原图用 DFS 树的形式重新描述，这是解题过程中最本质的突破。利用仙人掌图的特殊性，我们可以把 DFS 树中的逆向边、横向边各个击破。同时因为树有祖先和后代之分，具有明显的层次感，为我们设计算法，比如 Low 函数，提供了灵感；反观原图，既没有明显的拓扑关系，仙人掌图的特殊性也无法有效的用图的性质来体现。