2018年秋季学期 泛函分析期末考试

整理人: 章俊彦 zhangjy9610@gmail.com

2019年1月15日 08:30-10:30 主讲教师: 刘聪文、许小卫

本试卷每题10分，满分100分。

1、叙述Riesz表示定理，并举出一个应用它的例子（不需要证明）。

2、证明：一个赋范线性空间的有限维子空间一定是闭子空间。

3、设X为Banach空间，证明：X上两个闭线性算子的复合仍然是闭线性算子。

4、设X,Y是Banach空间，$T:X\to Y$是有界线性算子，且是双射。证明：存在正常数C,使得对任意$x\in X$成立

$$C^{-1}\|x\|\le\|Tx\|\le C\|x\|.$$

5、设$X:=\{x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)|$只有有限项$\xi_k\neq 0\}$, 并赋予范数$\|x\|:=\sup_k|\xi_k|$. 定义$X$上的算子$T$如下:

$$T:(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\mapsto(\xi_1,\xi_2/2,\xi_3/3,\cdots).$$

证明T是有界线性算子，但T^{-1}无界。

6、设$(X,\|\cdot\|)$是赋范空间。证明：对任意$x\in X$,

$$\|x\|=\sup\{|f(x)|:f\in X^*,\|f\|=1\}.$$

7、设X是Banach空间，A,B分别为X上的有界线性算子、紧线性算子。证明：

$$\sigma(A)\backslash(\sigma_p(A)\cup\sigma_p(A+B))=\sigma(A+B)\backslash(\sigma_p(A)\cup\sigma_p(A+B)).$$

8、设X是无穷维赋范空间，证明X^*也是无穷维的。

9、设X是Banach空间，T是X上的线性算子。证明：T有界，当且仅当

$$x_n\rightharpoonup x\Rightarrow Tx_n\rightharpoonup Tx.$$

10、设X是Banach空间，f是X上的一个线性泛函，$N(f):=\{x\in X|f(x)=0\}$. 证明：$N(f)$要么是X的闭子空间，要么是X是稠密真子空间。