2019年全国卷一理科数学试题答案解析

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $M=\{x|-4<x<2\}$， $N=\{x|x^2-x-6<0\}$，则 $M\cap N=$（　）

A．$\{x|-4<x<3\}$ B．$\{x|-4<x<-2\}$ C．$\{x|-2<x<2\}$ D．$\{x|2<x<3\}$

【答案】C

【解析】计算得 $N=\{x|-2<x<3\}$，画数轴可得 $M\cap N=\{x|-2<x<2\}$，故选 C

【点评】本题考查集合交集的应用，结合数轴图解，属简单题

2．设复数 z 满足 $|z-i|=1$， z 在复平面内对应的点为 (x,y)，则（　）

A．$(x+1)^2+y^2=1$　B．$(x-1)^2+y^2=1$　C．$x^2+(y-1)^2=1$ D．$x^2+(y+1)^2=1$

【答案】C

【解析】设 $z=x+yi$，则 $|x+(y-1)i|=1$，即 $x^2+(y-1)^2=1$，故选 C

【点评】本题通过复数模的运算考查数形结合，对复平面坐标有一定理解即可，属中等题

3．已知 $a=\log_2 0.2$， $b=2^{0.2}$， $c=0.2^{0.3}$，则（　）

A．$a<b<c$　B．$a<c<b$　C．$c<a<b$　D．$b<c<a$

【答案】B

【解析】$a=\log_2 0.2<\log_2 1=0$，$b=2^{0.2}>2^0=1$，$c=0.2^{0.3}<0.2^0=1$，且 $c>0$，因此可得 $a<c<b$，选 B

【点评】本题考查指对数大小比较，借助单调性及常规中间值 0 与 1 即可，属简单题

4．古希腊时期，人们认为最美人体的头顶至肚脐的长度与肚脐至足底的长度之比是

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$，称为黄金分割比例），著名的“断臂维纳斯”便是如此． 此外，最美人体的头顶至咽喉的长度与咽喉至肚脐的长度之比也是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．若某人满足上述两个黄金分割比例，且腿长为$105cm$，头顶至脖子下端的长度为$26cm$，则其身高可能是（ ）

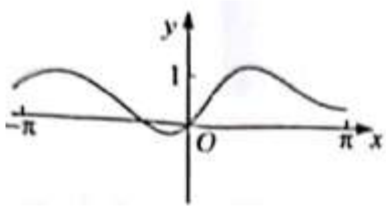
A．$165cm$　　B．$175cm$　　C．$185cm$　　D．$190cm$

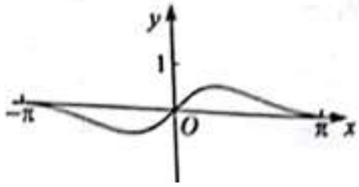
【答案】B

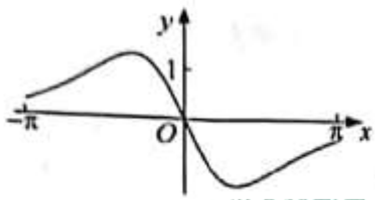
【解析】设某人的咽喉至肚脐的长度为x，肚脐至足底的长度为y，依题意可得$\begin{cases}\frac{26}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \frac{26+x}{y}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{cases}$解得$\begin{cases}x\approx 42\\ y\approx 110\end{cases}$，则某人的身高约为$42+110+26=178$，故选B．

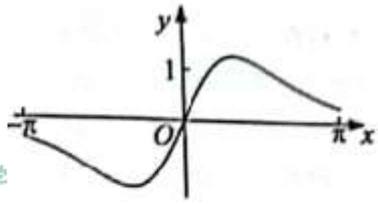
【点评】本题重点考察了黄金分割比例的性质，属于新定义型的概念理解题，对文字转换要求较高，难度适中。

5．函数$f\left(x\right)=\frac{\sin x+x}{\cos x+x^2}$在$[-\pi,\pi]$的图像大致为（ ）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】 $f\left(-x\right)=\frac{-\sin x-x}{\cos x+x^2}=-f\left(x\right)$， $f\left(x\right)$为奇函数，图像关于原点对称，排除 A 选项；

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi^2}{16}}>1>0$，故答案选 D.

【点评】本题重点考查了函数图像性质，属于基础题，难度比较小。

6．我国古代典籍《周易》用“卦”描述万物的变换，每一“重卦”由从下到上排列的 6 个爻组成，爻分别为阳爻“——”和阴爻“– –”，下图就是一重卦，在所有重卦中随机取一重卦，则该重卦恰有 3 个阳爻的概率是（ ）

A. $\frac{5}{16}$　　B. $\frac{11}{32}$　　C. $\frac{21}{32}$　　D. $\frac{11}{16}$

【答案】A

【解析】 $P=\frac{C_6^3}{2^6}=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

【点评】本题重点考查了排列组合以及概率统计基础知识，难度中等。

7． 已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}\right|$，且$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

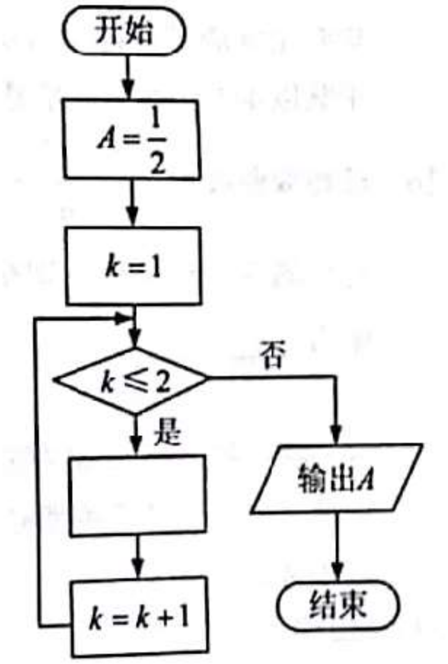
【答案】B

【解析】$\because\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，$\therefore\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0$，$\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\theta-\left|\vec{b}\right|^2=0$，又$\because\left|\vec{a}\right|=2\left|\vec{b}\right|$，$\therefore 2\left|\vec{b}\right|^2\cos\theta-\left|\vec{b}\right|^2=0$，$\because\vec{b}$为非零向量，$\therefore 2\cos\theta-1=0$即$\cos\theta=\frac{1}{2}$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$．故答案选$B$．

【点评】本题考查平面向量垂直的关系应用，以及平面向量数量积及其基本运算，属于基础题。

8．右图是求 $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$ 的程序框图，图中空白框中应填入（　　）

A．$A=\dfrac{1}{2+A}$　　B．$A=2+\dfrac{1}{A}$　　C．$A=\dfrac{1}{1+2A}$　　D．$A=1+\dfrac{1}{2A}$



【答案】A

【解析】∵输出“$\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$”，则由程序框图知，空白框中应填入“$A=\dfrac{1}{2+A}$”满足要求，

故答案选 A.

【点评】本题考查程序框图的识别，属于简单题.

9．记 S_n 为等差数列的前 n 项和，已知 $S_4=0$，$a_5=5$，则（　　）

A．$a_n=2n-5$　B．$a_n=3n-10$　C．$S_n=2n^2-8n$　D．$S_n=\dfrac{1}{2}n^2-2n$

【答案】A

【解析】$S_4=\dfrac{4(a_1+a_4)}{2}=0$，即 $2a_1+3d=0$；$a_5=a_1+4d=5$，得 $a_1=-3$，$d=2$，$a_n=2n-5$

【点评】简单题，直接用公式即可得答案。

10. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A、B 两点，若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|F_1B|$，则 C 的方程为（）

A. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】B

【解析】设 $|F_2B|=x$，由椭圆定义 $|AF_2|+|AF_1|=2a$，$|BF_2|+|BF_1|=2a$，解得 $|F_2B|=x=\frac{a}{2}$，所以 $|AF_2|=2|F_2B|=a$，故 A 为短轴顶点，在 ΔOAF_2 与 ΔF_1F_2B 中，由 $\cos\angle OF_2A=-\cos\angle F_1F_2B$ 得 $-\frac{1}{a}=\frac{4+\frac{1}{4}a^2-\frac{9}{4}a^2}{2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}a}$，求得 $a^2=3$，则 $b^2=2$，故选 B

【点评】中等题。考察了椭圆的定义以及焦半径的长度关系，在焦点三角形中表示边长进而用余弦定理来得到相关关系，属于比较常规的考法。

11．关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

① $f(x)$ 是偶函数　　② $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 有四个零点　　④ $f(x)$ 的最大值是 2

其中所有正确结论的编号是（　）

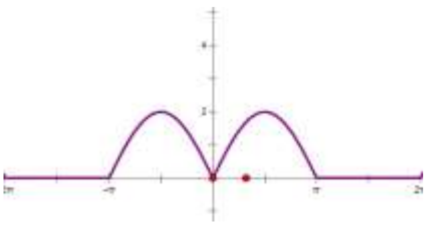
A．①②④　　B．②④　　C．①④　　D．①③

【答案】C

【解析】由函数偶函数的定义 $f(-x)=\sin|-x|+|\sin -x|=f(x)$，可知 $f(x)$ 是偶函数，故①正确；

由 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 可得 $f(x)=\begin{cases}2\sin x, 0\le x\le\pi\\ 0, \quad \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，且 $f(x)$ 是偶函数，图像关于 y 轴对称，画出函数图像，由图像可知 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减，故②错误；$f(x)$ 图像与 x 轴有

三个交点，故③错误；答案选 C .



【点评】本题重点考察了三角函数图像及其性质，属于难题。

12．三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上， $PA=PB=PC$ ， ΔABC 是边长为 2 的正三角形， E,F 分别为 PA,AB 中点， $\angle CEF=90^{\circ}$，则球 O 的体积为（　　）

A． $8\sqrt{6}\pi$　　B． $4\sqrt{6}\pi$　　C． $2\sqrt{6}\pi$　　D． $\sqrt{6}\pi$

【答案】 D

【解析】由题可知三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥，则 $\angle APB=\angle BPC=\angle APC$ ， $PB\perp AC$ 。为 $\angle CEF=90^{\circ}$ 则 $CE\perp EF$ ， 又 E,F 分别为 PA,AB 中点， 则 $EF//PB$ 从而 $CE\perp PB$ ，且 $CE\cap AC=C$ ，所以 $PB\perp$ 面 PAC ，从而 $PB\perp PA,PB\perp PC$ ，易得 $PA=PB=PC=\sqrt{2}$ ，三棱锥可以看做正方体的一个顶点和相邻三个面的面对角线构成的，则易得外接球半径为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，从而体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^{3}=\sqrt{6}\pi$

【点评】本体主要考察几何体外接球问题，立体图形转换，难度较大。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．曲线 $y=3\left(x^{2}+x\right)e^{x}$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为______.

【答案】 $y=3x$

【解析】 $y'=(6x+3)e^{x}+\left(3x^{2}+3x\right)e^{x}$， $k=3$， $y-0=3(x-0)$， $y=3x$.

【点评】本题重点考察 uv 类型的导数求导，以及导数的切线方程，属于基础题.

14．记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=\frac{1}{3}$， $a_4^2=a_6$，则 $S_5=$______.

【答案】 $\frac{121}{3}$

【解析】$a_4^2=a_6$，$\left(\frac{1}{3}q^3\right)^2=\frac{1}{3}q^5$，$q=3$

$$S_5=\frac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-3^5\right)}{1-3}=\frac{121}{3}$$

【点评】本题重点考察等比数列前n项和及等比数列的计算，属于基础题.

15．甲、乙两队进行篮球比赛，采取七场四胜制（当一队赢得四场胜利时，该队获胜，决赛结束），根据前期比赛成绩，甲队的主客场安排依次为“主主客客主客主”，设甲队主场获胜的概率为0.6，客场取胜的概率为0.5，且各场比赛结果互相独立，则甲队以4：1获胜的概率是

______.

【答案】0.18

【解析】由题可知，要使甲队以4：1获胜的话共需进行五场比赛，且前四场有一场是乙获胜，则甲队以4：1获胜的概率为

$$P=0.6\times\left(C_2^1\cdot0.6\times0.4\times0.5\times0.5+C_2^1\cdot0.5\times0.5\times0.6\times0.6\right)$$
$$=0.6\times(1.2\times0.1+0.36\times0.5)$$
$$=0.6\times0.3$$
$$=0.18$$

【点评】本题属难题，考点是随机事件的概率问题，与以往的考题相比，无大变化，考生可进一步强化该知识。

16．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，过$F_1$的直线与$C$的两条渐近线分别交于$A$、$B$两点。若$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则$C$的离心率为______.

【答案】2

【解析】因为$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，所以$A$为$F_1B$中点，$O$为$F_1F_2$中点，所以$OA//F_2B$

$\overrightarrow{F_1B}\bullet\overrightarrow{F_2B}=0\Rightarrow\overrightarrow{F_1B}\perp\overrightarrow{F_2B}$，所以$OA\perp F_1B$，所以$\Delta OF_1B$为等腰三角形，$OA$为底边中线，所

以$\angle F_1OA=\angle BOA$，根据双曲线性质，$\angle F_1OA=\angle F_2OB$，所以$\angle F_1OA=\angle F_2OB=\angle BOA=60^0$，所以$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，$e=2$

点评：本题属于圆锥曲线中双曲线的渐近线与向量的相关知识结合，重点要理解向量的基本意义，属于中等题目。

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．　（12 分）

ΔABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，设$(\sin B-\sin C)^2=\sin^2 A-\sin B\sin C$．

（1）求A；

（2）若$\sqrt{2}a+b=2c$，求$\sin C$．

【答案】（1）$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$；（2）$\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

【解析】　（1）由题意可知：$\sin^2 B-2\sin B\sin C+\sin^2 C=\sin^2 A-\sin B\sin C$，

由正弦定理$b^2-2bc+c^2=a^2-bc$，得$b^2+c^2-a^2=bc$，

由余弦定理得：$\therefore\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）由正弦定理可知：$\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$，

$\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-C\right)=2\sin C$，得：$\dfrac{3}{2}\sin C-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,即$3\sin C-\sqrt{3}\cos C=\sqrt{6}$，

$2\sqrt{3}\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{6}$,整理得：$\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,得：$C-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$,则$C=\dfrac{5\pi}{12}$或$\dfrac{11\pi}{12}$,$\because A=\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore C=\dfrac{5\pi}{12}$,即：$\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$；

【点评】此题主要考查考生对正余弦定理的理解和运用，属于中等题 ．第一问观察角

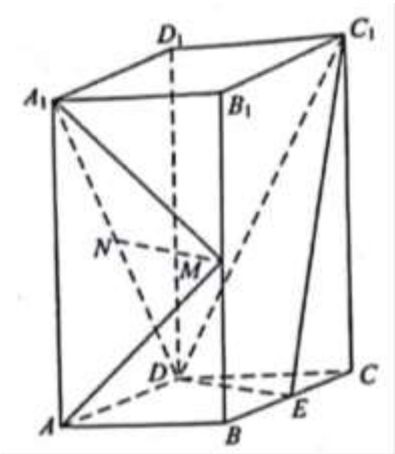
度与边的关系，运用正弦定理和余弦定理进行求解．第二问运用正弦定理和辅助角公式解得 $\sin C$．此题属于解三角形中的基础题型，旨在考查考生的基础是否扎实．

18．（12 分）

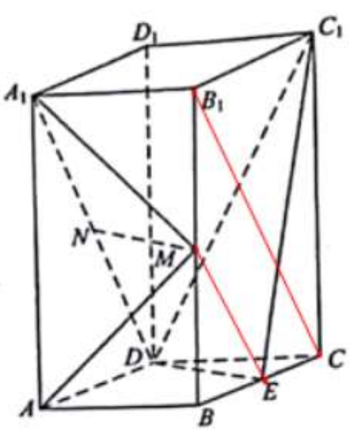
如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点．

（1）证明：$MN//$ 平面 C_1DE；

（2）求二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值．



【答案】（1）见解析（2）$\frac{\sqrt{5}}{5}$



【解析】

（1）∵ A_1B_1//CD，A_1B_1=CD

∴ A_1B_1CD 是平行四边形

∴ $A_1D//B_1C$，$A_1D=B_1C$

连接 ME，B_1E，则 $ME//B_1C$，$ME=\frac{1}{2}B_1C$

又∵ N 为 A_1D 的中点

∴ $ND//ME$， $ND=ME$

∴四边形 $NDEM$ 是平行四边形

∴ $MN//DE$

∵ $MN\not\subset$ 平面 C_1DE， $DE\subset$ 平面 C_1DE

∴ $MN//$ 平面 C_1DE

（2）以 D 为原点，以 DA， DE， DD_1 分别为 x， y， z 建立空间直角坐标系

则 $A(2,0,0)$， $M\left(1,\sqrt{3},2\right)$， $A_1(2,0,4)$， $N(1,0,2)$

设平面 A_1MN 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{A_1M}=\left(-1,\sqrt{3},-2\right)$， $\overrightarrow{MN}=\left(0,-\sqrt{3},0\right)$

∴ $\begin{cases}\overrightarrow{A_1M}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$， ∴ $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y-2z=0\\ -\sqrt{3}y=0\end{cases}$，解得 $\vec{n}=(-2,0,1)$

设平面 A_1AM 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$， $\overrightarrow{A_1A}=(0,0,-4)$， $\overrightarrow{AM}=\left(-1,\sqrt{3},2\right)$

∴ $\begin{cases}\overrightarrow{A_1A}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{AM}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$， ∴ $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y+2z=0\\ -4z=0\end{cases}$，解得 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$

设二面角 $A-MA_1-N$ 所在的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

∴二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

【点评】难度中等．第一问辅助线做法属于常规操作；第二问题型问法与往年相比，基本没有大变化

19．（12 分）

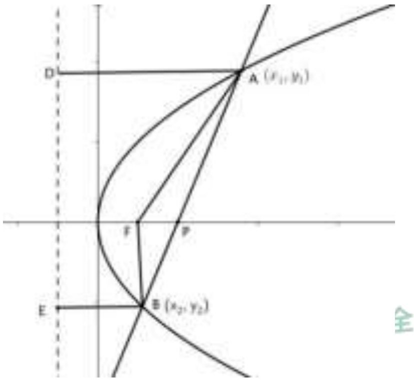
已知抛物线 $C:y^2=3x$ 的焦点为 F，斜率为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线 l 与 C 的交点为 A，B，与 x 轴的交点为 P。

（1）若 $|AF|+|BF|=4$，求 l 的方程；

（2）若 $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$，求 $|AB|$。

【答案】：（1）$y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$；（2）4

【解析】（1）如图所示：



设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，分别过A、B做抛物线准线的垂线交准线与D、E，所以$AF=AD$，$BF=BE$，所以$AD+BE=4$，所以$x_1+x_2+p=4$①；

设l的方程为$y=\frac{3}{2}x+m$，与抛物线联立可得：$\frac{9}{4}x^2+(3m-3)x+m^2=0$，所以$x_1+x_2=\frac{4-4m}{3}$②；

联立①②可得：$m=-\frac{7}{8}$；

所以l的方程$y=\frac{3}{2}x-\frac{7}{8}$；

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l的方程为$y=\frac{3}{2}x+n$，当$\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$时$y_1=-3y_2$③，联立直线与抛物线可得：$y^2-2y+2n=0$，所以$\begin{cases}y_1\bullet y_2=2n\\y_1+y_2=2\end{cases}$④，联立③④可得$\begin{cases}y_1=-1\\y_2=3\\n=-\frac{3}{2}\end{cases}$

所以l的方程为$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$，所以$\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}\\x_2=3\end{cases}$，所以$A(\frac{1}{3},-1)$，$B(3,3)$所以，$|AB|=4$。

【点评】本题主要考察了抛物线的定义以及用韦达定理来求解圆锥曲线中的参数，属于中等题，第二问中需要在向量中提炼坐标关系，并且要联立方程消去x，这点比较需要注意。

20．（12分）

已知函数$f\left(x\right)=\sin x-\ln\left(1+x\right)$，$f'\left(x\right)$为$f\left(x\right)$的导数，

证明：（1） $f'(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点；

（2） $f(x)$有且仅有2个零点。

【答案】略

【解析】 （1） $f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1},f''(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$，

$f'''(x)=-\cos x-\frac{2}{(x+1)^3}\left(-1<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$\because$ 当$-1<x<\frac{\pi}{2}$时， $\cos x>0,\frac{2}{(x+1)^3}>0,\therefore f'''(x)<0$在$x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，

$\therefore f''(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

$\because f''(0)=1>0,f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{\left(\frac{\pi}{6}+1\right)^2}<-\frac{1}{2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}<0$

$\therefore f''(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上存在零点，记为$x_0$，

$\therefore$ 当$-1<x<x_0$时， $f''(x)>0$，当$x_0<x<\frac{\pi}{2}$时， $f''(x)<0$，

$\therefore f'(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$存在唯一极大值点$x_0$。

（2） $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$

①当$x>e-1$时， $\ln(1+x)>1,\sin x\le 1,\therefore \sin x-\ln(1+x)<0$， $f(x)$无零点；

②当$\frac{\pi}{2}<x<e-1$时，$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1},\cos x<0,\frac{1}{x+1}>0$

$\therefore f'(x)<0,\because f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)>0,f(e-1)=\sin(e-1)-1<0$

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},e-1\right)$上有一个零点；

③当$-1<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}, f''(x)=-\sin x+\frac{1}{(x+1)^2}$，

$f'''(x)=-\cos x-\frac{2}{(x+1)^3}$，

由（1）可知$f'''(x)<0$恒成立，$f''(x_0)=0$，即$\sin x_0=\frac{1}{(x_0+1)^2}$，$x_0\in\left(0,,\frac{\pi}{6}\right)$

当$-1<x<x_0$时，$f''(x)>0$，当$x_0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f''(x)<0$，

$\therefore f'(x_0)=\cos x_0-\frac{1}{x_0+1}=\cos x_0-\sqrt{\sin x_0}=\sqrt{1-\sin^2 x_0}-\sqrt{\sin x_0}$

$\because x_0\in\left(0,,\frac{\pi}{6}\right),\sin x_0<\frac{1}{2},\therefore f'(x_0)>0, f'(1)=0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

$\therefore$当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$，当$0<x<x_0$时，$f'(x)>0$

$\therefore$存在$x_1\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(x_1)$=0，即$\cos x_1=\frac{1}{x_1+1}$

$\therefore f(x)$在$(-1,0)$上单调递减，在$(0,x_1)$上单调递增，在$\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

$\because f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)>0$

$\therefore f(x)$在$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上有且只有一个零点，即$x=0$，

综上所述，$f(x)$有且仅有2个零点。

【点评】

这次高考导数罕见的没出现在压轴位置，而是放在了倒数第二题。所考察方法与知识点中规中矩，整体难度中等偏难。

第一问一改往年常考的含参讨论单调性，转而利用“零点存在性定理”证明函数存在极值，且此处找到的极值点对第二问有很大的启发和帮助。第二问是往年的热门题型：“零点个数问题”，利用“零点存在性定理”的核心在于“找点”，而如何找点就要利用到第一问的结论，再结合隐零点—整体代入的思想，即可找到我们所需要的点。

本题需要考生有扎实的基本功，对于常见的处理导数的方法与技巧要熟练掌握，走江湖地利用“洛必达”描述函数图像在本题是行不通的。

21（12 分）

为治疗某种疾病，研制了甲，乙两种新药，希望知道哪种新药更有效，为此进行动物实验．实验方案如下:每一轮选取两只白鼠对药效进行对比试验．对于两只白鼠，随机选一只施以甲药，另一只施以乙药．一轮的治疗结果得出后，再安排下一轮试验．当其中一种药治愈的白鼠比另一种药治愈的白鼠多4只时，就停止试验，并认为治愈只数多的药更有效．为了方便描述问题，约定:对于每轮试验，若施以甲药的白鼠治愈且施以乙药的白鼠未治愈则甲药得1分，乙药得-1分；若施以乙药的白鼠治愈且施以甲药的白鼠未治愈则乙药得1分，甲药得1分；若都治愈或未治愈则两种药均得0分．甲，乙两种药的治愈率分别记为和，一轮试验中甲药的得分记为．

（1）求X的分布列；

（2）若甲药，乙药在试验开始时都赋予4分，$P_i(\mathrm{i}=0,1,2...,8)$表示“甲药的累计得分为$i$时，最终认为甲药比乙药更有效”的概率，则$P_0=0,P_8=1,P_i=aP_{i-1}+bP_i+cP_{i+1}(\mathrm{i}=1,2...7)$， 其中$a=P\left(X=-1\right),b=P\left(X=0\right),c=P\left(X=1\right)$,假设$\alpha=0.5,\beta=0.8$．

（i）证明: $\left\{P_{i+1}-P_i\right\}\left(i=0,1,2,...,7\right)$为等比数列；

（ii）求P_4，并根据P_4的值解释这种方案的合理性．

【答案】

（1）根据题意，X 的分布列为

X	-1	0	1
P	$\beta(1-\alpha)$	$\alpha\beta+(1-\alpha)(1-\beta)$	$\alpha(1-\beta)$

（2）i）根据题意 $a=0.4,b=0.5,c=0.1$．进而

$P_i=0.4P_{i-1}+0.5P_i+0.1P_{i+1}\Leftrightarrow P_{i+1}=5P_i-4P_{i-1}$

于是 $P_{i+1}-P_i=4(P_i-P_{i-1})$，

因此$\{P_{i+1}-P_i\}(i=0,1,2,...,7)$为等比数列．

ii）根据 i）的结果，当$i=0,1,2,...,7$时，有

$P_{i+1}-P_i=4^i(P_i-P_{i-1})$

分别取$i=0,1,2,...,7$，累加可得

$$P_8-P_0=\sum_{i=0}^{7}4^i(P_1-P_0)\Rightarrow P_1=\frac{3}{4^8-1}$$

因此 $P_4-P_0=\sum_{i=0}^{3}4^i(P_1-P_0)\Rightarrow P_4=\dfrac{4^4-1}{4^8-1}=\dfrac{1}{257}$．

由 P_4 的值很小，说明这种试验方案可以准确的将更有效的乙药分辨出来．

【点评】

（1）难度难题。一直以来 21 题的位置几乎都是导数的天下，概率统计大题从 2018 年高考开始往压轴靠近，今年终于“喧宾夺主”放在最后一题，表明全国教育变革的决心，也一直贯彻考纲“解决实际问题”的出题导向。

（2）区分度明显。本题实际难度并非很大，但今年高考大题打破常规，顺序的调整会打乱考生的节奏，部分考生不敢轻易花时间做本题，并且本题乍看之下以为很麻烦，实际情况就是第一问送分题，简单分布列；第二问则披着概率统计的外衣，实际是考察数列中构造新数列的思维，根据提示难度不是很大；第三问则仿照 2017 年出发，考

察小概率事件的实际运用。

（3）导向明确。2018 年概率统计结合函数导数考察，今天概率统计结合数列考察，故全国卷继续贯彻“结合数学知识解决实际问题”的导向，应该是接下来全国卷的趋势。

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{4t}{1+t^2} \end{cases}$（$t$ 为参数）。以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系。直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+11=0$

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值

【答案】（1）$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，$2x+\sqrt{3}y+11=0$；（2）$\sqrt{7}$

【解析】（1）由 C 的参数方程可得 $x=\dfrac{-t^2-1+2}{1+t^2}=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$，$y=\dfrac{4t}{1+t^2}$，可得 $\dfrac{y}{x+1}=2t\Rightarrow t=\dfrac{y}{2(x+1)}$，代入 $y=\dfrac{4t}{1+t^2}$ 化简可得 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$；极坐标方程中令 $\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$ 可得直线 l 的直角坐标方程为 $2x+\sqrt{3}y+11=0$。

（2）由 C 的直角方程课得其另一参数方程形式：$\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=2\sin\varphi \end{cases}$（$\varphi$ 为参数），可得 C 上的点 $(\cos\varphi,2\sin\varphi)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{\left|2\cos\varphi+2\sqrt{3}\sin\varphi+11\right|}{\sqrt{2^2+\sqrt{3}^2}}=\dfrac{\left|4\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)+11\right|}{\sqrt{7}}$，所以当 $\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-1$ 即 $4\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)+11=7$ 时有 $d_{\min}=\sqrt{7}$

【点评】考察参数方程、极坐标方程与直角坐标方程的相互转化，曲线 C 的消参计算比较非常规，有一定计算难度；求动点到直线距离最值属常规题型，难度适中。

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知a，b，c为正数，且满足$abc=1$．证明：

（1）$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$；

（2）$(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\ge 24$．

【答案】见解析

【解析】（1）$\because\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})abc=bc+ac+ab$

要使$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le a^2+b^2+c^2$成立，

即证$bc+ac+ab\le a^2+b^2+c^2$，

即证$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-abc\ge 0$，

即证$(a-b)^2+(b-a)^2+(a-c)^2\ge 0$，

显然，证明成立．

（2）

$$\begin{aligned}&(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3\\&=2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2)\\&=2(a^3+b^3+c^3)+3(\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2}{abc})\\&=2(a^3+b^3+c^3)+3(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b})\\&\ge 2\times 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3}+3(2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}})\\&=6+18\\&=24\end{aligned}$$

【点评】主要考察分析法证明不等式与基本不等式的运用，属于中等题．