2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题及答案

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛,则 ( )

(A) $a<1$ 且 $b>1$. (B) $a>1$ 且 $b>1$.

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$. (D) $a>1$ 且 $a+b>1$.

【答案】(C)

【解析】排除法.根据被积函数特点，取 $a=0$，$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^b}=\frac{1}{1-b}(1+x)^{1-b}\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{1-b}[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+x)^{b-1}}-1]$ 收敛，只需保证 $b>1$ 即可.说明，$a<1$ 可以使原广义积分收敛，排除 B 和 D.

再取 $a=-1,b=2$，$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(1+x)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)-1dx}{(1+x)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x}-\int_0^{+\infty}\frac{1dx}{(1+x)^2}$

$=\ln(1+x)\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}=+\infty$，发散，说明满足 A 的条件，但是原广义积分发散，排除 A.

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\ge 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\ge 1.\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\ge 1.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1.\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1.\end{cases}$

【答案】(D)

【解析】当 $x<1$ 时，$F(x)=\int 2(x-1)dx=x^2-2x+C_1$；

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=\int\ln xdx=x\ln x-x+C_2$；且 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2-2x+C_1)=-1+C_1$，

$\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x\ln x-x+C_2)=-1+C_2$. 由 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=F(1)$ 可知：$C_1=C_2$.

取 $C_1=C_2=C$，其原函数为 $F(x)=\begin{cases} x^2-2x+C, x<1 \\ x\ln x-x+C, x\ge 1\end{cases}$. 当 $C=1$ 时，对应的原函数为 D.

(3) 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$ （ ）

(A) $3x(1+x^2)$.　(B) $-3x(1+x^2)$.　(C) $\dfrac{x}{1+x^2}$.　(D) $-\dfrac{x}{1+x^2}$.

【答案】(A)

【解析】因为 $y_1(x)=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$ 和 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 为 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，那么，$y_2(x)-y_1(x)=2\sqrt{1+x^2}$ 为 $y'+p(x)y=0$ 的解. 代入该齐次方程可得

$\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)\cdot 2\sqrt{1+x^2}=0$，故，$p(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$. 再将 $y_2(x)=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 代入原方程可得

$4x(1+x^2)+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{1+x^2}[(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}]=q(x)$，所以，$q(x)=3x(1+x^2)$，选择 A.

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0, \\ \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots, \end{cases}$ 则 （ ）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.　(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【答案】(D)

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，可得，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续. 又因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-0}{x-0}=1$，

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{n}}{x-0}$，而 $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$，有 $n\le\dfrac{1}{x}<n+1$，当 $x\to 0^+$ 时，$n\to\infty$，

可得 $1\le\dfrac{1}{nx}<\dfrac{n+1}{n}\to 1(x\to 0^+)$，那么 $f'_+(0)=1$. 所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 点可导. 选择 D.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是 ( )

(A) A^T 与 B^T 相似.　　(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似..

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似.　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似.

【答案】(C)

【解析】A 与 B 相似，即存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则

$B^T=\left(P^{-1}AP\right)^T=P^TA^T\left(P^{-1}\right)^T=P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}=\left(\left(P^T\right)^{-1}\right)^{-1}A^T\left(P^T\right)^{-1}$，即（A）是正确说法；

$B^{-1}=\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，进一步有

$B+B^{-1}=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}\left(A+A^{-1}\right)P$，即（B）（D）都是正确说法；

故选（C）.

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 ( )

(A) 单叶双曲面.　　(B) 双叶双曲面.

(C) 椭球面.　　(D)柱面.

【答案】(B)

【解析】二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，由

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=\left(\lambda-5\right)\left(\lambda+1\right)^2=0$$

得，A 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$，所以经过正交变换后，$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=5y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}-y_3^{\ 2}$，

于是 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2$ 表示曲面 $5y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}-y_3^{\ 2}=2$，是双叶双曲面. 故选（B）.

(7) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)\ (\sigma>0)$，记 $p=P\left\{X\le\mu+\sigma^2\right\}$，则 ( )

(A) p 随着 μ 的增加而增加.　　(B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少.　　　　(D) p 随着 σ 的增加而减少.

【答案】B

【解析】

$$P\{X \le \mu+\sigma^2\} = \Phi(\frac{\mu+\sigma^2-\mu}{\sigma}) = \Phi(\sigma)$$

由于正态分布的分布函数是单调递增的，所以 $P\{X \le \mu+\sigma^2\}$ 随着 σ 的增加而增加.

(8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为　　（　）

(A) $-\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

【答案】(A)

【解析】**方法一：**

(X,Y) 的概率分布为

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

$E(X)=E(Y)=\frac{2}{3}$，　$E(XY)=\frac{2}{9}$，所以 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-\frac{2}{9}$

$E(X^2)=E(Y^2)=\frac{8}{9}$　，$D(X)=D(Y)=\frac{4}{9}$

所以相关系数 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=-\frac{1}{2}$.

方法二：

设 Z 表示 2 次试验中结果 A_3 发生的次数，则 $X+Y+Z=2$。

根据方差的性质有 $D(Y)=D(2-X-Z)=D(X+Z)=D(X)+D(Z)+2Cov(X,Z)$，注意到 $D(Y)=D(X)=D(Z), Cov(X,Z)=Cov(X,Y)$，从而 $D(X)=-2Cov(X,Y)$。所以根据相关系数的定义有 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}}=-\dfrac{1}{2}$。

二、填空题：9～14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln\left(1+t\sin t\right)dt}{1-\cos x^2}=$______.

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

(10) 向量场 $A\left(x,y,z\right)=\left(x+y+z\right)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $rot\boldsymbol{A}=$______.

【答案】$(0,1,y-1)$

【解析】 $$rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+y+z & xy & z\end{vmatrix}=(0,1,y-1)$$

(11) 设函数 $f\left(u,v\right)$ 可微，$z=z\left(x,y\right)$ 由方程 $\left(x+1\right)z-y^2=x^2f\left(x-z,y\right)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$______.

【答案】$-dx+2dy$

【解析】将 $x=0, y=1$ 代入 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 得 $z=1$.

$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边对 x 求偏导得：

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2f_1'\cdot(1-\frac{\partial z}{\partial x})$$

将 $x=0, y=1$，$z=1$ 代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=-1$.

$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边对 y 求偏导得：

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial y}-2y=x^2(f_1'\cdot(-\frac{\partial z}{\partial y})+f_2')$$

将 $x=0, y=1$，$z=1$ 代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,1)}=2$，所以 $dz\Big|_{(0,1)}=-dx+2dy$.

（12）设函数 $f\left(x\right)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''\left(0\right)=1$，则 $a=$______.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】由已知得 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$，$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2ax(3-ax^2)}{(1+ax^2)^3}$，

所以 $f'''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)-f''(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}+\frac{2ax(3-ax^2)}{(1+ax^2)^3}}{x}=-2+6a$，

即 $-2+6a=1$，所以 $a=\frac{1}{2}$.

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$______.

【答案】$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$

$+2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda+1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 4+3\lambda+2\lambda^2+(\lambda+1)\lambda^3$

$= \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$.

(14) 设 $x_1, x_2, ..., x_n$ 为来自总体 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为0.95的双侧置信区间的置信上限为10.8，则 μ 的置信度为0.95的双侧置信区间为______.

【答案】(8.2,10.8)

【解析】μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\overline{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\quad \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{x}-a, \overline{x}+a)$

已知 $\overline{x}=9.5$，置信上限是 10.8 即 $\overline{x}+a=10.8$

解得 $a=1.3$，所以置信区间为 $(9.5-1.3, 9.5+1.3)$，即（8.2,10.8）.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle| 2\le r\le 2(1+\cos\theta), -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$, 计算二重积分 $\iint\limits_D x\,dxdy$.

【解析】

二重积分为

敛。

$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D x dx dy \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta dr \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1+\cos\theta)^3 - 1\right] \cos\theta d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta\right] \cos\theta d\theta \\
&= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta + 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta + \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
&= 16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 16\cdot\frac{2}{3} + \frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= 5\pi + \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$，其中 $0 < k < 1$.

（I）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛；

（II）若 $y(0)=1, y'(0)=1$,求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值.

【解析】(I) 证明：原方程对应的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$，则 $\Delta = 2^2 - 4k = 4(1-k) > 0$，即方程有两个不同的实根，从而由根与系数的关系可得 $\lambda_1 + \lambda_2 = -2, \lambda_1\lambda_2 = k$，再由 $0 < k < 1$ 得 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$，且原方程的通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$，则 $\int_0^{+\infty} y(x)dx = \int_0^{+\infty}\left(C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}\right)dx = \left(\frac{C_1}{\lambda_1}e^{\lambda_1 x} + \frac{C_2}{\lambda_2}e^{\lambda_2 x}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = -\left(\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2}\right)$，即 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛。

（II）有 $y(0)=1, y'(0)=1$ 及 $y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ 可得 $\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1\lambda_1+C_2\lambda_2=1 \end{cases}$

对 $C_1+C_2=1$ 两端分别同除以 λ_1,λ_2 可得 $\dfrac{C_1}{\lambda_1}+\dfrac{C_2}{\lambda_1}=\dfrac{1}{\lambda_1}$ ①

$\dfrac{C_1}{\lambda_2}+\dfrac{C_2}{\lambda_2}=\dfrac{1}{\lambda_2}$ ②

则①+②=$\dfrac{C_1}{\lambda_1}+\dfrac{C_2}{\lambda_2}+\dfrac{C_2}{\lambda_1}+\dfrac{C_1}{\lambda_2}=\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}$，则

$\dfrac{C_1}{\lambda_1}+\dfrac{C_2}{\lambda_2}=\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}-\dfrac{C_2}{\lambda_1}-\dfrac{C_1}{\lambda_2}=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}-\dfrac{C_1\lambda_1+C_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}=\dfrac{-2}{k}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{-3}{k}$，从而

$$\int_0^{+\infty} y(x)dx=-\left(\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}\right)=-\left(\frac{-3}{k}\right)=\frac{3}{k}$$

(17)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

【解析】因 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，则 $f(x,y)=xe^{2x-y}+\varphi(y)$

又有 $f(0,y)=y+1$，则 $\varphi(y)=y+1$，$f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$，

又 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$，则 $I(t)$ 与路径无关，即 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$ 是 $f(x,y)$ 的全微分，则

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=\int_{L_t}d(f(x,y))=f(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}$$

$$= f(1,t) - f(0,0) = e^{2-t} + t$$

$I'(t) = 1 - e^{2-t}$，令$I'(t) = 0, \Rightarrow t = 2$。

当$t > 2$时，$I'(t) > 0$，$I(t)$是递增的；

当$t < 2$时，$I'(t) < 0$，$I(t)$是递减的；

故$I(t)$在$t = 2$时取得最小值，故$I(t)_{\min} = I(2) = 3$

(18)（本题满分 10 分）

设有界区域Ω由平面$2x + y + 2z = 2$与三个坐标平面围成，Σ为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分$I = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdxdy$.

【解析】$I = \iint\limits_{\Sigma} \left(x^2 + 1\right)dydz - 2ydzdx + 3zdxdy$

$$= \iiint\limits_{\Omega} (2x+1)dv \therefore I = \int_0^1 \left(2x+1\right)dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz \quad = \int_0^1 \left(2x+1\right)dx \int_0^{2-2x} \left(1 - x - \frac{y}{2}\right)dy = \frac{1}{2}$$

(19)（本题满分 10 分）

已知函数$f(x)$可导，且$f(0) = 1, 0 < f'(x) < \dfrac{1}{2}$. 设数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1} = f(x_n)(n = 1, 2\ldots)$证明：

(I)级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x_{n+1} - x_n\right)$绝对收敛；

(II)$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，且$0 < \lim\limits_{n\to\infty} x_n < 2$.

【解析】(I)已知函数$f(x)$可导，数列满足$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$，

在x_n和x_{n-1} $(n = 2, 3, \cdots)$构成的区间上使用拉格朗日中值定理，得

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\text{，（}\xi_n\text{介于}x_n\text{和}x_{n-1}\text{之间）}$$

由$0 < f'(x) < \dfrac{1}{2}$，得

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|f(x_n) - f(x_{n-1})\right| = \left|f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\right| < \frac{1}{2}\left|x_n - x_{n-1}\right| < \frac{1}{2^{n-1}}\left|x_2 - x_1\right|,$$

即 $\left|u_n\right|=\left|x_{n+1}-x_n\right|<\dfrac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|$，又正项级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}\left|x_2-x_1\right|=\left|x_2-x_1\right|\cdot\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$收敛，

由比较审敛法和绝对收敛的定义，得级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛.

(II)由(I)中的推导可知，$x_{n+1}-x_n=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$，且$0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，

故$x_{n+1}-x_n$与x_n-x_{n-1} $(n=2,3,\cdots)$同号，不妨设$x_2-x_1>0$，

此时级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_{n+1}-x_n)$为一个收敛的正项级数，设$S_{n-1}=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)$，则

$$S_{n-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)=x_n-x_1,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}+x_1$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

由拉格朗日定理得，$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$（ξ介于0和x之间）

即$x_{n+1}=f(x_n)=f(0)+f'(\xi)x_n=1+f'(\xi)x_n$，两边同时取极限得，

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}[1+f'(\xi)x_n]$，即$A=1+f'(\xi)A$，解得$A=\dfrac{1}{1-f'(\xi)}$，

且$0<f'(\xi)<\dfrac{1}{2}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\in(0,2)$

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$.

当a为何值时，方程$AX=B$无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求此方程.

【解析】$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&-a+1&0\end{array}\right)$

(1) $a\neq-2$ 且 $a\neq1$, 则方程有唯一解. 此时

$$(A,B)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{array}\right)$$

所以

$$X=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$$

(2) $a=-2$ 时,

$$(A,B)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{array}\right)$$

$r(A)=2,r(A,B)=3$, 方程 $AX=B$ 无解.

(3) $a=1$ 时

$$(A,B)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

方程 $AX=B$ 的解为 $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-k_1 & -1-k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$, 其中 k_1,k_2 为任意常数.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I)求 A^{99}

(II)设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

【解析】(I) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2).$

所以得 A 的特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$$

其对应的特征向量分别为

$\xi_1=\left(1,1,0\right)^T,\xi_2=\left(1,2,0\right)^T\ \xi_1=\left(3,2,2\right)^T$

令 $P=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

有 $P^{-1}AP=\Lambda$, 易知 $P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

所以$A=P\Lambda P^{-1}$，

$$A^{99}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-2^{99}&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(II) $B^2=BA\Rightarrow B^3=BBA=B^2A=BAA=BA^2$，$B^4==B^2A^2=BAA^2=BA^3$ 依次类推得

$B^{100}=BA^{99}$，所以有$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)A^{99}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$

从而有

$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$

$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$

$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$

(22)（本题满分 11 分）

设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y,\\0, & X>Y.\end{cases}$$

(I)写出(X,Y)的概率密度；

(II)问U与X是否相互独立？并说明理由；

(III)求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

【解析】(I)由于区域D的面积

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\\ \quad 0,其他\end{cases};$$

(II)U与X不独立.因为

$$P\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\}=P\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\}$$

$$=3\int_0^{\frac{1}{2}}(x-x^2)dx=3(\frac{1}{8}-\frac{1}{24})=\frac{1}{4},$$

而$P\{U\le\frac{1}{2}\}=P\{X>Y\}=\frac{1}{2}$,

$$P\{X\le\frac{1}{2}\}=3\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{x}-x^2)dx=3[\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3]$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8},$$

从而$P\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\}\ne P\{U\le\frac{1}{2}\}P\{X\le\frac{1}{2}\}$，$U$与$X$不独立.

(III)Z的分布函数

$$F_Z(z)=P\{U+X\le z\}=P\{U+X\le z,X>Y\}+P\{U+X\le z,X\le Y\}$$

$$=P\{X\le z,X>Y\}+P\{X\le z-1,X\le Y\},$$

当$z<0$时，$P\{X\le z,X>Y\}=0=P\{X\le z-1,X\le Y\}$，$F_Z(z)=0$；

当$0\le z<1$时，$P\{X\le z-1,X\le Y\}=0$，而

$$P\{X\le z,X>Y\}=3\int_0^z(x-x^2)dx=\frac{3}{2}z^2-z^3，\quad F_Z(z)=\frac{3}{2}z^2-z^3；$$

当$1 \le z < 2$时，$P\{X \le z, X > Y\} = P\{X > Y\} = \frac{1}{2}$，而

$$P\{X \le z-1, X \le Y\} = 3\int_0^{z-1}(\sqrt{x}-x)dx = 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2,$$

此时，$F_Z(z) = \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2$；

当$z \ge 2$时，$P\{X \le z, X > Y\} = \frac{1}{2} = P\{X \le z-1, X \le Y\}$，$F_Z(z) = 1$.

总之，Z 的分布函数

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, 1 \le z < 2 \\ 1, z \ge 2 \end{cases}.$$

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3}, 0 < x < \theta, \\ 0, \quad 其他, \end{cases}$其中$\theta \in (0,+\infty)$为未知参数，$X_1, X_2, X_3$为来自总体$X$的简单随机样本，令$T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I)求T的概率密度；

(II)确定a，使得aT为θ的无偏估计.

【解析】

(I) X 的分布函数为$F_X(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$

当$x \le 0$时，$F_X(x) = 0$

当$0 < x < \theta$时，$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_0^x \frac{3u^2}{\theta^3}du = \frac{x^3}{\theta^3}$

当$x \ge \theta$时，$F_X(x) = 1$

所以 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^3}{\theta^3}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$

设 T 的分布函数为 $F_T(t)$

则 $F_T(t)=P\{T\le t\}=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}=P\{X_1\le t\}\cdot P\{X_2\le t\}\cdot P\{X_3\le t\}=F_X{}^3(t)$

所以 T 的概率密度为

$$f_T(t)=\frac{d}{dt}F^3(t)=3F_X{}^2(t)\cdot f(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(II)因为 aT 是 θ 的无偏估计，所以 $E(aT)=\theta$.

$$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf_T(t)dt=\int_0^\theta\frac{9t^9}{\theta^9}dt=\frac{9}{10}\theta,$$

$E(aT)=\dfrac{9}{10}a\theta=\theta$ 可得 $a=\dfrac{10}{9}$.