2019 年北京市朝阳区高三期末数学（理科）逐题解析

一、选择题（共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\,|\,1\le x\le 3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$,则 $A\cup B=$

（A）$\{2\}$　　（B）$\{2,3\}$

（C）$\{2,3,4,5\}$　　（D）$\{1,2,3,4,5\}$

【答案】D

【解析】本题考查集合运算.

由题意可得 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$,

$\therefore A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$,故选 D.

2. 设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$,则 $|z|=$

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】本题考查复数.

$\because (1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$,

$\therefore z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}=\dfrac{2\mathrm{i}-2}{2}=-1+\mathrm{i}$,

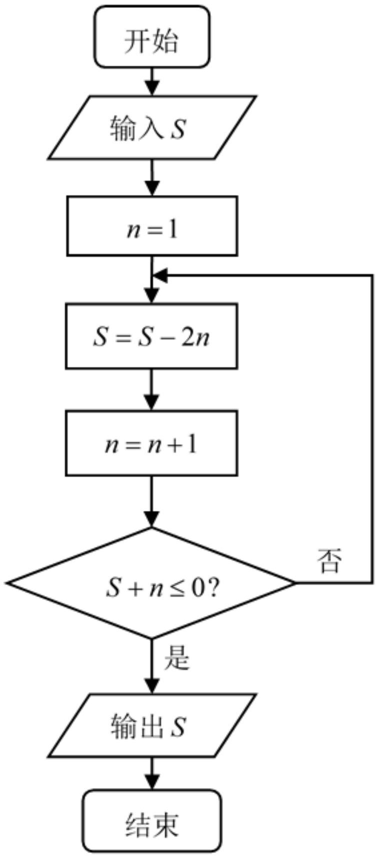
$\therefore |z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,故选 B.

3. 执行如图所示的程序框图,若输入的 $S=12$,则输出的 $S=$

（A）-8　　（B）-18　　（C）5　　（D）6

【答案】A

【解析】本题考查程序流程图.



$S=12\to n=1\to S=12-2\times1=10$

$\to n=1+1=2\to 10+2=12\le 0$,不成立,继续下一轮,

$S=10-2\times2=6\to n=2+1=3\to 6+3=9\le 0$,不成立,继续下一轮,

$S=6-2\times3=0\to n=3+1=4\to 0+4=4\le 0$,不成立,继续下一轮,

$S=0-2\times4=-8\to n=4+1=5$

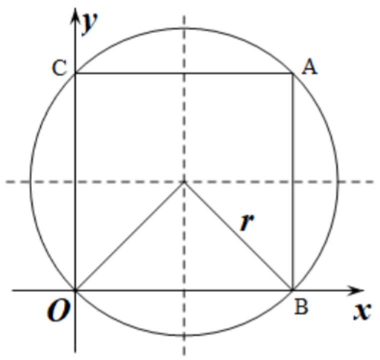
$\to -8+5=-3\le 0$,成立,输出 $S=-8$,故选 A.

4. 在平面直角坐标系 xOy 中,过 $A(4,4),B(4,0),C(0,4)$ 三点的圆被 x 轴截得的弦长为

（A）4　　（B）$4\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】本题考查圆的弦长问题.



$\because A,B,C$ 三点在圆上,连接 AC,AB,分别做弦 AC,AB 的垂直平分线交于一点,即该交点为圆心,圆心坐标为 $(2,2)$,半径为 $2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$,

$\therefore$ 圆过原点,

$\therefore OB$为圆被x轴截得的弦,故选 A.

5. 将函数$y=\sin 2x$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位后,图象经过点$(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$,则$\varphi$的最小值为

（A）$\frac{\pi}{12}$ （B）$\frac{\pi}{6}$ （C）$\frac{\pi}{3}$ （D）$\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】本题考查三角函数图象变换.

函数$y=\sin 2x$向右平移φ个单位后得函数解析式为$y=\sin(2x-2\varphi)$

当$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$时,$2x-2\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$或$2x-2\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$

$\therefore$当$x=\frac{\pi}{3}$时,$\varphi=\frac{\pi}{6}-k\pi$或$\varphi=-k\pi(k\in\mathbf{Z})$

$\because \varphi>0,\therefore \varphi_{\min}=\frac{\pi}{6}$,故选 B

6. 设x为实数,则“$x<0$”是“$x+\frac{1}{x}\le -2$”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】本题考查充分必要条件与基本不等式.

必要性:

$\because x<0,\therefore -x>0,\therefore -x+(-\frac{1}{x})\ge 2$,当且仅当$x=-1$时等号成立

$\therefore x+\frac{1}{x}\le -2$,必要性成立;

充分性:

$\because x+\dfrac{1}{x}\le -2$,$\therefore \dfrac{x^2+2x+1}{x}\le 0$ $\therefore \dfrac{(x+1)^2}{x}\le 0$

解得 $x<0$,充分性成立,

因此,“$x<0$”是“$x+\dfrac{1}{x}\le -2$”的充分必要条件,故选 C

7. 对任意实数 x,都有 $\log_a(e^x+3)\ge 1(a>0$ 且 $a\ne 1)$,则实数 a 的取值范围是

（A）$(0,\dfrac{1}{3})$　（B）$(1,3]$　（C）$(1,3)$　（D）$[3,+\infty)$

【答案】B

【解析】本题考查指数与对数函数.

由已知可得,对任意实数 x,都有 $\log_a(e^x+3)\ge 1$

$\log_a(e^x+3)\ge \log_a a$

①当 $0<a<1$ 时,

$\therefore e^x+3\le a \Rightarrow a>3$

不成立

②当 $a>1$ 时,

$\therefore a\le e^x+3 \Rightarrow a\le 3$

$\therefore a\in(1,3]$,成立

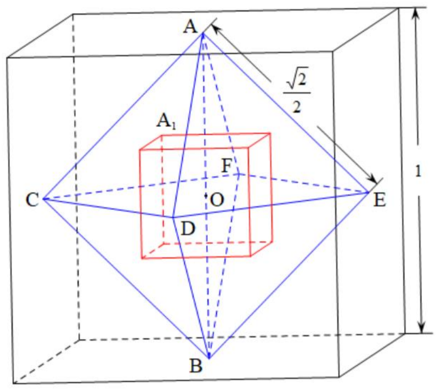
综上 $a\in(1,3]$,故选 B

8. 以棱长为1的正方体各面的中心为顶点,构成一个正八面体,再以这个正八面体各面的中心为顶点构成一个小正方体,那么该小正方体的棱长为

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）$\dfrac{1}{4}$

【答案】C

【解析】本题考查立体几何.



记棱长为1,则八面体棱长为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

如图,O为正方体的几何中心,

A,B,C,D,E,F分别为正方体六个面的中心,连接AB,

则$AB=1, OA=\dfrac{1}{2}$.

等边三角形中心（重心）A_1到平面$CDEF$的距离为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$.

所以小正方体的棱长为$\dfrac{1}{3}$,故选C.

二、填空题（共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分）

9. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列,S_n为其前n项的和.若$a_1+a_3=6, a_4=7$,

则$S_5=$______.

【答案】25

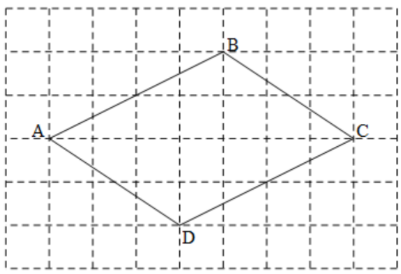
【解析】本题考查等差数列.

设等差数列的公差为d

$$\begin{cases}a_1+a_3=2a_1+2d=6\\ a_4=a_1+3d=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$$

$$\therefore S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}\cdot d=5\times1+\frac{5\times4}{2}\times2=25$$

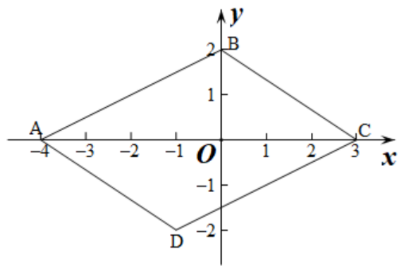
10. 已知四边形的顶点 A,B,C,D 在边长为1的正方形网格中的位置如图所示,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=$ ______ .



【答案】7

【解析】本题考查平面向量数量积.

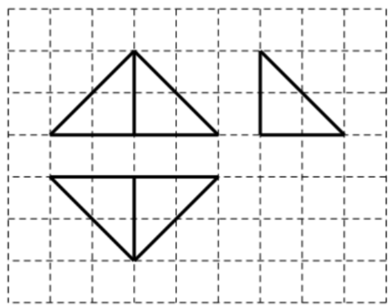
由题可知,建立如图所示平面直角坐标系,则 $A(-4,0),B(0,2),C(3,0),D(-1,-2)$



所以 $\overrightarrow{AC}=(7,0),\overrightarrow{DB}=(1,4)$

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=7\times1+0\times4=7$

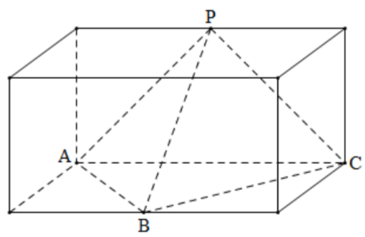
11. 如图,在边长为1的正方形网格中,粗实线表示一个三棱锥的三视图,则该三棱锥的体积为 ______ .



【答案】$\frac{8}{3}$

【解析】本题考查三视图及体积.

三视图还原如图所示,



$AC=4,AB=BC=PA=PB=PC=2\sqrt{2}$

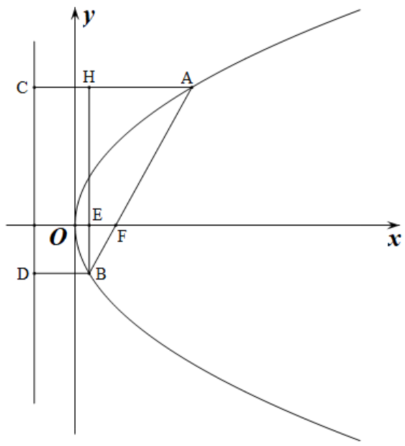
三棱锥的高 $h=2$

$\therefore V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times2=\frac{8}{3}$

12. 过抛物线 $y^2=4x$ 焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点,分别过 A,B 作准线 l 的垂线,垂足分别为 C,D .若 $|AF|=4|BF|$,则 $|CD|=$ ______ .

【答案】5

【解析】本题考查抛物线.



设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,过 B 作 AC 的垂线交 x 轴于 $E(x_2,0)$,交 AC 于 $H(x_2,y_1)$,则由抛物线定义可得

$|AF|=|AC|,|BF|=|BD|$

因为 $|AF|=4|BF|$

所以 $|AC|=4|BD|$,即 $x_1+1=4(x_2+1)$

所以 $x_1-4x_2=3$ ①

因为 $\triangle BEF$ 和 $\triangle BHA$ 相似

所以 $\dfrac{|EF|}{|HA|}=\dfrac{|BF|}{|BA|}=\dfrac{1}{5}$,即 $\dfrac{1-x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{5}$

所以 $x_1+4x_2=5$ ②

由①②可得

$x_1=4,x_2=\dfrac{1}{4}$,

所以 $y_1=4,y_2=-1$,

所以 $|CD|=|y_1-y_2|=5$

13. 2018年国际象棋奥林匹克团体赛中国男队、女队同时夺冠.国际象棋中骑士的移动规则是沿着 3×2 格或 2×3 格的对角移动.在历史上,欧拉、泰勒、哈密尔顿等数学家研究了“骑士巡游”问题:在 $8\times8=64$ 格的黑白相间的国际象棋棋盘上移动骑士,是否可以让骑士从某方格内出发不重复地走遍棋盘上的每一格?

图（一）给出了骑士的一种走法,它从图上标1的方格内出发,依次经过标$2,3,4,5,6,\cdots$,到达标64的方格内,不重复地走遍棋盘上的每一格,又可从标64的方格内直接走回到标1的方格内.如果骑士的出发点在左下角标50的方格内,按照上述走法,______（填“能”或“不能”）走回到标50的方格内.

若骑士限制在图（二）中的$3\times4=12$格内按规则移动,存在唯一一种给方格标数字的方式,使得骑士从左上角标1的方格内出发,依次不重复经过$2,3,4,5,6,\cdots$,到达右下角标12的方格内,分析图（二）中A处所标的数应为______.

35	38	27	16	29	42	55	18
26	15	36	39	54	17	30	43
37	34	13	28	41	32	19	56
14	25	40	33	20	53	44	31
63	12	21	52	1	8	57	46
24	51	64	9	60	45	2	5
11	62	49	22	7	4	47	58
50	23	10	61	48	59	6	3

图（一）

1			
A			
3			12

图（二）

【答案】能;8

【解析】本题考查逻辑.

由图（一）知:

$1\sim64$ 可依次行走,$64\sim1$ 也可一步走.

故 $1\sim64$ 为循环.

本题从 50 起: $50\rightarrow64\rightarrow1\rightarrow50$. 可依次行走,故可回到原点.

由图知:数字 1,2,3,4 是固定的,从 5 开始有两种情况.

1	4		6
	7	2	
3		5	8

矛盾,故不正确.

1	4	7	
6		2	
3		5	8

矛盾,故不正确.

1	4	7	
6		2	9
3	8	5	

矛盾,故不正确.

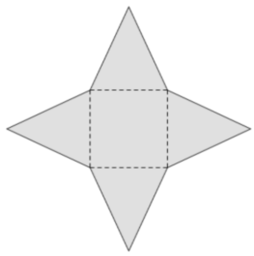
1	4	7	
		2	5
3	6		8

矛盾,故不正确.

1	4	7	10
8	11	2	5
3	6	9	12

正确,故$A=8$.

14. 如图,以正方形的各边为底可向外作四个腰长为1的等腰三角形,则阴影部分面积的最大值是______.



【答案】$2+2\sqrt{2}$

【解析】本题考查正弦定理.

设三角形顶角为θ,正方形边长为x,

S_1为全部三角形的面积,S_2为正方形的面积.

$$S_1=4\times\frac{1}{2}\sin\theta=2\sin\theta$$

因为$\dfrac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{x}{\sin\theta}$,所以$x=\dfrac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

因此$S_2=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}$.

$S_1+S_2=4\sin^2\dfrac{\theta}{2}+2\sin\theta=2(1-\cos\theta)+2\sin\theta$

$=2+2\sin\theta-2\cos\theta=2+2\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})$,其中 $\theta\in(0,\pi)$.

所以当 $\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 时,阴影面积的最大值为 $2+2\sqrt{2}$.

三、解答题（共 6 小题,共 80 分,解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程）

15.（本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A=\dfrac{3\pi}{4}$, $\cos C=\dfrac{12}{13}$, $BC=13$.

（Ⅰ）求 AB 的长;

（Ⅱ）求 BC 边上的中线 AD 的长.

【解析】

（Ⅰ）由 $\cos C=\dfrac{12}{13}$, $0<C<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $\sin C=\dfrac{5}{13}$

由正弦定理得,$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$,即 $AB=BC\cdot\dfrac{\sin C}{\sin A}=13\times\dfrac{\frac{5}{13}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5\sqrt{2}$.

（Ⅱ）在 $\triangle ABD$ 中,

$\cos B=\cos(\pi-\dfrac{3\pi}{4}-C)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos C+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin C=\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$.

由余弦定理得,

$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$,

所以 $AD^2=(5\sqrt{2})^2+\dfrac{169}{4}-2\times5\sqrt{2}\times\dfrac{13}{2}\times\dfrac{17\sqrt{2}}{26}=\dfrac{29}{4}$.

所以 $AD=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

16. （本小题满分 13 分）

某日 A,B,C 三个城市18个销售点的小麦价格如下表:

销售点序号	所属城市	小麦价格（元/吨）	销售点序号	所属城市	小麦价格（元/吨）
1	A	2420	10	B	2500
2	C	2580	11	A	2460
3	C	2470	12	A	2460
4	C	2540	13	A	2500
5	A	2430	14	B	2500
6	C	2400	15	B	2450
7	A	2440	16	B	2460
8	B	2500	17	A	2460
9	A	2440	18	A	2540

（Ⅰ）甲以 B 市5个销售点小麦价格的中位数作为购买价格,乙从 C 市4个销售点中随机挑选2个了解小麦价格.记乙挑选的2个销售点中小麦价格比甲的购买价格高的个数为 X ,求 X 的分布列及数学期望;

（Ⅱ）如果一个城市的销售点小麦价格方差越大,则称其价格差异性越大.请你对 A,B,C 三个城市按照小麦价格差异性从大到小进行排序（只写出结果）.

【解析】

（Ⅰ） B 市共有 5 个销售点,其小麦价格从低到高排列为:2450,2460,2500,2500,2500.所以中位数为2500,所以甲的购买价格为2500.

C 市共有4个销售点,其小麦价格从低到高排列为: 2400, 2470, 2540, 2580, 故 X 的可能取值为0,1,2.

$$P(X=0)=\frac{C_2^2C_2^0}{C_4^2}=\frac{1}{6},P(X=1)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},P(X=2)=\frac{C_2^0C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}.$$

所以分布列为

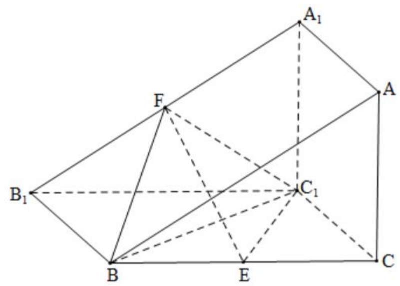
X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$.

（Ⅱ）三个城市按小麦价格差异性从大到小排序为: C,A,B.

17. （本小题满分 14 分）

如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 BCC_1B_1 是平行四边形, $BC_1\perp C_1C$, 平面 $A_1C_1CA\perp$ 平面 BCC_1B_1, 且 E,F 分别是 BC,A_1B_1 的中点.



（Ⅰ）求证: $EF\,//$ 平面 A_1C_1CA;

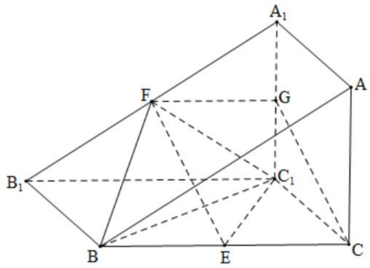
（Ⅱ）当侧面 A_1C_1CA 是正方形,且 $BC_1=C_1C$ 时,

（i）求二面角 $F-BC_1-E$ 的大小;

（ii）在线段 EF 上是否存在点 P,使得 $AP\perp EF$？若存在,指出点 P 的位置;若不存在,请说明理由.

【解析】

（Ⅰ）取 A_1C_1 中点 G,连 FG,连 GC.



在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,因为 F,G 分别是 A_1B_1, A_1C_1 的中点,所以 $FG // B_1C_1$,且 $FG=\frac{1}{2}B_1C_1$.

在平行四边形 BCC_1B_1 中,因为 E 是 BC 的中点,所以 $EC // B_1C_1$,且 $EC=\frac{1}{2}B_1C_1$.

所以 $EC // FG$,且 $EC=FG$.

所以四边形 $FECG$ 是平行四边形.

所以 $FE // GC$.

又因为 $FE \not\subset$ 平面 A_1C_1CA, $GC \subset$ 平面 A_1C_1CA,

所以 $EF //$ 平面 A_1C_1CA.

（Ⅱ）因为侧面 A_1C_1CA 是正方形,所以 $A_1C_1 \perp C_1C$.

又因为平面 $A_1C_1CA \perp$ 平面 BCC_1B_1,

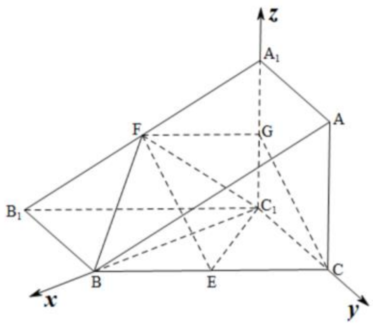
且平面 $A_1C_1CA \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = C_1C$,

所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1.所以 $A_1C_1 \perp C_1B$.

又因为 $BC_1 \perp C_1C$

以 C_1 为原点建立空间直角坐标系 C_1-xyz,

如图所示.



设 $C_1C=a$,则

$A(0,a,a), B(a,0,0), C(0,a,0), A_1(0,0,a), B_1(a,-a,0)$,

$E(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0), F(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

（i）设平面 FBC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1B}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{C_1F}=0\end{cases}$,得$\begin{cases}ax=0,\\ \frac{a}{2}x-\frac{a}{2}y+\frac{a}{2}z=0.\end{cases}$

即$\begin{cases}x=0\\ y=z\end{cases}$,令$y=1$,所以$\vec{n}=(0,1,1)$.

又因为$A_1C_1\perp$平面BC_1E

所以$\overrightarrow{C_1A_1}=(0,0,a)$是平面$BC_1E$的一个法向量.

所以$\left|\cos<\overrightarrow{C_1A_1},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{C_1A_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\left|\frac{a}{a\cdot\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由图可知,二面角$F-BC_1-E$为钝角

所以二面角$F-BC_1-E$的大小为$\frac{3\pi}{4}$

（ii）假设在线段EF上存在点P,使得$AP\perp EF$.

设$\frac{EP}{EF}=\lambda,\lambda\in[0,1]$,则$\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EF}$.

$$\begin{aligned}因为\overrightarrow{AP}&=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}\\&=\overrightarrow{AE}+\lambda\overrightarrow{EF}\\&=(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},-a)+\lambda(0,-a,\frac{a}{2})\\&=(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}-a\lambda,-a+\frac{a}{2}\lambda)\end{aligned}$$

又$AP\perp EF$,

所以$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{a}{2}\times0+(-\frac{a}{2}-a\lambda)(-a)+(-a+\frac{a}{2}\lambda)\frac{a}{2}=a^2(\frac{1}{4}\lambda+\lambda)=0$.

所以$\lambda=0\in[0,1]$.

故点P在点E处时,有$AP\perp EF$

18. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=xe^x-\frac{m}{2}(x+1)^2(m\geq 0)$.

（Ⅰ）当 $m=0$ 时,求函数 $f(x)$ 的极小值;

（Ⅱ）当 $m>0$ 时,讨论 $f(x)$ 的单调性;

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点,求 m 的取值范围.

【解析】

（Ⅰ）当 $m=0$ 时: $f'(x)=(x+1)e^x$,令 $f'(x)=0$ 解得 $x=-1$,

又因为当 $x\in(-\infty,-1)$, $f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 为减函数;

当 $x\in(-1,+\infty)$, $f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 为增函数.

所以, $f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=-\frac{1}{e}$.

（Ⅱ） $f'(x)=(x+1)(e^x-m)$.

当 $m>0$ 时,由 $f'(x)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=\ln m$.

（i）若 $m=\frac{1}{e}$,则 $f'(x)=(x+1)(e^x-\frac{1}{e})\geq 0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增;

（ii）若 $m>\frac{1}{e}$,则 $\ln m>-1$.

故当 $f'(x)>0$ 时, $x<-1$ 或 $x>\ln m$;

当 $f'(x)<0$ 时, $-1<x<\ln m$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$, $(\ln m,+\infty)$ 单调递增,在 $(-1,\ln m)$ 单调递减.

（iii）若$0<m<\frac{1}{e}$,则$\ln m<-1$.

故当$f'(x)>0$时,$x<\ln m$或$x>-1$;

当$f'(x)<0$时,$\ln m<x<-1$.

所以$f(x)$在$(-\infty,\ln m)$,$(-1,+\infty)$单调递增,在$(\ln m,-1)$单调递减.

综上所述:

当$0<m<\frac{1}{e}$时,$f(x)$在$(-\infty,\ln m)$,$(-1,+\infty)$单调递增,在$(\ln m,-1)$单调递减;

当$m=\frac{1}{e}$时,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增;

当$m>\frac{1}{e}$时,$f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(\ln m,+\infty)$单调递增,在$(-1,\ln m)$单调递减.

（III）（1）当$m=0$时,$f(x)=xe^x$,令$f(x)=0$,得$x=0$.

因为当$x<0$时,$f(x)<0$,当$x>0$时,$f(x)>0$,

所以此时$f(x)$在区间$(-\infty,1)$上有且只有一个零点.

（2）当$m>0$时:

（i）当$m=\frac{1}{e}$时,由（II）可知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,

且$f(-1)=-\frac{1}{e}<0$,$f(1)=e-\frac{2}{e}>0$,

此时$f(x)$在区间$(-\infty,1)$上有且只有一个零点.

（ii）当$m>\frac{1}{e}$时,由（II）的单调性结合$f(-1)<0$,

又$f(\ln m)<f(-1)<0$,只需讨论$f(1)=e-2m$的符号:

当$\dfrac{1}{\mathrm{e}}<m<\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时, $f(1)>0$, $f(x)$ 在区间$(-\infty,1)$上有且只有一个零点;

当$m\ge\dfrac{\mathrm{e}}{2}$时, $f(1)\le 0$,函数 $f(x)$ 在区间$(-\infty,1)$上无零点.

（iii）当$0<m<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时,由（Ⅱ）的单调性结合 $f(-1)<0$, $f(1)=\mathrm{e}-2m>0$,

$f(\ln m)=-\dfrac{m}{2}\ln^2 m-\dfrac{m}{2}<0$,

此时 $f(x)$ 在区间$(-\infty,1)$上有且只有一个零点.

综上所述,m的取值范围为$[0,\dfrac{\mathrm{e}}{2})$.

19. （本小题满分 14 分）

过椭圆$W:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点F_1作直线l_1交椭圆于A,B两点,其中$A(0,1)$,另一条过F_1的直线l_2交椭圆于C,D两点（不与A,B重合）,且D点不与点$(0,-1)$重合.过F_1作x轴的垂线分别交直线AD,BC于E,G.

（Ⅰ）求B点坐标和直线l_1的方程;

（Ⅱ）求证:$|EF_1|=|F_1G|$.

【解析】

（Ⅰ）由题意可得直线l_1的方程为$y=x+1$.与椭圆方程联立,

由$\begin{cases} y=x+1 \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$

可求$B(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3})$

（Ⅱ）当l_2与x轴垂直时,C,D两点与E,G两点重合,

由椭圆的对称性,$|EF_1|=|F_1G|$.当l_2不与x轴垂直时,

设$C(x_1,y_1),D(x_2,y_2),l_2$的方程为$y=k(x+1)\ (k\neq 1)$.

由$\begin{cases} y=k(x+1) \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$消去$y$,整理得$(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$

则$x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

由已知$x_2\neq 0$,则直线AD的方程为$y-1=\dfrac{y_2-1}{x_2}x$,

令$x=-1$,得点E的纵坐标$y_E=\dfrac{x_2-y_2+1}{x_2}$.把$y_2=k(x_2+1)$代入得

$y_E=\dfrac{(x_2+1)(1-k)}{x_2}$.由已知,$x_1\neq -\dfrac{4}{3}$,则直线$BC$的方程为

$y+\dfrac{1}{3}=\dfrac{y_1+\frac{1}{3}}{x_1+\frac{4}{3}}(x+\dfrac{4}{3})$,

令$x=-1$,得点G的纵坐标$y_G=\dfrac{y_1-x_1-1}{3(x_1+\frac{4}{3})}$.

把$y_1=k(x_1+1)$代入得$y_G=\dfrac{(x_1+1)(k-1)}{3x_1+4}$.

$y_E+y_G=\dfrac{(x_2+1)(1-k)}{x_2}+\dfrac{(x_1+1)(k-1)}{3x_1+4}$

$=\dfrac{(1-k)[(x_2+1)(3x_1+4)-x_2(x_1+1)]}{x_2\cdot(3x_1+4)}=\dfrac{(1-k)[2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4]}{x_2\cdot(3x_1+4)}$

把$x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$代入到$2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4$中,

$2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4=2\times\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}+3\times(\dfrac{-4k^2}{2k^2+1})+4=0$.

即 $y_E+y_G=0$,即$|EF_1|=|F_1G|$.

20. （本小题满分 13 分）

已知 $a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$ 是由正整数组成的无穷数列,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, a_n 满足如下两个条件:

①a_n 是 n 的倍数;

②$|a_n-a_{n+1}|\le 5$,

（Ⅰ）若 $a_1=30,a_2=32$,写出满足条件的所有 a_3 的值;

（Ⅱ）求证:当 $n\ge 11$ 时, $a_n\le 5n$;

（III）求 a_1 所有可能取值中的最大值.

【解析】

（Ⅰ）a_3 的值可取 $27,30,33,36$.

（Ⅱ）由 $a_{n+1}\le a_n+5\ (n=1,2,\cdots)$,对于任意的 n,有 $a_n\le 5(n-1)+a_1$.

当 $n\ge a_1-4$ 时, $a_n\le 5(n-1)+a_1$,即 $a_n\le 5(n-1)+n+4$,即 $a_n\le 6n-1$.

则 $a_n<6n$ 成立.

因为 a_n 是 n 的倍数,所以当 $n\ge a_1-4$ 时,有 $a_n\le 5n$ 成立.

若存在 n 使 $a_n>5n$,依以上所证,这样的 n 的个数是有限的,设其中最大的为 N.

则 $a_N>5N$, $a_{N+1}\le 5(N+1)$ 成立,因为 a_N 是 N 的倍数,故 $a_N\ge 6N$.

由 $5\ge a_N-a_{N+1}\ge 6N-5(N+1)=N-5$,得 $N\le 10$.

因此当 $n\ge 11$ 时, $a_n\le 5n$.

（III）由上问知 $a_{11} \le 55$,因为 $a_n \le a_{n+1}+5$ 且 a_n 是 n 的倍数,

所以 $a_{10}, a_9, \cdots, a_1$ 满足下面的不等式:

$a_{10} \le 60$, $a_9 \le 63$, $a_8 \le 64$, $a_7 \le 63$, $a_6 \le 66$, $a_5 \le 70$, $a_4 \le 72$, $a_3 \le 75$,

$a_2 \le 80$, $a_1 \le 85$.

则 $a_1=85$, $a_2=80$, $a_3=75$, $a_4=72$, $a_5=70$, $a_6=66$, $a_7=63$, $a_8=64$,

$a_9=63$, $a_{10}=60$,当 $n \ge 11$ 时, $a_n=5n$ 这个数列符合条件.

故所求 a_1 的最大值为 85.