尤溪县2018-2019学年第一学期普通高中半期考试

高二（理科）数学参考答案

一、选择题：（12×5分=60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	B	D	C	A	D	A	C	A	A	C

二、填空题：（4×5分=20分）

13．（2，+∞）　　14．60°　　15．　$\sqrt{17}$　　16．②③

三、解答题：（10+12+12+12+12+12=70分）

17．解：(1)抛物线的标准方程是 $y^2=6x$，焦点在 x 轴上，开口向右，$2p=6$，

∴$\frac{P}{2}=\frac{3}{2}$　∴焦点为 F（$\frac{3}{2}$，0），准线方程：$x=-\frac{3}{2}$；…………4分

(2)∵直线ℓ过已知抛物线的焦点且倾斜角为45°，

∴直线ℓ的方程为 $y=x-\frac{3}{2}$，代入抛物线 $y^2=6x$ 化简得 $x^2-9x+\frac{9}{4}=0$，…………7分

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则 $x_1+x_2=9$，

所以 $|AB|=x_1+x_2+p=9+3=12$．故所求的弦长为12．…………10分

18．解：（1）对于任意 $x\in R$，$x^2+1\geqslant 1$，若命题 p 为真命题，

则（x^2+1）$_{\min}\geqslant m$，即 $m\leqslant 1$，所以m的取值范围为$\{m\,|\,m\le 1\}$…………4分

（2）若命题 q 为真命题，则$(m-2)(m+2)<0$，所以$-2<m<2$，………6分

因为命题“$p\vee q$”为真命题，“$p\wedge q$”为假命题，

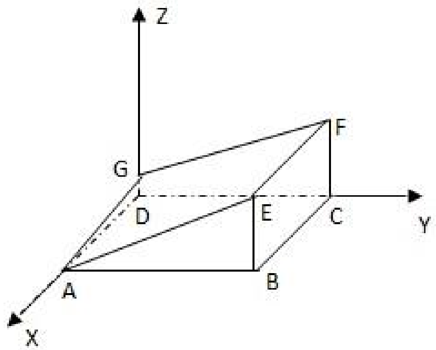
所以 p，q 一个为真命题，一个为假命题．…………7分

当命题 p 为真命题，命题 q 为假命题时，$\begin{cases} m\le 1 \\ m\le -2或m\ge 2 \end{cases}$，则 $m\leqslant -2$，……9分

当命题 p 为假命题，命题 q 为真命题时，$\begin{cases} m>1 \\ -2<m<2 \end{cases}$，则 $1<m<2$，……11分

综上所述，m的取值范围为

$\{m\,|\,m\le -2或1<m<2\}$．……12分



19．解：（1）由题意知 A（1，0，0），B（1，4，0），E（1，4，3），F（0，4，4），

∴$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$……2分

$\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{AD} = 1, \left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{2}, \left|\overrightarrow{AD}\right| = 1.$

$\therefore \cos < \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AD} > = \dfrac{\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……5分

∴异面直线 EF 与 AD 所成的角为 45°．……6 分

（2） 设平面 $AEFG$ 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$

$\because \overrightarrow{EA} = (0, -4, -3),\ \overrightarrow{EF} = (-1, 0, 1)$

$\therefore \begin{cases} \vec{n} \bullet \overrightarrow{EA} = 0 \\ \vec{n} \bullet \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y - 3z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ 令 $x = 4$，则 $y = -3, z = 4$

$\therefore \vec{n} = (4, -3, 4)$，…………9分

又 $\because C(0,4,0), \therefore \overrightarrow{AC} = (-1, 4, 0)$

$\therefore$ 点 C 到平面 $AEFG$ 的距离 $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC} \bullet \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{|-4-12|}{\sqrt{16+9+16}} = \dfrac{14\sqrt{41}}{41}$ ……12分

20. 解: （Ⅰ）因为点 P 到直线 $x=-1$ 的距离比它到点(2, 0)的距离小 1，

所以 P 到直线 $x=-2$ 的距离等于它到点(2, 0)的距离, 由抛物线的定义知 P 的轨迹为以(2, 0)为焦点的抛物线, 抛物线方程为 $y^2=8x$,

即点 P 的轨迹方程为 $y^2=8x$; …………6 分

(Ⅱ)因为椭圆 C_1 的离心率为 $\dfrac{5}{13}$，焦点在 x 轴上且长轴长为 26,

所以 $\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{5}{13}, \\ 2a = 26 \end{cases}$ 所以 $a=13, c=5$, 即焦点坐标为(5, 0), (-5, 0), ……8 分

又若曲线 C_2 上的点到椭圆 C_1 的两个焦点的距离的差的绝对值等于 8，

所以曲线 C_2 为以(5, 0), (-5, 0)为焦点的双曲线, 且实轴长为 8,

所以 C_2 的方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. ……12 分

21. 解：（1）抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，由题意知 F（-1，0）.

故设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

则由题意可得$\begin{cases}\sqrt{a^2-b^2}=1\\ \frac{1^2}{a^2}+\frac{(\frac{3}{2})^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$.

故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………5 分

（3）证明：∵直线的斜率为$\frac{1}{2}$，且不过$P(1,\ \frac{3}{2})$点，

∴可设直线$l: y=\frac{1}{2}x+m(m\neq 1)$.

联立方程组$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=\frac{1}{2}x+m\end{cases}$，消 y 得 $x^2+mx+m^2-3=0$. …………7 分

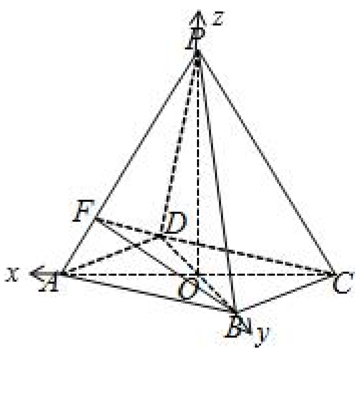
又设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），故有$\begin{cases}\Delta=m^2-4(m^2-3)>0\\ x_1+x_2=-m\\ x_1x_2=m^2-3\end{cases}$，……8 分

所以$k_1+k_2=\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\frac{(y_1-\frac{3}{2})(x_2-1)+(y_2-\frac{3}{2})(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=\frac{(\frac{1}{2}x_1+m-\frac{3}{2})(x_2-1)+(\frac{1}{2}x_2+m-\frac{3}{2})(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{x_1x_2+(m-2)(x_1+x_2)-2m+3}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$

$=\frac{m^2-3+(m-2)(-m)-2m+3}{m^2-3-(-m)+1}=0$，所以 k_1+k_2 为定值 0. ……12 分

22.



（Ⅰ）证明：因为底面 $ABCD$ 是菱形，$AC\cap BD=O$，
所以 O 为 AC，BD 中点．又因为 $PA=PC$，$PB=PD$，
所以 $PO\perp AC$，$PO\perp BD$，所以 $PO\perp$ 底面 $ABCD$. ……4 分

（Ⅱ）解：由底面 $ABCD$ 是菱形可得 $AC\perp BD$，又由（Ⅰ）可知 $PO\perp AC$，$PO\perp BD$.如图，以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$．……5 分

由△PAC 是边长为 2 的等边三角形，$PB=PD=\sqrt{6}$，

可得$PO=\sqrt{3}$，$OB=OD=\sqrt{3}$．所以

$A(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$

$\therefore \overrightarrow{CP}=(1,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{AP}=(-1,0,\sqrt{3})$．

由已知可得 $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}=(\frac{3}{4},0,\frac{\sqrt{3}}{4})$

设平面 BDF 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\sqrt{3}y=0\\ \frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0\end{cases}$

$\therefore$ 令$x=1$,则$y=0,z=-\sqrt{3},\vec{n}=(1,0,-\sqrt{3}),\cos<\overrightarrow{CP},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{CP}\bullet\vec{n}}{|\overrightarrow{CP}||\vec{n}|}=-\frac{1}{2}$

设直线CP与平面BDF所成角为θ，则$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{CP},\vec{n}>\right|=\frac{1}{2}$

所以直线 CP 与平面 BDF 所成角的大小为 30°．………………8 分

（Ⅲ）解：设$\frac{BM}{BP}=\lambda$（$0\leqslant\lambda\leqslant1$），则

$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+\lambda\overrightarrow{BP}=(1,\sqrt{3}(1-\lambda),\sqrt{3}\lambda)$……10分

若使 $CM//$ 平面 BDF,需且仅需$\overrightarrow{CM}\bullet\vec{n}=0$且 $CM\not\subset$ 平面 BDF,解得$\lambda=\frac{1}{3}\in[0,1]$，

所以在线段 PB 上存在一点 M，使得 $CM//$ 平面 BDF．此时$\frac{BM}{BP}=\frac{1}{3}$．……12 分