2017～2018学年度第一学期期中六校联考

高三数学（文）试卷

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分．第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷2至4页．

祝各位考生考试顺利！

第Ⅰ卷

一、选择题：（本大题共8个小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

（1）已知$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个非零向量，且$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$，则下列说法正确的是（　　）．

（A）$\vec{a}+\vec{b}=0$　　　　（B）$\vec{a}=\vec{b}$

（C）$\vec{a}$与$\vec{b}$反向　　　　（D）$\vec{a}$与$\vec{b}$同向

（2）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$2a_6=a_8+6$，则S_7的值是（　　）．

（A）49　　　　（B）42

（C）35　　　　（D）24

（3）已知向量$\vec{a}=(1，2)$，$\vec{b}=(-3，-3)$，$\vec{c}=(x，3)$，若$(2\vec{a}+\vec{b})\parallel\vec{c}$，则$x=$（　　）．

（A）–1　　　　（B）–2

（C）–3　　　　（D）–4

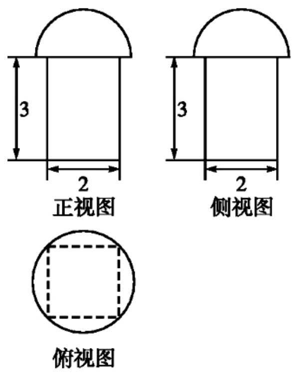
（4）已知一个几何体的三视图如图所示，根据图中数据，可得该几何体的体积为（　　）．

（A）$12+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

（B）$12+\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

（C）$8+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\pi$

（D）$8+\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$



（5）若过点$A(a，a)$可作圆$x^2+y^2-2ax+a^2+2a-3=0$的两条切线，则实数a的取值范围是（　　）．

（A）$(-\infty，-3)$　　　　（B）$(-3，1)$

（C）$(-\infty，-3)\cup(1，\dfrac{3}{2})$　　　　（D）$(-\infty，-3)\cup(1，+\infty)$

（6）设点 $A(-2,3)$，$B(3,2)$，若直线 $ax+y+2=0$ 与线段 AB 没有交点，则 a 的取值范围是（　　）.

（A）$(-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$　　（B）$(-\frac{4}{3},\frac{5}{2})$

（C）$(-\infty,-\frac{4}{3}]\cup[\frac{5}{2},+\infty)$　　（D）$[-\frac{5}{2},\frac{4}{3}]$

（7）在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90^\circ$，点 D，F 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，$BC=CA=CC_1$，则 BD 与 AF 所成角的余弦值是（　　）.

（A）$\dfrac{\sqrt{30}}{15}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{15}}{10}$　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$

（8）已知圆 C_1：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$，圆 C_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=9$，M，N 分别是圆 C_1，C_2 上的动点，P 为 x 轴上的动点，则 $|PM|+|PN|$ 的最小值为（　　）.

（A）$5\sqrt{2}-4$　　（B）$\sqrt{17}-1$　　（C）$6-2\sqrt{2}$　　（D）$\sqrt{17}$

第Ⅱ卷

二、填空题：（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分．请将答案填在答题卡上）

（9）直线 l 经过 l_1：$x-y+1=0$ 与 l_2：$4x-3y+1=0$ 的交点，且与 l_1 垂直，则直线 l 的方程为__________.

（10）若数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}$，则 $a_6=$__________.

（11）圆 C 的圆心在 x 轴上，与直线 $x+y-5=0$ 相切于点 P（3，2），则圆 C 的方程为__________.

（12）已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 120°，且 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{AC}|=2$．若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$，则实数 λ 的值为________.

（13）设集合 $A=\{(x,y)|\dfrac{3-y}{x-1}+2=0\}$，$B=\{(x,y)|4x+ay-16=0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则 a 的值为__________.

（14）已知 $x\in\mathrm{R}$，且 $\sqrt{1-x^2}-xk-2k=0$，则 k 的最大值是__________.

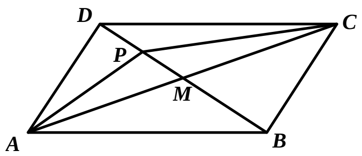
三、解答题：（本大题共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

（15）（本小题满分 13 分）

如图，平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 M，点 P 是 MD 的中点．若 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=1$，且 $\angle BAD=60^\circ$

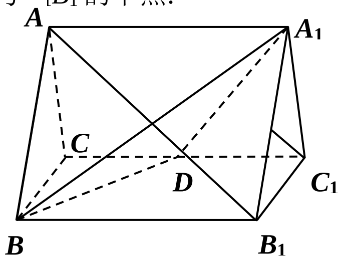
（Ⅰ）求 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的值；

（Ⅱ）若 $\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\dfrac{25}{12}$，求 λ 的值.



（16）（本小题满分 13 分）

如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都相等，D 为 CC_1 中点，E 为 A_1B_1 的中点.



（Ⅰ）求证：C_1E∥平面 A_1BD；

（Ⅱ）求证：$AB_1\perp$平面 A_1BD.

（17）（本小题满分 13 分）

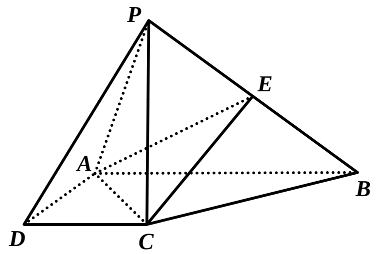
已知数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，其前 n 项和为 S_n，满足 $S_5-2a_2=25$，且 a_1，a_4，a_{13} 成等比数列.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设 T_n 是数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 n 项和，证明：$T_n<\dfrac{1}{6}$.

（18）（本小题满分 13 分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$PC\perp$底面 $ABCD$，$ABCD$ 是直角梯形，$AB\perp AD$，AB∥CD，$PC=AB=2AD=2CD=2$，E 是 PB 的中点.



（Ⅰ）求证：平面 $EAC\perp$平面 PBC；

（Ⅱ）求二面角 $P\text{-}AC\text{-}E$ 的余弦值；

（Ⅲ）求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.

（19）（本小题满分 14 分）

已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}^2-a_{n+1}a_n-2a_n^2=0$（$n\in\mathbf{N}^*$），且 a_3+2 是 a_2，a_4 的等差中项.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n；

（Ⅱ）若 $b_n=a_n\log_{\frac{1}{2}}a_n$，$S_n=b_1+b_2+\dots+b_n$，求使 $S_n+n\,2^{n+1}>50$ 成立的正整数 n 的最小值.

（20）（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 M 在直线 $y+1=0$ 上截得线段长为 $2\sqrt{2}$，在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求圆心 M 的轨迹方程；

（Ⅱ）若点 M 在直线 l：$x–y–1=0$ 的上方，且到 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，求圆 M 的方程；

（Ⅲ）设圆 M 与 x 轴交于 P，Q 两点，E 是圆 M 上异于 P，Q 的任意一点，过点 $A(3\sqrt{3}，0)$ 且与 x 轴垂直的直线为 l_1，直线 PE 交直线 l_1 于点 P'，直线 QE 交直线 l_1 于点 Q'．求证：以 $P'Q'$为直径的圆 C 总经过定点，并求出定点坐标．

参考答案

一、选择题：

题 号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）
答 案	D	B	C	A	C	B	D	A

二、填空题：

（9）$x+y-5=0$；　　（10）$\dfrac{1}{6}$；　　（11）$(x-1)^2+y^2=8$；

（12）$\dfrac{7}{12}$；　　（13）-2 或 4；　　（14）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题：（其他正确解法请比照给分）

（15）解：（Ⅰ）设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b},$ ……2 分

$\overrightarrow{CP}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{4}\vec{b}$ ……4 分

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=-\dfrac{25}{16}$ ……7 分

（Ⅱ）$\overrightarrow{AQ}=\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ……9 分

由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\dfrac{7}{4}+\lambda=\dfrac{25}{12}$，得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ ……13 分

（16）解：（Ⅰ）设 AB_1 与 A_1B 交于点 O，连接 OD，依题意知 O 为 AB_1 中点，

$OE\underline{\underline{//}}\dfrac{1}{2}B_1B$，$DC_1\underline{\underline{//}}\dfrac{1}{2}B_1B$，

所以四边形 OEC_1D 为平行四边形， ……3 分

所以 $C_1E\ //\ OD$，

$C_1E\not\subset$ 平面 A_1BD，$OD\subset$ 平面 A_1BD，$\therefore C_1E\ //$ 平面 A_1BD ……6 分

（Ⅱ）正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$C_1E\perp A_1B_1$，所以，$C_1E\perp$ 平面 A_1B_1BA，

由（Ⅰ）$C_1E\ //\ OD$，所以 $OD\perp$ 平面 A_1B_1BA，

所以 $OD\perp AB_1$ ……10 分

四边形 ABB_1A_1 为正方形，$AB_1\perp A_1B$，又 $OD\cap A_1B=O$,

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BD. ……13 分

（17）解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$，

$\therefore \begin{cases} \left(5a_1+\dfrac{5\times 4}{2}d\right)-2\left(a_1+d\right)=25, \\ \left(a_1+3d\right)^2=a_1\left(a_1+12d\right), \end{cases}$ ……3 分

解得 $a_1=3$，$d=2$，$\therefore a_n=2n+1$. ……6 分

（Ⅱ）$\because \dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$， ……8 分

$\therefore T_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)<\dfrac{1}{6}$ ……13 分

（18）解：（Ⅰ）$\because PC\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，$\therefore AC\perp PC$. …………1 分

$\because AB=2$，$AD=CD=1$，$\therefore AC=BC=\sqrt{2}$.

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore AC\perp BC$. …………2 分

又 $BC\cap PC=C$，$\therefore AC\perp$平面 PBC. …………3 分

$\because AC\subset$平面 EAC，

$\therefore$平面 $EAC\perp$平面 PBC. …………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $AC\perp$平面 PBC，

$\therefore AC\perp CP$，$AC\perp CE$，

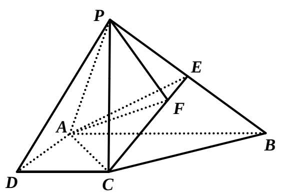
$\therefore \angle PCE$ 即为二面角 $P\text{-}AC\text{-}E$ 的平面角. …………6 分

$\because PC=AB=2AD=2CD=2$，

$\therefore$在$\triangle PCB$ 中，可得 $PE=CE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore \cos\angle PCE=\dfrac{CP^2+CE^2-PE^2}{2CP\cdot CE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………9 分

（Ⅲ）作 $PF\perp CE$，F 为垂足.



由（Ⅰ）知平面 $EAC\perp$平面 PBC，

$\because$平面 $EAC\cap$平面 $PBC=CE$，

$\therefore PF\perp$平面 EAC，连接 AF，

则$\angle PAF$ 就是直线 PA 与平面 EAC 所成角. …………11 分

由（Ⅱ）知 $CE=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\therefore PF=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \sin\angle PAF=\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

即直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$．　　　…………13 分

（19）解：（Ⅰ）$\because a_{n+1}^2-a_{n+1}a_n-2a_n^2=0$，$\therefore (a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$，　　　…………2 分

$\because$数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$\therefore a_{n+1}+a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-2a_n=0$，

即 $a_{n+1}=2a_n$（$n\in N^*$），$\therefore$数列$\{a_n\}$是以 2 为公比的等比数列．……4 分

$\because a_3+2$ 是 a_2，a_4 的等差中项，$\therefore a_2+a_4=2a_3+4$

$\therefore 2a_1+8a_1=8a_1+4$，　$\therefore a_1=2$，　　　…………6 分

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n$．　　　…………7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）及 $b_n=a_n\log_{\frac{1}{2}}a_n$，得 $b_n=-n\cdot 2^n$，

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=-2-2\cdot 2^2-3\cdot 2^3-4\cdot 2^4-\cdots-n\cdot 2^n$　①

$\therefore 2S_n=-2^2-2\cdot 2^3-3\cdot 2^4-\cdots-(n-1)\cdot 2^n-n\cdot 2^{n+1}$　②

②–①得，$S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$　　　…………12 分

要使 $S_n+n\cdot 2^{n+1}>50$ 成立，只需 $2^{n+1}-2>50$ 成立，即 $2^{n+1}>52$，$n\geqslant 5$，

$\therefore S_n+n\cdot 2^{n+1}>50$ 成立的正整数 n 的最小值为 5．　　　…………14 分

（20）解：（Ⅰ）设 $M(x,y)$，圆 M 的半径为 r．

由题设$(y+1)^2+2=r^2$，$x^2+3=r^2$．　　　…………2 分

从而$(y+1)^2+2=x^2+3$．

故点 M 的轨迹方程为$(y+1)^2-x^2=1$．　　　…………3 分

（Ⅱ）设 $M(x_0,y_0)$．由已知得 $\dfrac{y_0-x_0+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $y_0=x_0$．　　　…………5 分

又因为$(y_0+1)^2-x_0^2=1$．从而得 $y_0=x_0=0$．

此时，圆 M 的半径 $r=\sqrt{3}$．　　　…………6 分

故圆 M 的方程为 $x^2+y^2=3$．　　　…………7 分

（III）对于圆方程 $x^2+y^2=3$，

令 $y=0$，得 $x=\pm\sqrt{3}$，故可令 $P(-\sqrt{3}, 0)$，$Q(\sqrt{3}, 0)$. …………8 分

又直线 l_1 过点 A 且与 x 轴垂直，∴直线 l_1 的方程为 $x=3\sqrt{3}$，

设 $E(s, t)$，则直线 PE 的方程为 $y=\dfrac{t}{s+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})$. …………9 分

解方程组 $\begin{cases} x=3\sqrt{3}, \\ y=\dfrac{t}{s+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3}), \end{cases}$ 得 $P'\left(3\sqrt{3}, \dfrac{4\sqrt{3}t}{s+\sqrt{3}}\right)$. …………10 分

同理可得，$Q'\left(3\sqrt{3}, \dfrac{2\sqrt{3}t}{s-\sqrt{3}}\right)$， …………11 分

∴以 $P'Q'$ 为直径的圆 C 的方程为

$(x-3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+\left(y-\dfrac{4\sqrt{3}t}{s+\sqrt{3}}\right)\left(y-\dfrac{2\sqrt{3}t}{s-\sqrt{3}}\right)=0$， ………12 分

又 $s^2+t^2=3$，

∴整理得 $(x^2+y^2-6\sqrt{3}x+3)+\dfrac{6\sqrt{3}s-6}{t}y=0$， …………13 分

若圆 C 经过定点，只需令 $y=0$，

从而有 $x^2-6\sqrt{3}x+3=0$，解得 $x=3\sqrt{3}\pm2\sqrt{6}$，

∴圆 C 总经过定点，坐标为 $(3\sqrt{3}\pm2\sqrt{6}, 0)$. …………14 分