美妙的几何魔法
——高立多边形与高立多面体

王淑红　蒋　迅

古希腊柏拉图学院的门上有一句名言：不懂几何者不得入内。不但自古以来几何就有着独特的地位，而且几何的美是浑然天成的，不管是随风飘动的枝条还是静谧安然的山峦，不管是天空中流动的白云，还是海洋中漾起的波澜，都可以归宿于形象的几何。

于是，人们常常津津乐道于构造出新的几何图形，把几何的构造当成一种使命，也作为一种乐趣，亦或是与大自然亲密耳语的一种姿态。

近年来，除了传统的几何图形之外，两种新的几何图形的构造引起数学家们的兴趣。一种是 Lee Sallows 创造的平面几何图形 golygon[1]，因 A. K. Dewdney 1990 年在《科学美国人》（*Scientific American*）专栏上的普及广为人知[2]。另一种是 Joseph O'Rourke 新近创造的立体几何图形 golyhedron[3]。

它们的奇妙在哪里呢？简洁地讲，就是顶角都是直角，且边长或表面积成某种数列的多边形或多面体。目前国内还未见有它们的中文译名，我们姑且取其谐音，把它们称为高立多边形与高立多面体。下面就请跟随我们一起来欣赏它们的奇思特想和构造之美吧。

1. 高立多边形

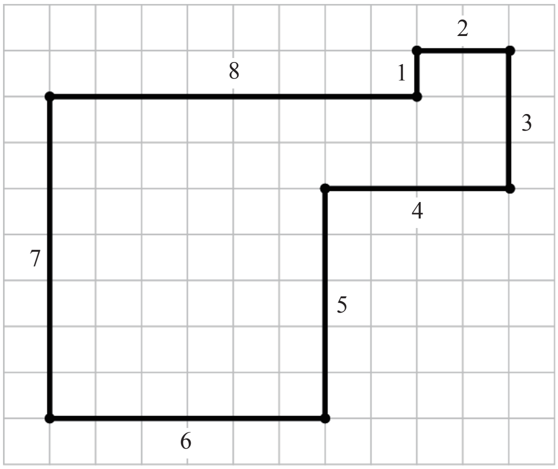
我们不妨先从较为简单的（自然）高立多边形谈起。一个（自然）高立多边形相当于一个格多边形（lattice polygon），它的各个角都是直角，不能自相交，也不能走回头路，且边长必须是连续的整数 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$。按照这个定义，我们所知的最简单的

[1] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Golygon 和 Wolfram, Golygon, http://mathworld.wolfram.com/Golygon.html.

[2] Dudeney, A. K. "An Odd Journey Along Even Roads Leads to Home in Golygon City." *Sci. Amer*. 263, 118-121, July 1990.

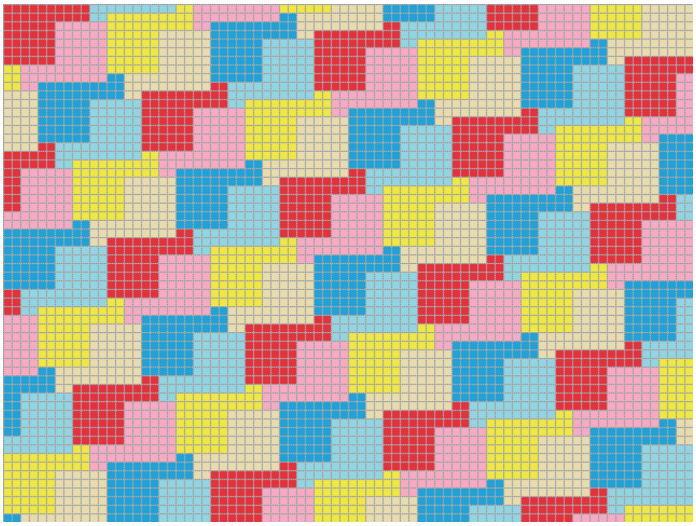
[3] P. Goucher, Golygons and golyhedra, http://cp4space.wordpress.com/2014/04/30/golygons-and-golyhedra 和 P. Goucher, Golyhedron update，http://cp4space.wordpress.com/2014/05/11/golyhedron-update.

高立多边形就是下面这个有点像手枪的 8 边形（octagon）：



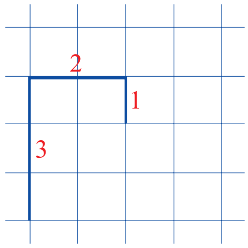
为了方便后面的讨论，我们把这个多边形用 {1N 2E 3S 4W 5S 6W 7N 8E} 来表示，其中的英文字母 E、S、W、N 分别代表东、南、西、北 4 个走向。

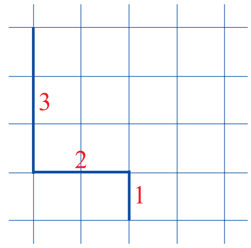
注意，边长是按照顺时针 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 的次序排列的。有意思的是，当我们把它平铺在平面上，然后把另一个相同的 8 边形旋转 180°，它们能够完全嵌合在一起。如果有多个这种 8 边形，那么它们的嵌合具有周期性的规律，最终可以形成一个相互嵌合的平面，如下图所示：



大家对这幅图是否有些眼熟呢？是不是很像婴幼儿喜欢玩儿的拼图游戏呢？不知道市场上是否有了这种图案的拼图，如果还没有的话，生产商就有新的拼图方案了，消费者也会有新的选择。

这是题外，下面我们接着来谈高立多边形。显然，对于所有的自然数 n，不是都能作出一个高立多边形。以 $n = 4$ 为例。我们不妨假定第 1 步是向上走，那么第 2 步就必须是向左或向右。我们假定它是向左。这时第 3 步必须向上或向下。如下图所示，无论向上还是向下，我们看到第 4 条线都无法回到初始点。





事实上，我们前面构造出的高立多边形是最简单的一个。我们自然会问，在什么条件下我们可以得到一个高立多边形呢？更一般地，在什么条件下至少存在一个高立多边形呢？首先，n 必须是偶数，因为这些折线必须在横向和纵向上交替进行。一个必要条件是，它的边长数（偶数）n 必须是下面方程组的解：

$$\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \cdots \pm (n-1) = 0,$$
$$\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm \cdots \pm n = 0.$$

这是因为第 1、3、5、…条边都同时是横向或同时是纵向；第 2、4、6、…条边都同时是纵向或同时是横向，而它们都必须回到原点。注意这里方程中的未知变量是加减号 ±。在上面 $n = 4$ 的例子中，这组方程变成了

$$\pm 1 \pm 3 = 0,$$
$$\pm 2 \pm 4 = 0.$$

显然，无论我们如何选择加号或减号，都不能使它们成立。同理，$n = 6$ 时它们也不可能成立。注意这个条件不是充分的，因为它包含了自相交和回头路的情况。如果禁止自相交，问题会更困难，因为我们还需要计算一个有特殊性质的自回避行走（self-avoiding walks）。

美国著名数学科普作家加德纳（Martin Gardner）给出了另一个必要条件：偶数 n 必须具有 $n = 8k$ 的形式，其中 k 是一个自然数。为什么呢？我们已经知道，n 必为偶数，还应注意到 $2 + 4 + 6 + \cdots + n$ 应为 4 的倍数，以便能够将它划分为两个偶数组的和。这是因为其中第一组偶数代表着向一个方向行走的方向，另一组偶数代表着向相反方向行走的方向。在上面 $n = 8$ 的例子中，2 和 8 在一组里，4 和 6 则在另一组里。下一步，我们通过偶数项的和来说明 n 必须被 8 整除或者余数为 6。据等差数列求和公式，可知 $2 + 4 + 6 + \cdots + n = (n/2)(n/2+1)$。注意，前面已经说过 $2 + 4 + 6 + \cdots + n$ 能被 4 整除，因此 $n/2 \equiv 0 \pmod 4$ 或 $(n/2+1) \equiv 0 \pmod 4$，即 $n/2 \equiv 0 \pmod 4$ 或 $n/2 \equiv 3 \pmod 4$，这意味着 $n \equiv 0 \pmod 8$ 或 $n \equiv 6 \pmod 8$。再来看奇数项的和 $1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1)$，它应为偶数，以便能够将它划分为两个奇数组的和。据等差数列求和公式，可知 $1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1) = (n/2)(n/2)$，因此 $n/2 \equiv 0 \pmod 2$，即 $n \equiv 0 \pmod 4$，这意味着 $n \equiv 0 \pmod 8$ 或 $n \equiv 4 \pmod 8$。综合以上结果，可知 $n \equiv 0 \pmod 8$，即 $n = 8k$。

显然，只要存在一个高立多边形，就至少存在 4 个，因为第 1 条边按东南西北 4 个方向出发就产生出 4 个高立多边形。它们是全等的。但是为了讨论方便，让我们暂时把它们算作 4 个不同的高立多边形。我们现在给出 n 边高立多边形的个数（记住，n 是 8 的倍数）。记下面两个多项式：

$$p_1(x) = \prod_{i=1,3,\ldots}^{n-1} (x^i + 1) = (x+1)(x^3+1)\cdots(x^{n-1}+1),$$

$$p_2(x) = \prod_{i=1}^{n/2} (x^i + 1) = (x+1)(x^2+1)\cdots(x^{n/2}+1).$$

记 $p_1(x)$ 的展开式中 $x^{n^2/8}$ 的系数为 k_1，$p_2(x)$ 的展开式中 $x^{n(n/2+1)/8}$ 的系数为 k_2。那么 n 边高立多边形的个数为 $k_1 \times k_2$（其中 $n = 8k$）。利用这个结果，我们可以得到下面的表格：

k	n 边高立多边形的个数 N	$N/4$
1	4	1
2	112	28
3	8432	2108
4	909228	227322
5	121106960	30276740
6	18167084064	4541771016
7	2956370702688	739092675672
8	510696155882492	127674038970623

这个结果是 Sloane 得到的。1991 年，Sallows 和 Vardi 等人得到了一个渐近公式[4]：

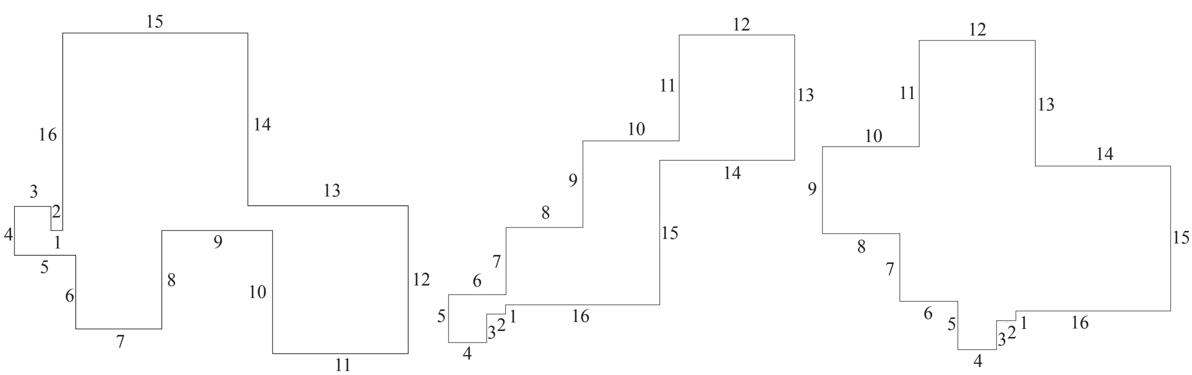
$$N(n) \sim \frac{3 \cdot 2^{8n-4}}{\pi n^2 (4n+1)}.$$

这是一条呈指数增长的曲线。注意这里居然出现了 π。回到 $n = 8$ 的例子，我们有，

$$\begin{aligned} p_1(x) &= (x+1)(x^3+1)(x^5+1)(x^7+1) \\ &= x^{16}+x^{15}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+2x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x+1, \\ p_2(x) &= (x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1) \\ &= x^{10}+x^9+x^8+2x^7+2x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+x+1. \end{aligned}$$

我们分别取 $p_1(x)$ 中 x^8 的系数 $k_1 = 2$ 和 $p_2(x)$ 中 x^5 的系数 $k_2 = 2$，得到 8 边高立多边形的个数为 4。因为这 4 个高立多边形是全等的，我们得出结论：8 边高立多边形在全等的意义下只有一个。

再看 $n = 16$ 的时候。我们知道，应该有 28 个不全等的高立多边形。下面是其中 3 个例子：

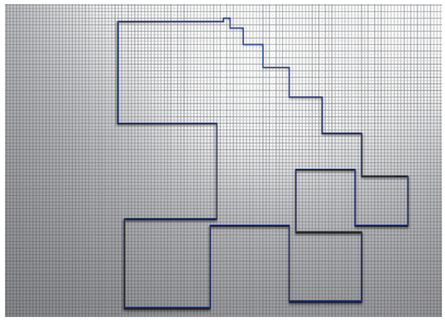


$n = 16$ 时的高立多边形（来源：Mauro Fiorentini）[5]

[4] Sallows, L.; Gardner, M.; Guy, R. K.; and Knuth, D. "Serial Isogons of 90 Degrees." *Math Mag*. 64, 315-324, 1991 和 Vardi, I. "American Science." §5.3 in *Computational Recreations in Mathematica*. Redwood City, CA: Addison-Wesley, pp. 90-96, 1991.

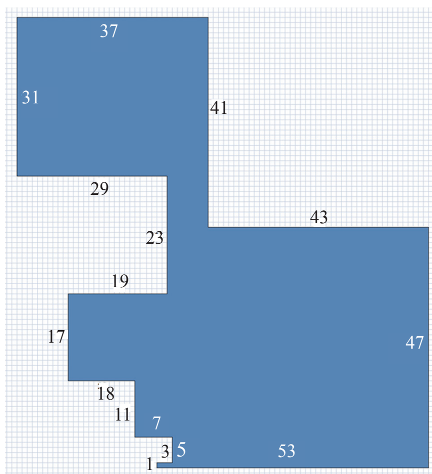
[5] Mauro Fiorentini, Goligoni (numero di), http://www.bitman.name/math/article/628.

Sallows 等人已经找到了全部 28 个。对于 $n=32$ 的情形，我们只给一个例子：



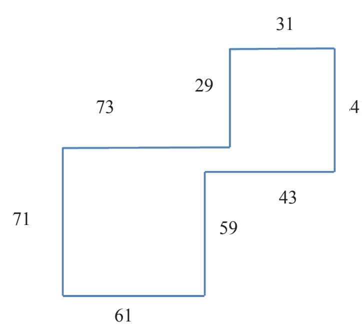
$n=32$ 时的高立多边形（来源：fdecomite）

高立多边形的边可以不是以自然数为序。如果一个高立多边形的边长为奇素数的话，我们称之为素数高立多边形。这也是《科学美国人》里就已提到的。如果允许以 1 开始，我们可以得到下面的高立多边形 {1N 3E 5N 7W 11N 13W 17N 19E 23N 29W 31N 37E 41S 43E 47S 53W}[6]：



（几乎）素数高立多边形

注意，从第 2 位的 3 到第 16 位的 53 是连续素数。可以验证，{1N 3E 5S 7W 11S 13W 17N 19E 23N 29W 31S 37E 41S 43E 47N 53W} 也可以构成一个高立多边形。不过，这两个例子都有一个缺点：它们都以 1 开始，因而不是真正的素数高立多边形。右面是一个不以 1 开始的真正的素数高立多边形 {29N 31E 41S 43W 59S 61W 71N 73E}：



真正的素数高立多边形

[6] Harry J. Smith, Golygon Letter to Mr. A. K. Dewdney, http://www.reocities.com/hjsmithh/Golygons/GolygonL.html.