第二章

线性规划

线性规划是运筹学中最重要的分支，也是运筹学的基础。线性规划问题最早是苏联学者康托洛维奇(L.V. Kantorovich，1912—1986)于 1939 年提出的，但他的工作当时并未广为人知。第二次世界大战中，美国空军的一个研究小组 SCOOP(Scientific Computation Of Optimum Programs，最优程序的科学计算)在研究战时稀缺资源的最优化分配问题时，提出了线性规划问题。丹齐格(G.B.Dantzig)于 1947 年提出了求解线性规划问题的单纯形法，单纯形法至今还是求解线性规划最有效的方法之一。

本章将介绍线性规划的模型和基本概念以及单纯形法的基本原理、软件求解方法及线性规划在经济分析中的应用。

第一节　线性规划实例与模型

运用线性规划方法解决实际问题的前提是把实际问题转化为数学问题，也就是建立线性规划模型，不同类型的问题建立线性规划模型的方法不尽相同。下面通过具体实例学习建立线性规划模型的方法。

一、线性规划实例

线性规划的应用领域十分广泛，主要包括生产计划、物资调运、资源优化配置、物料配方和经济规划等问题，在第一章(绪论)中介绍了生产计划问题，下面介绍另外两种决策问题。

例 2-1　合理配料问题。

某饲料厂用玉米胚芽粕、大豆饼和酒糟等 3 种原料生产 3 种不同规格的饲料，由于 3 种原料的营养成分不同，因而不同规格的饲料对 3 种原料的比例有特殊要求，具体要求及产品价格、原料价格、原料数量见表 2-1，试制订总利润最大的生产计划。

表 2-1　工厂生产数据

规格要求	产品 Q_1	产品 Q_2	产品 Q_3	原料单价/(元/kg)	原料可用量/kg
原料 P_1	⩾15%	⩾20%	25%	1.7	1500
原料 P_2	⩾25%	⩾10%		1.5	1000
原料 P_3			⩽40%	1.2	2000
单位产品的利润/(元/kg)	2	3	2.3		

(1) 问题分析。

合理配料问题是一个特殊的生产计划，该问题与第一章中案例的生产计划的不同之处在于产品对原料的消耗量不明确，只给了一个限制范围，同时原料之间不发生化学反应，产品的产量等于原料之和。因而方案就不是只确定产品的产量，还需要明确生产不同产品原料的数量，设 x_{ij} 为生产第 j 种饲料使用第 i 种原料的数量 $(i=1,2,3; j=1,2,3)$，则第 j 种饲料的产量为 $\sum_{i=1}^{3} x_{ij}\,(j=1,2,3)$，第 i 种原料的使用量为 $\sum_{j=1}^{3} x_{ij}\,(i=1,2,3)$。

问题的目标是生产利润最大化，而利润等于销售收入减去成本，销售收入等于价格乘以产量，即 $2\sum_{i=1}^{3} x_{i1}+3\sum_{i=1}^{3} x_{i2}+2.3\sum_{i=1}^{3} x_{i3}$，成本等于购买原料的支出，等于原料价格乘以原料需求数量，即 $1.7\sum_{j=1}^{3} x_{1j}+1.5\sum_{j=1}^{3} x_{2j}+1.2\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$。所以总利润为

$$2\sum_{i=1}^{3} x_{i1}+3\sum_{i=1}^{3} x_{i2}+2.3\sum_{i=1}^{3} x_{i3}-1.7\sum_{j=1}^{3} x_{1j}-1.5\sum_{j=1}^{3} x_{2j}-1.2\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$$

问题的约束包括原料供给限制、产品规格限制和变量自身限制，其中原料供给限制要求原料的需求量小于等于最大供给量，即

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leqslant 1500$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{2j} \leqslant 1000$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{3j} \leqslant 2000$$

产品的规格限制要求不同原料占总产量的比例符合要求，即

$$\frac{x_{11}}{\sum_{i=1}^{3} x_{i1}} \geqslant 0.15,\ \frac{x_{21}}{\sum_{i=1}^{3} x_{i1}} \geqslant 0.25$$

$$\frac{x_{12}}{\sum_{i=1}^{3} x_{i2}} \geqslant 0.2,\ \frac{x_{22}}{\sum_{i=1}^{3} x_{i2}} \geqslant 0.1$$

$$\frac{x_{13}}{\sum_{i=1}^{3} x_{i3}} = 0.25,\ \frac{x_{33}}{\sum_{i=1}^{3} x_{i3}} \leqslant 0.4$$

上述约束是分式约束，为了写成线性规划形式，转化成以下等价形式，即

$$x_{11} - 0.15\sum_{i=1}^{3} x_{i1} \geqslant 0,\ x_{21} - 0.25\sum_{i=1}^{3} x_{i1} \geqslant 0$$

$$x_{12} - 0.2\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \geqslant 0,\ x_{22} - 0.1\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \geqslant 0$$

$$x_{13} - 0.25\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 0,\ x_{33} - 0.4\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \leqslant 0$$

变量非负限制为

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3$$

(2) 模型。

该工厂的生产计划问题就是在原料需求不超过可用量的限制下使得总利润最大，因而对应的数学模型为

$$\max\ 2\sum_{i=1}^{3} x_{i1} + 3\sum_{i=1}^{3} x_{i2} + 2.3\sum_{i=1}^{3} x_{i3} - 1.7\sum_{j=1}^{3} x_{1j} - 1.5\sum_{j=1}^{3} x_{2j} - 1.2\sum_{j=1}^{3} x_{3j}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \le 1500, \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \le 1000, \sum_{j=1}^{3} x_{3j} \le 2000 \\ x_{11} - 0.15\sum_{i=1}^{3} x_{i1} \ge 0, x_{21} - 0.25\sum_{i=1}^{3} x_{i1} \ge 0 \\ x_{12} - 0.2\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \ge 0, x_{22} - 0.1\sum_{i=1}^{3} x_{i2} \ge 0 \\ x_{13} - 0.25\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 0, x_{33} - 0.4\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \le 0 \\ x_{ij} \ge 0, i = 1, 2, 3;\ \ j = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{2-1}$$

提　示

(1) 配料问题是一种特殊的生产计划问题，其与第一章(绪论)中的生产计划问题的区别在于一般生产计划问题中生产单位产品对原料的消耗量是确定的，但配料问题中生产单位产品对原料的消耗量是不确定的，只给了一个数量限制范围，因而仅用每种产品的产量不能表示出原料的消耗量，需要把产品产量和原料的消耗量同时作为变量。

(2) 由于配料问题中没有发生化学反应，原料的数量和就是产品的产量，因而题目中把产品的产量用原料数量和替换，减少了 3 个变量。不替换也可以，但必须在约束中添加“产量等于原料消耗量和”这一组约束。

例 2-2　运输问题。

一个啤酒公司在山东有 n 个生产厂，每个生产厂计划期内生产的数量为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$。这 n 个生产厂的产品销往山东各市地，公司把山东市场分成了 m 个销售区，每个销售区计划期内的销售量预计为 $b_j(j=1,2,\cdots,m)$。假设生产总量和预期销售总量相等，且已知从第 i 个生产厂运单位产品到第 j 个销售区的运价为 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$。问应如何组织运输才能使总运费最小？

(1) 问题分析。

该问题是一个典型的运输问题，生产厂是供应地，销售区是需求地。问题的变量是从第 i 个生产厂运到第 j 个销售区的产品数量，设为 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，则总运费为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$，从第 i 个生产厂运出的总量为运到各销售区之和，即 $\sum_{j=1}^{m}x_{ij}(i=1,2,\cdots,n)$，运到第 j 个销售区的产品数量等于从各生产厂运输之和，即 $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}(j=1,2,\cdots,m)$。显然，运出的量不能超过生产量，运入的量不能低于需求量，由于生产总量和预期销售总量相等，所以每个生产厂运出量正好等于生产量，每个销售区的运入量等于需求量，即有约束

$$\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j \quad j=1,2,\cdots,m$$

(2) 模型。

在供求约束下使得总费用最小的线性规划模型为

$$\min \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=a_i & i=1,2,\cdots,n\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=b_j & j=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geqslant 0 & i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{2-2}$$

该规划是针对一般情况建立的，不同公司的具体数据不同，把数据代入模型就可以得到具体实例的模型。

提　示

(1) 建立模型的基础是对问题的分析，分析问题需要明确问题的基本要素，问题的基本要素对应模型的变量、目标和约束等基本要素。

(2) 建立模型的过程就是用数学语言表述模型的 3 个基本要素的过程。首先确定变量，也就是主动改变量，然后用变量表示其他量，给出约束和目标函数。

(3) 在建立模型时不要遗漏变量非负约束，当变量表示数量时，如果取值不会为负值，则需要添加变量非负约束。

二、线性规划模型

通过上面 3 个实例可以看出，线性规划的目标可能是最大也可能是最小，约束可能是等式也可能是不等式，3 个实例的变量都是非负的，有时变量或部分变量要求允许取负值，称为自由变量。因而，一般的线性规划模型的形式为

$$
\begin{aligned}
&\min\quad c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&\text{s.t.}\begin{cases}
a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i & i=1,2,\cdots,p\\
a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots\ a_{in}x_n\geqslant b_i & i=p+1,\cdots,m\\
x_j\geqslant 0;\ j=1,2,\cdots,q\\
x_j\text{无限制}\ j=q+1,q+2,\cdots,n
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2-3}
$$

其中 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为决策变量，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为目标函数系数，a_{ij} 为约束系数。记变量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，向量 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 为价值向量，向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 为右端向量，矩阵

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

为系数矩阵。

如果变量都是非负的，约束都是不等式，并且对于目标是求最小的线性规划模型，不等号都是大于等于号，或者对于目标是求最大的线性规划模型，不等号都是小于等于号，则称为规范形式的线性规划模型，模型为

$$
\begin{aligned}
&\min\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\
&\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}
\end{aligned}
\qquad\text{或}\qquad
\begin{aligned}
&\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\
&\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}
\end{aligned}
$$

如果线性规划的目标是求最小，约束都是等式，变量都是非负，则称为标准形式的线性规划模型，其形式为

$$\min \ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

提 示

(1) 有些教材中标准形式是以最大为目标，这不影响问题的说明，只要在一本书中统一要求就可以。

(2) 一般形式的线性规划不能用矩阵形式表示，因为其约束的符号不统一。

三、基本概念

为了求解模型，首先给出一些常用的概念，给变量的每个分量一个赋值就得到规划的一个解，如果解满足所有的约束条件，则称为可行解，由可行解组成的集合称为可行解集，也称为可行域，对于标准形式的线性规划，其可行解集可写为

$$D=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$$

求解线性规划是要在可行解集合中寻找使得目标函数值最优的解，在可行域中目标函数值最小(或最大)的可行解称为最优解，最优解的目标函数值为最优值。最优解的全体称为最优解集合，对于以最小为目标的线性规划，其最优解集合可写为

$$O=\{\boldsymbol{x}\in D\,|\,\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}y,\forall y\in D\}$$

提 示

(1) 线性规划的解不要求是可行的，这与方程组或不等式组的解有所区别。

(2) 最优解不一定唯一，可以有多个解是最优解，但最优值一定是唯一的。

四、模型转换

实际问题的线性规划模型往往是一般形式的，而在求解或者分析模型时需要标准形式或者规范形式，这就需要把一般形式的线性规划转化为标准形式或者规范形式。模型形式的转化主要是把不符合要求的格式转化为符合要求的格式，如把自由变量转化为非负变量、把不等式约束转化为等式约束及把求最大的目标转化为求最小的目标等。下面分别考虑变量、目标和约束的转化问题。

1. 变量转换

为了保证模型等价，需要用非负变量替换自由变量，如果用一个非负变量无法保证模型的线性，因而用两个非负变量的差来替换一个自由变量，即令自由变量 $x_j=x_j^+-x_j^-$，其中 x_j^+、x_j^- 为非负变量。

显然，如果 $x_j^+>x_j^-$，则 $x_j>0$；如果 $x_j^+<x_j^-$，则 $x_j<0$；如果 $x_j^+=x_j^-$，则 $x_j=0$。这样就把 x_j 的正负转化为 x_j^+ 与 x_j^- 的大小关系。在模型中把所有的 x_j 用 $x_j^+-x_j^-$ 替换，则可以减

少一个自由变量，如果还有自由变量可用同样方法处理。

2．目标转换

一个函数的最大值与其相反数函数的最小值在同一个变量取值上达到，并且两个目标值互为相反数，即 $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = -\min -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$。在目标转化时对于 $\max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，用 $\min -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 替换，求得的最优解相同，而最优值互为相反数。

3．约束转换

约束的转换主要是需要把不等式转化为等式，在转化时用一个新的非负变量表示不等式两边的差，用大的一边减去小的一边，通过变量非负约束来代替不等式约束。

对于大于等于的不等式 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$，令 $s_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$，则 $s_i \geqslant 0$ 与不等式等价，约束可以写成

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots \ a_{in}x_n - s_i = b_i \\ s_i \geqslant 0 \end{cases}$$

对于小于等于的不等式 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$，令 $s_i = b_i - a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$，则 $s_i \geqslant 0$ 与不等式等价，约束可以写成

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i \\ s_i \geqslant 0 \end{cases}$$

引入的非负变量称为松弛变量，表示不等式的松紧性，当其等于 0 时不等式取等号，当其大于 0 时不等式取严格大于号。对于两种不等式之间的转化，通过不等式两边同乘以 −1 就可以实现，一个等式等价于两个符号相反的不等式。

提　示

(1) 引入的非负变量和松弛变量的符号可以和模型原有变量一致，也可以用新的符号在同一个模型中统一起来，一个符号不能表示两个变量。

(2) 模型转化一般先转化变量，再考虑目标和约束。

(3) 不等式转化为等式可以简单记为加上或减去一个非负变量，左边大则是减法，左边小则是加法。

例 2-3　把问题转化为标准形式。

$$\max \ -x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：该题目有一个自由变量，约束都是不等式，目标函数求最大，因而转化为标准形式需要把自由变量化为非负变量，把目标变成最小，约束化为等式。首先引入两个非负变量，即 x_3、x_4，令 $x_2 = x_3 - x_4$，代入规划变为

$$\max \ -x_1+(x_3-x_4)$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-(x_3-x_4)\geqslant -2\\ x_1-2(x_3-x_4)\leqslant 2\\ x_1+(x_3-x_4)\leqslant 5\\ x_i\geqslant 0 \quad i=1,3,4\end{cases}$$

然后目标函数乘负号，目标变为求最小，引入松弛变量x_5、x_6、x_7，约束变为等式，规划为

$$\min \ x_1-x_3+x_4$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-x_3+x_4-x_5=-2\\ x_1-2x_3+2x_4+x_6=2\\ x_1+x_3-x_4+x_7=5\\ x_i\geqslant 0 \quad i=1,3,4,5,6,7\end{cases}$$

该规划即为标准形式的数学规划。

延伸阅读 2-1

线性规划的发展史

20 世纪 30 年代，苏联科学院院士康托洛维奇写过一本书，讲述了解决经济问题的数学方法，其中就有线性规划的论述，不过当时没有引起人们的注意。第二次世界大战开始以后，一批在军队服役的英国科学家，为了保密，把他们的工作对外统称为线性规划，这个名称一直沿用至今。其后在美国军队中也有了类似的机构，在美国空军服役的科学家丹齐格(Dantzig，1914—2005)把他用来解决某些管理问题的方法加以总结，提出了单纯形算法，这个算法一直保密。直到 1947 年丹齐格从军队离开，转任斯坦福大学的教授之后才公开发表。康托洛维奇由于这方面的贡献获得诺贝尔经济学奖，丹齐格则被称为线性规划之父。

线性规划之父的趣事

据说丹齐格在开学的第一天，因故迟到了，看到黑板上写着两道题目，以为是老师留的课外作业，就抄了下来。在做题的过程中，丹齐格感到很困难，他心想，第一天上课的题目就不会做，后面的课还怎么上啊？便下定决心不做出这两道题就退学。最后用了几周的时间才完成，为此他还特意向奈曼(Neyman，1894—1981)教授道歉。几周后的一个周末清晨，丹齐格被一阵急促的敲门声吵醒，奈曼教授一进门就激动地说："我刚为你的论文写好一篇序言，你看一下，我要立即寄出去发表。"丹齐格过了好一阵才明白奈曼教授的意思：原来那是两道统计学中著名的未解决问题，他竟然当成课外作业解决了！后来谈到这件事时，丹齐格感慨道：如果自己预先知道这是两道著名的未解决的问题，根本就不会有信心和勇气去思考，也不可能解决它们。这个传奇故事说明：一个人的潜能是难以预料的，

成功的障碍往往来自心理上的畏难情绪；一定要相信自己，保持积极的态度。

第二节　可行区域与基本可行解

为了寻找线性规划的求解方法，首先从简单的规划入手，寻找规律，然后再试图把规律推广到一般情况。影响线性规划模型复杂程度的关键因素是变量的个数，只有一个变量的线性规划过于简单，因而先考虑两个变量的问题。

一、图解法

考虑线性规划

$$\min \ c_1x_1 + c_2x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geqslant b_3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

由于只有两个变量，线性规划的解属于二维空间，因而可以在平面坐标系中把其可行域表示出来，具体的方法如下。

(1) 用坐标系的两个数轴分别表示两个变量 x_1、x_2。

(2) 两个变量的方程对应二维空间的直线，不等式对应二维空间的半平面，因而线性规划的可行域是由半平面或直线的交集组成，如图 2-1 所示。

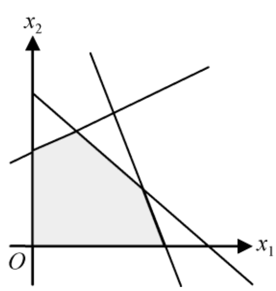

图 2-1　线性规划可行域

(3) 目标函数值是两个变量的函数，在三维空间里可以用平面表示，在二维空间里表示相对困难。困难就在于目标函数值是不断变化的，因而先考虑目标函数值不变的情况，也就是考虑目标函数值相等的点的分布。给定目标函数值就得到一个方程，对应二维空间里的直线，该直线上的点对应规划目标函数值相等，所以称为等值线，如图 2-2 所示。

当目标函数取不同的值时就可以得到不同的等值线，这些等值线相互平行，并且沿着法线方向目标函数值逐步增加或减少。

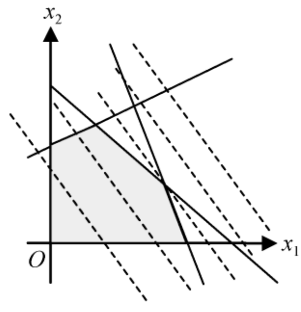

图 2-2　线性规划等值线

当等值线在可行域里沿着变好的方向移动时目标函数值会变好，因而希望尽可能地沿着变好的方向移动，直到不能移动为止，也就是再移动就与可行域没有交点了，此时对应的等值线与可行域的交点就是最优解，对应的目标函数值就是最优值。

例 2-4　解线性规划

$$\max\ z = -x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant -2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：由于该规划只有两个变量，因而考虑用图解法求解，具体步骤如下。

第一步：建立坐标系，令两个坐标轴分别代表 x_1、x_2。

第二步：画出可行域。分别画出 3 个约束的半空间，对于第一格约束先画出半空间的边界线，也就是方程

$$2x_1 - x_2 = -2$$

对应的直线，该直线把平面分成两部分，取 $2x_1 - x_2 \geqslant -2$，判断的方法是固定 x_1 不变，让 x_2 变化时看 $2x_1 - x_2$ 是增加还是减少，由于让 x_2 增加时 $2x_1 - x_2$ 是减少的，因而取下半部分。同理，可以画出其他两个约束，由于 x_1、$x_2 \geqslant 0$，在第一象限，具体如图 2-3 所示。

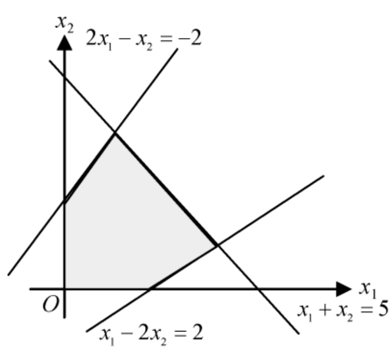

图 2-3　可行域

第三步：画出目标函数等值线。先令目标函数等于某个值，如取值为 2，在图 2-4 中画出 $-x_1+x_2=2$ 对应的直线，然后过原点画平行线，由于原点对应的目标函数值为 0，小于该直线的值为 2，从原点到该直线的方向就是增加方向，如图 2-4 所示。

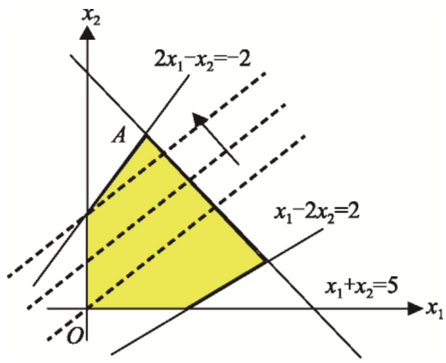

图 2-4　等值线

第四步：求最优解。由于问题是求最大，沿着增加方向移动等值线，确定最优解的位置在两个边界线的交点 A 处，列出两条直线的方程，得方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1-x_2=-2 \end{cases}$$

解该方程组得最优解为(1,4)，对应的最优值为 3。

提　示

(1) 对于两个变量的线性规划，其可行域可能是空的，或者无界，如在图 2-5 中把第一个约束改为小于等于、第二个约束改为大于等于，则两个半空间在第一象限交为空集，如把第三个约束去掉则约束无界，如图 2-6 所示。

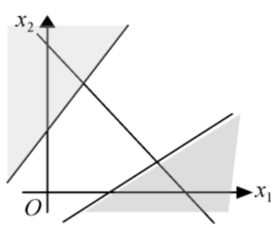

图 2-5　可行域为空集

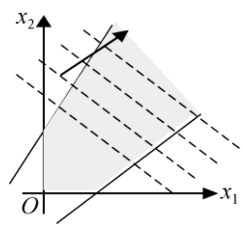

图 2-6　可行域无界

(2) 线性规划可能没有最优解，在可行域为空集时肯定没有最优解，当可行域无界时可能没有最优解，如对图 2-6 求 x_1+x_2 最大时，等值线可以无限上移。

在上面求解过程中可以发现，对于可行域内部的点，由于存在邻域使得其邻域内的所有点都是可行解，因而沿任何方向平移都可以得到一个更好的可行解，因而其不可能成为最优解。

如果等值线与某个边界线平行且最优方向指向该边界线上，则边界线上每个解都是最

优解，对应的两个顶点也是最优解。例如，在图 2-7 所示的可行域中求 $x_1 + x_2$ 最大，则最优解在 $x_1 + x_2 = 5$ 对应的线段上；否则的话最优解则在某一个顶点上或者最优解不存在，因而可以得到以下重要结论：

对于一个线性规划，如果最优解存在，则一定可以找到一个顶点是最优解。

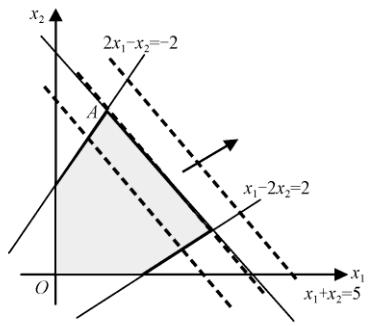

图 2-7　有无穷多个最优解

顶点的个数是有限的，如果该结论对一般情况也成立，则为寻找最优解指明了方向。

二、可行域的几何结构

为了考虑一般线性规划的求解方法，首先需要给出一般情况下顶点的概念，这就需要考虑线性规划可行区域的几何结构，下面以标准形式的线性规划为例考虑其可行域的几何特征和求解算法。

根据图解法可知，对于两个变量的线性规划，其可行域是由若干个直线围成的向外凸出的区域，称这种类型的图形为凸集。凸集相对于其他集合而言其最大的特点是，对凸集合的任意两点的连线段还在集合中，而非凸集合一定存在两个点其连线上的部分点不在集合中，如图 2-8 所示。

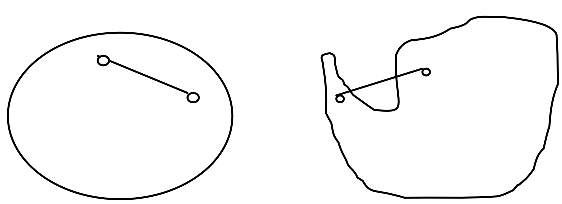

图 2-8　凸集与非凸集合

因而有凸集一般的定义如下。

定义 2-1　设 $S \in \mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间的点集，若对任意 $x \in S$、$y \in S$ 以及任意 $\lambda \in [0,1]$ 都有

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in S$$

就称 S 是一个凸集。

定理 2-1　线性规划的可行域

$$D=\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant 0\}$$

是凸集。

定理 2-2　任意多个凸集的交集还是凸集。

下面给出几个特殊的凸集。

超平面，有

$$H=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$$

半空间，有

$$H^+=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{b}\}\text{；}\quad H^-=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\}$$

多面凸集，有

$$S=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}x=b_i;i=1,2,\cdots,p;\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant b_i\quad i=p+1,p+2,\cdots,p+q\}$$

定义 2-2　设 S 为凸集，$x\in S$，如果对任意 y、$z\in S$ 和 $0<\lambda<1$，都有

$$x\neq\lambda y+(1-\lambda)z$$

则称 x 为 S 的顶点。

给出定点的定义后，就希望能够把二维变量的结论推广到 n 维空间，也就是要回答以下问题。

问　题

对于给定的线性规划：

(1) 可行域顶点的个数是否有限？

(2) 最优解是否一定在可行域顶点上达到？

(3) 如何找到顶点？

由于上述定义是从集合的角度给出的，不具有可操作性，下面换一个思路，从解方程组的角度重新定义顶点。

三、基可行解与基本定理

1. 基本设定

考虑标准形式的线性规划，即

$$\min\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{c}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m,\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m-n}$，并且假定可行域 $D=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geqslant 0\}$ 不空。由于有可行解，所以方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解，根据线性代数可知

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{b})$$

如果 $r(\boldsymbol{A})<m$，则

$$r(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}) < m$$

此时存在多余的等式，可以去掉多余约束。因而假设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的，即 $r(\boldsymbol{A}) = m$。

2. 基可行解

对于新的问题，人们首先想到的是转化为已有的问题解决，求解超过两个变量的线性规划时人们也想到是否能转化为两个变量的问题，也就是要减少变量个数。显然，对于标准形式的线性规划，通过解方程组可以用部分变量表示另一部分变量，可以实现减少变量的目的。

考虑以下线性规划，即

$$\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

利用消元法，通过行的初等变换可以把线性规划的等式约束变成

$$\begin{cases} x_1 + \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\ x_2 + \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\ \quad \vdots \\ x_m + \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} x_1 = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{a}_{1n}x_n \\ x_2 = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2m+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{a}_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ x_m = \bar{b}_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{a}_{mn}x_n \end{cases} \tag{2-4}$$

变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 由变量 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 表示出，给定 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的取值就可以得到 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的取值，对应的解必然满足方程组，如果满足则 $x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0$ 就是线性规划的可行解。把表达式代入规划的目标函数，就会变成

$$\begin{aligned} & c_1(\bar{b}_1 - \bar{a}_{1m+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{a}_{1n}x_n) + \cdots + c_m(b_m - \bar{a}_{mm+1}x_{m+1} - \cdots - \bar{a}_{mn}x_n) + c_{m+1}x_{m+1} + \cdots + c_nx_n \\ & = c_1\bar{b}_1 + \cdots + c_mb_m - (c_1\bar{a}_{1m+1} + \cdots + c_m\bar{a}_{mm+1} - c_{m+1})x_{m+1} - \cdots - (c_1\bar{a}_{1n} + \cdots + c_m\bar{a}_{mn} - c_n)x_n \end{aligned}$$

该函数是 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的函数，记 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$ 的系数为 $\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \cdots, \eta_n$，即

$$\begin{aligned} \eta_{m+1} &= c_1\bar{a}_{1m+1} + \cdots + c_m\bar{a}_{mm+1} - c_{m+1} \\ &\ \ \vdots \\ \eta_n &= c_1\bar{a}_{1n} + \cdots + c_m\bar{a}_{mn} - c_n \end{aligned}$$

在求线性规划问题时目标函数的常数项可以不写，对应的最优解相同，求出最优解后在最优值上再加上常数项即可，因而规划等价于

$$\min\ -\eta_{m+1}x_{m+1}-\cdots-\eta_n x_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\bar{a}_{1m+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{1n}x_n\leqslant\bar{b}_1\\ \bar{a}_{2m+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{2n}x_n\leqslant\bar{b}_2\\ \quad\vdots\\ \bar{a}_{mm+1}x_{m+1}+\cdots+\bar{a}_{mn}x_n\leqslant\bar{b}_m\\ x_{m+1},\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}$$

从而把规划变成一个只有 $n-m$ 个变量的问题，如果约束比变量少两个，就可以用图解法求解。

提　示

(1) 被表示出的变量不一定是前 m 个，但可以通过调整变量符号让其变为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$，为了便于说明问题，下面总是设定被表示出变量为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$。

(2) 消元法的结果也不是唯一的，也就是说表达式不唯一，但对应的可行解集合是唯一的，只不过使用不同的分量来表示。

对于式(2-4)，有一个特殊的解，也就是令 $x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n$ 都等于零，代入该表达式可得

$$\begin{cases}x_1=\bar{b}_1\\ x_2=\bar{b}_2\\ \quad\vdots\\ x_m=\bar{b}_m\end{cases}$$

对应的解 $(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{b}_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 是由表达方式唯一确定的，不同的表达方式对应不同的解，这个解就称为基解。如果 $(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{b}_m,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$，则称为基可行解。对应的变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为基变量，记为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$，$x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_n$ 为非基变量，记为 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$。

基变量对应约束等式的系数组成的矩阵称为基阵，记为 $\boldsymbol{B}$，显然 $\boldsymbol{B}$ 是可逆方阵。剩余各列组成的子阵记为 $\boldsymbol{N}$，则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$。对应的方程可以写为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{b}$$

根据矩阵运算的规则可知，行的初等变换等价于左乘一个可逆矩阵，而消元法的结果是使基变量的系数由 $\boldsymbol{B}$ 变为了单位矩阵，因而等价于左乘了 $\boldsymbol{B}^{-1}$，左乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 后上式变为

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

即

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

令 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}=0$，同样可以得到基解

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ 0\end{pmatrix}$$

求解基解也可以直接从基阵入手，先确定系数矩阵的 m 个线性无关列组成一个可逆方阵，然后方程组两边左乘其逆矩阵，按上式计算即可。

例 2-5　考虑问题。

$$\min\ z = x_1 - x_2$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基阵为

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对应的基解分别为 $\boldsymbol{x}^1 = (0,0,2,2,5)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{x}^2 = (-1,0,0,3,6)^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{x}^1$ 是基可行解，$\boldsymbol{x}^2$ 不是基可行解。

如果 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} > 0$，则称该基可行解为非退化的，如果一个线性规划的所有基可行解都是非退化的，则称该规划为非退化的。

可以证明基可行解就是线性规划可行域的顶点，而且二维空间顶点的性质在 n 维空间也是成立的，有以下定理。

定理 2-3　一个线性规划，如果有可行解，则至少有一个基可行解。

该定理说明，只要有可行解就一定有基可行解，当然如果没有可行解也就不会有最优解，问题就不用求了。

定理 2-4　一个可行解 $\boldsymbol{x}$ 是基可行解的充分必要条件是 $\boldsymbol{x}$ 是可行集合的顶点。

该定理说明，基可行解和顶点是等价的概念，顶点对应着基可行解，基可行解也对应着顶点。

定理 2-5　一个线性规划如果有有限的最优值，则一定存在一个基可行解是最优解。

由于只要有最优解就一定存在基可行解是最优解，该定理说明，可以在基可行解里面找最优解。由于一个基可行解对应一个基阵，而基阵是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 阶子阵，所以其个数不会超过 C_n^m，一般会比这个数小。因而从基可行解里找最优解会比在连续区域找最优解简单很多，剩余的问题是如何求最优的基可行解。

提　示

(1) 基可行解由基变量或基阵唯一确定，只要确定基变量，其对应约束矩阵的列就构成

基阵，由基阵就可以计算出基可行解。

(2) 对于退化的问题，一个顶点可能对应多个基可行解，此时各变量取值相同，但基变量不同，对应的基变量取值为 0。

(3) 定理 2-5 说明，如果有最优解则一定存在基可行解是最优解，反过来最优解不一定都是基可行解，如对于图解法中当等值线与边界线平行时会有无穷多个最优解。

第三节　单纯形算法

求解最优基可行解的单纯形算法是用迭代算法，基本想法如下。

先找出一个基可行解，然后判断是否是最优解，如果是最优解就停止，如果不是最优解就按照某种规则找到一个新的基可行解或者说明该规划没有最优解。

实现上述想法需要解决以下 3 个技术问题。

(1) 初始可行解，第一个基可行解。

(2) 最优性条件，判断基可行解是最优解的条件。

(3) 迭代规则，从一个基可行解得到另一个基可行解的方法。

有些问题的基可行解很容易观察出来。例如，当右端向量大于等于 0，并且系数矩阵中含有单位矩阵时，以单位矩阵对应的分量为基变量，就可以得到一个基可行解。因而本节先考虑第二、三两个技术问题。

一、最优性条件

给定一个基可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$，对应的可行基为 $\boldsymbol{B}$，则等式约束变为

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

称上式为该基可行解的**典式**。基变量可以用非基变量表示，即

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$$

为了判断基可行解是否是最优解，需要考虑目标函数，把上式代入目标函数，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}) + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\ &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{B}} = 0$，则 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}$。

基可行解对应的非基变量等于 0，确定该基可行解在什么情况下是最优解，也就是问在变量非负限制下，什么条件下 $x_{\mathrm{N}} = 0$ 时 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}x_{\mathrm{N}}$ 最小？

显然对于一个不小于零的变量，只有其系数是大于等于零的，对应的线性函数才会在其取值为 0 的时候达到最小。也就是说，如果 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}} \leqslant 0$，对所有 $x_{\mathrm{N}} \geqslant 0$ 的取值有

$$-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geqslant 0$$

此时基可行解对应的 $x_{\mathrm{N}} = 0$，使得 $-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}x_{\mathrm{N}}$ 达到了最小值，因而可得出以下定理。

定理 2-6　如果 $\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}} \leqslant 0$，则基可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为线性规划的最优解。

$\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{N}}$ 是检验基可行解是否是最优解的依据，称其为检验数。对于给定的基可行解，计算出其检验数，如果检验数小于等于 0，则可以判断该基可行解就是最优解。

二、迭代规则

如果检验数不满足小于等于 0 的条件，则至少有一个分量是大于 0 的，不妨设第 k 个分量 $\xi_k > 0$，则当 $x_k \geqslant 0$ 增加时，$-\xi_k x_k$ 就会变小，对应的目标函数就会减少。

对于有多个检验数大于零的基可行解，如果检验数大于 0 的非基变量都增加，会使问题分析起来变得复杂，这里只让一个检验数大于 0 的非基变量增加，其他的非基变量还都取值为 0，比较新的解与基可行解的目标函数值的变化。

基可行解的目标函数值为 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，当第 k 个非基变量 $x_k \geqslant 0$ 改变而其他非基变量不变时，目标函数变为 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{T}} x_k$，对应的基变量取值为

$$\begin{cases} x_1 = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1k} x_k \\ x_2 = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2k} x_k \\ \quad \mathrm{M} \\ x_m = \bar{b}_m - \bar{a}_{mk} x_k \end{cases}$$

由于 $\xi_k > 0$，$x_k \geqslant 0$ 越大对应的目标函数越小。从目标函数的角度希望 x_k 尽可能大，但必须满足可行约束，也就是必须使变量大于等于 0。对于基可行解 $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \mathrm{L}\ , \bar{b}_m, 0, \mathrm{L}\ , 0)^{\mathrm{T}} \geqslant 0$，如果某个 $\bar{a}_{ik} \leqslant 0$，则 $\bar{a}_{ik} x_k \leqslant 0$，$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} x_k$ 必然大于等于 0，如果对所有的基变量对应的 $\bar{a}_{ik} \leqslant 0$，则 x_k 增加后基变量都满足大于等于零，对应的解还是可行解，因而 x_k 可以无限增加，对应的目标函数值可以无限减少，线性规划就不会有最小的可行解，即有下面的定理。

定理 2-7　如果基可行解的第 k 个非基变量的检验数 $\xi_k > 0$，而该非基变量在典式中的系数都小于等于 0，则线性规划没有最优解。

根据上述定理，对于给定基可行解，如果存在一个非基变量，其检验数大于 0，而典式中对应的系数都小于等于 0，则可以判断线性规划没有最优解，可以停止计算。

如果对于某个非基变量，其检验数大于零，但典式中的系数不是都小于 0，也就是说，存在 $\bar{a}_{ik} > 0$，则 x_k 就不能无限增加，因为要保证基变量 $x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik} x_k \geqslant 0$，则要求

$$x_k \leqslant \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}$$

如果有在典式中 x_k 的系数有多个大于 0 的，则对于对应的每个基变量都要求取值大于等于 0，因而都要求 x_k 小于等于对应右端取值和系数的比值，即要求

$$x_k \leqslant \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \middle| \bar{a}_{ik} > 0 \quad i = 1, 2, \mathrm{L}\ , m \right\}$$

假设最小值是第 l 个基变量 x_l 对应的比值，即

$$\min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}} \middle| \bar{a}_{ik} > 0 \quad i = 1, 2, \mathrm{L}\ , m \right\} = \frac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{lk}}$$

令 $x_k = \dfrac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{lk}}$，则基变量 x_l 的取值就会变成 0，其他基变量的取值变为 $x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{ik}\dfrac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{lk}}$，其他非基变量的取值依然为 0，这样就可以得到一个新的可行解。可以证明该可行解是一个基可行解，与原有基可行解相比较，x_k 由非基变量变成基变量，称为入基变量。x_l 由基变量变为非基变量，称为出基变量。

定理 2-8　对于给定的基本可行解 $\boldsymbol{\bar{x}}$，若向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的第 k 个分量 $\xi_k > 0$，而向量 $\boldsymbol{B}^{-1}A_k$ 至少有一个正分量，则可以找到一个新的基本可行解 $\boldsymbol{\hat{x}}$。

新的基可行解的目标函数值为 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \xi_k{}^{\mathrm{T}}\dfrac{\bar{b}_l}{\bar{a}_{lk}}$，如果 $\bar{b}_l > 0$，则目标函数值会严格下降。

三、算法步骤

首先给出一个基可行解，然后计算出其检验数和典式，如果检验数小于等于 0，则该基可行解就是最优解；否则取一个检验数大于 0 的非基变量作为入基变量。检查典式中该变量的系数，如果所有的系数都小于等于 0，则该数学规划没有最优解。如果存在大于 0 的系数，则在系数大于 0 的行中取右端向量与入基变量的系数的比值最小者，把该行对应的基变量作为出基变量，就可以得到一个新的基可行解。计算新的基可行解的检验数和典式，重复上面的过程，如果问题是非退化的，则每次代换后目标函数会严格下降，从而基可行解不会重复。由于基可行解的总数有限，所以当给定一个初始基可行解后，经过有限步必然可以得到一个最优基可行解或者说明问题无最优解，因而可以得到一个求线性规划的算法。具体步骤如下。

步骤 1：找一个初始基可行解。

步骤 2：求出基可行解的典式和检验数。

步骤 3：求 $\xi_k = \max\{\xi_j \mid j = 1, 2, \cdots, n\}$。

步骤 4：如果 $\xi_k \leqslant 0$ 则该基可行解就是最优解，停止；否则转步骤 5。

步骤 5：如果 $\boldsymbol{B}^{-1}A_k \leqslant 0$，则问题无最优解，停止；否则转步骤 6。

步骤 6：求 $\theta = \min\{\bar{b}_i / \hat{a}_{ik} \mid \hat{a}_{ik} > 0, i = 1, 2, \cdots, m\} = \bar{b}_r / \hat{a}_{rk}$。

步骤 7：以 X_k 替代 X_r 得到一个新的基可行解，转步骤 2。

该算法是基于基可行解的算法，称为单纯形算法。

提　示

(1) 如果有多个检验数大于 0 的非基变量，一般是选择检验数最大的非基变量作为入基变量，这样会使入基变量增加相同的值时目标函数减少量会最大。但不是必须选最大的，也可以选择其他检验数大于 0 的非基变量。

(2) 计算 $\theta = \min\{\bar{b}_i / \hat{a}_{ik} \mid \hat{a}_{ik} > 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ 的目的是保证改变以后的基解还是可行解，也就是基变量取值还大于等于 0，如果有多个同时达到最小，只选其中一个作为出基变量。

(3) 不同选择可能迭代次数不同，如果最优解唯一，最后得到的结果应该是一样的；如

果最优解不唯一，最后得到的最优解不一定相同，但最优值一定相等。

(4) 对于退化的问题，为了避免循环，选择出基变量和入基变量时可以选择第一个符合条件的。

四、单纯形表

单纯形算法的主要计算问题就是典式和检验数的计算，从一个基可行解的典式到另一个基可行解的典式改变的因素不是很多，因而可以利用原来典式的信息求新的典式，这就是单纯形算法的核心。

为了便于计算典式和检验数，用一个表格来描述基可行解的典式和检验数，整个计算过程也可以在表上进行，则称描述基可行解的典式和检验数的表格为单纯形表。下面以具体实例为例说明具体的处理方法。

假设基可行解的基 $\boldsymbol{B}=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$，其对应的单纯形表如表 2-2 所示。

表 2-2　单纯形表

基变量	x_1 …	x_r …	x_m	x_{m+1} …	x_k …	x_n	
	0	0	0	ξ_{m+1}	ξ_k	ξ_n	$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
x_1	1			$\bar{a}_{1m+1}$ …	$\bar{a}_{1k}$ …	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r		1		$\bar{a}_{rm+1}$ …	$\bar{a}_{rk}$ …	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m			1	$\bar{a}_{mm+1}$ …	$\bar{a}_{mk}$ …	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

单纯形分成 3 行 3 列，第一列写基变量，第一行第二列写出所有的变量名称，第一行第三列空，第二行第二列写基可行解的检验数，第二行第三列写基可行解的目标函数值，第三行第二列写典式左端的变量系数，第三行第三列写典式右端常数。

初始基可行解的单纯形表计算可以按照下列方法。

(1) 首先把线性规划的目标函数系数的相反数写在第二行第三列变量对应位置，第二行第三列填写 0，把约束矩阵和右端向量分别写在第三行，如表 2-3 所示。

表 2-3　初始数据表

基变量	x_1 …	x_r …	x_m	x_{m+1} …	x_k …	x_n	
	$-c_1$	$-c_r$	$-c_m$	$-c_{m+1}$	$-c_k$	$-c_n$	0
x_1	a_{11}	a_{1r}	a_{1m}	a_{1m+1} …	a_{1k} …	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_r	a_{r1}	a_{rr}	a_{rm}	a_{rm+1}……	a_{rk} …	a_{rn}	b_r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	a_{m1}	a_{mr}	a_{mm}	a_{mm+1} …	a_{mk} …	a_{mn}	b_m

(2) 通过行的初等变换把基变量对应约束的系数变为单位向量，假设基变量为前 m 个，如表 2-4 所示。

表 2-4　初始单纯形表

基变量	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
	0		0		0	ξ_{m+1}		ξ_k		ξ_n	$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
x_1	1					$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r			1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m					1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

(3) 典式的每行乘以对应基变量的目标函数系数加到单纯形表的第二行中，就可以得到检验数和基可行解的目标函数值，也就是基可行解对应的单纯形表。

对于给定的基可行解，首先看第二行检验数是否都小于等于 0，如果是就停止，当前基可行解就是最优解；否则就选择一个检验数大于 0 的非基变量作为入基变量。如取 x_k 为入基变量，则看其对应的列中典式检验数是否都小于等于 0，如果是线性规划就没有最优解，停止运算；否则计算 $\theta=\min\{\bar{b}_i/\hat{a}_{ik}\,|\hat{a}_{ik}>0，i=1,2,\cdots,m\}$，假设第 r 行对应的比值最小，则确定该行对应的基变量，让其作为出基变量，则可得一新的基可行解，如表 2-5 所示。

表 2-5　转轴表

基变量	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
	0		0		0	ξ_{m+1}		$\xi_k>0$		ξ_n	$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
x_1	1					$\bar{a}_{1m+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_r			1			$\bar{a}_{rm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{rn}$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m					1	$\bar{a}_{mm+1}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

新基可行解单纯形表的计算是在现有单纯形上进行的，只需通过行的初等变换把第 k 列第 r 行交叉位置的元素变成 1，把第 k 列其他元素变成 0 即可。具体方式如下。

(1) 首先第 r 行每个元素都除以 $\bar{a}_{rk}$，把第 k 列第 r 行交叉位置的元素变成 1，如表 2-6 所示。

(2) 每一行减去第 r 行乘以该行第 k 列的数，把该行第 k 列的数变为 0，就可以得到新基可行解的单纯形表，如表 2-7 所示。

表 2-6　消元法表

基变量	$x_1\ \cdots$	$x_r\ \cdots$	x_m	$x_{m+1}\ \cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
	0	0	0	ξ_{m+1}	$\xi_k>0$		ξ_n	$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
x_1	1			$\bar{a}_{1m+1}\cdots$	$\bar{a}_{1k}$	$\cdots$	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k		$\dfrac{1}{\bar{a}_{rk}}$		$\dfrac{\bar{a}_{rm+1}}{\bar{a}_{rk}}\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{\bar{a}_{rn}}{\bar{a}_{rk}}$	$\dfrac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m			1	$\bar{a}_{mm+1}\cdots$	$\bar{a}_{mk}$	$\cdots$	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

表 2-7　新单纯形表

基变量	$x_1\ \cdots$	$x_r\ \cdots$	x_m	$x_{m+1}\ \cdots$		$x_k\ \cdots$		x_n	
	0	$\cdots-\xi_k/\bar{a}_{rk}\cdots$	0	$\hat{\xi}_{m+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\hat{\xi}_n$	$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{b}$
x_1	1	$\hat{a}_{1r}$		$\hat{a}_{1m+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\hat{a}_{1n}$	$\hat{b}_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_k	$1/\bar{a}_{rk}$			$\hat{a}_{rm+1}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\hat{a}_{rn}$	$\hat{b}_r$
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	$\hat{a}_{mr}$	1		$\hat{a}_{mm+1}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\hat{a}_{mn}$	$\hat{b}_m$

其中，$\hat{a}_{ij}=\bar{a}_{ij}-\bar{a}_{rj}\bar{a}_{ik}/\bar{a}_{rk}(i=1,2,\cdots,m,i\neq r,j\neq k)$；$\hat{a}_{rj}=\bar{a}_{rj}/\bar{a}_{rk}$，$\hat{b}_r=\bar{b}_r/\bar{a}_{rk}$，$\hat{b}_i=\bar{b}_i-\bar{a}_{ik}\bar{b}_i/\bar{a}_{rk}$。$\hat{\xi}_j=\xi_j-\bar{a}_{rj}\xi_k/\bar{a}_{rk}$；$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{B}}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\bar{b}_r\xi_k/\bar{a}_{rk}$。

提　示

(1) 在单纯形表中基变量对应的检验数一定是 0，典式中的系数是单位向量，典式的右端常数必然是大于等于 0。

(2) 在单纯形表中不要求基变量都在前 m 个，每个基变量对应典式中一行，基变量对应行就是基变量对应列中等于 1 的那一行，基可行解对应基变量的取值就是对应行右端常数。

(3) 如果某个基变量对应取值等于 0，也就是出现退化的情况，继续按算法规则计算，如果出现循环就按避免循环的方法处理。

例 2-6　求解线性规划。

$$\min\ -x_2+2x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=2\\x_2-3x_3+x_4=1\\x_2-x_3+x_5=2\\x_j\geqslant 0\quad j=1,2,\cdots,5\end{cases}$$

以 x_1、x_4 和 x_5 为基变量可以得到初始基可行解 $(2,0,0,1,2)^{\mathrm{T}}$，对应的单纯形表如表 2-8

所示。

表 2-8　单纯形表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	1	−2	0	0	0
x_1	1	−2	1			2
x_4		1	−3	1		1
x_5		1	−1		1	2

由于 $\xi_2 = 1 > 0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵该列有大于 0 的元素，所以取 x_2 为入基变量。计算 $\theta = \min\left\{\frac{1}{1},\frac{2}{1}\right\} = 1$，所以取第二个约束对应的基变量 x_4 为出基变量，就可以得到一个新的基可行解，在表 2-8 中，把 x_2 对应的列变成单位向量，系数矩阵第 2 行对应的元素为 1，则可以得到该基可行解的单纯形表如表 2-9 所示。

表 2-9　新单纯形表(1)

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	1	−1	0	−1
x_1	1	0	−5	2	0	4
x_2	0	1	−3	1	0	1
x_5	0	0	2	−1	1	1

由于 $\xi_3 = 1 > 0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵该列有大于 0 的元素，所以取 x_3 为入基变量。计算 $\theta = \frac{1}{2}$，所以取第 3 个约束对应的基变量 x_5 为出基变量，就可以得到一个新的基可行解。在表 2-9 中，把 x_3 对应的列变成单位向量，系数矩阵第 3 行对应的元素为 1，则可以得到该基可行解的单纯形表如表 2-10 所示。

表 2-10　新单纯形表(2)

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	−1/2	−1/2	−3/2
x_1	1	0	0	−1/2	5/2	13/2
x_2	0	1	0	−1/2	3/2	5/2
x_3	0	0	1	−1/2	1/2	1/2

由于检验数都小于等于 0，所以该基可行解就是最优解，对应的最优解为 $(13/2, 5/2, 1/2, 0, 0)$，最优值为 $-3/2$。

第四节　初始基可行解

初始基可行解一般不能直接给出，需要用一些方法求出。主要的方法有两阶段法和大 M 法，下面主要介绍两阶段法。

一、辅助规划

考虑线性规划

$$\min\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{2-5}$$

不妨假设$\boldsymbol{b}\geqslant 0$，如果某一个元素小于 0，该方程两边乘以−1 后可以使右端数变成正数。

如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中包含单位矩阵，令单位矩阵的列对应的变量为基变量，其他变量为非基变量，则可以得到一个基解，基变量对应取值为$\boldsymbol{b}$。由于$\boldsymbol{b}\geqslant 0$，所以该基解是基可行解。

如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中不包含单位矩阵，为了寻找初始基可行解，在每个约束后面加上一个新的变量，则新的系数矩阵后面就会包含一个单位矩阵，记新引入的变量为$y_1,y_2,\cdots,y_m$，则约束变为

$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}\tag{2-6}$$

其系数矩阵为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{I})$。对于满足该约束的可行解$(x,y)$，如果新增变量$y$取值为 0，则原有变量$x$的取值就是规划式(2-5)的可行解；反之，对于规划式(2-5)的任意可行解，令y取值为 0，则可得约束式(2-6)的可行解。因而找规划式(2-5)的可行解等价于找约束式(2-6)的新增变量y取值为 0 的可行解，由于$y\geqslant 0$，因而$y=0$是函数$\sum_{i=1}^{m}y_i$的最小值，以式(2-6)为约束、$\sum_{i=1}^{m}y_i$最小为目标，可得下列规划，即

$$\min\sum_{i=1}^{m}y_i$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\end{cases}\tag{2-7}$$

线性规划式(2-7)称为原规划的辅助规划，称y为人工变量。

二、第一阶段

显然，如果原规划式(2-5)有可行解，则线性规划式(2-7)的最优值为 0；反之亦然。并且x是规划式(2-5)的可行解的充分必要条件是$(x,0)$是辅助规划式(2-7)的最优解。如果用单纯形算法求辅助规划，可以得到其最优基可行解。

由于$b\geqslant 0$，线性规划式(2-7)有可行解$\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$，同时$y\geqslant 0$，所以$\sum_{i=1}^{m}y_i\geqslant 0$，即问题的目标函数有下界，所以该问题一定有最优解。以y的分量为基变量、x的分量为非基变量，就可以得到规划的初始基可行解$\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$。利用单纯形算法求解该规划一定可以得到最优的基可行解，

假设最优基可行解为$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$。如果最优值为 0，则 $\tilde{y}=0$，所以 $\tilde{x}$是式(2-5)的可行解。由于$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$是规划式(2-7)的基可行解，所以其非零分量对应系数矩阵的列向量线性无关。非零分量都在 $\boldsymbol{x}$ 中，因而 $\tilde{x}$的非零分量对应的系数矩阵的列向量也线性无关，所以 $\tilde{x}$是线性规划式(2-5)的基可行解，从而是原规划的初始基可行解。

线性规划的最优基可行解一般会出现以下 3 种情况。

(1) 最优值大于 0，则原问题没有可行解。

(2) 最优值等于 0 且人工变量 $\boldsymbol{y}$ 全为非基变量，则此时 $\tilde{x}$是线性规划(2-5)的基可行解，且基变量不变。在规划式(2-7)最优基可行解的单纯形表里删除 $\boldsymbol{y}$ 对应的列，同时计算出原问题的检验数，就可以得到原问题初始基可行解的单纯形表。

(3) 最优值等于 0 且人工变量 $\boldsymbol{y}$ 中有分量为基变量，此时 $\tilde{x}$是线性规划(2-5)的基可行解，但 $\boldsymbol{x}$ 中基变量的个数不足，此时需要把人工变量中的基变量变成非基变量，而把 $\boldsymbol{x}$ 中的某些非基变量变成基变量，对应的单纯形表也需要变换。具体方法如下。

为了便于说明问题，假设辅助规划的最优基可行解对应的最后一个人工变量为基变量，原变量中前 $m-1$ 个分量为基变量，其单纯形表如表 2-11 所示。

表 2-11　最优基可行解的单纯形表

基变量	x_1	…	x_{m-1}	x_m	…	x_n	y_1	…	y_{m-1}	y_m	
	0	…	0	ζ_m	…	ζ_n	ζ_{n+1}	…	ζ_{n+m-1}	0	0
x_1	1	…	0	$\bar{a}_{1m+1}$	…	$\bar{a}_{1n}$	$\bar{a}_{1n+1}$	…	$\bar{a}_{1n+m-1}$	0	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{m-1}	0	…	1	$\bar{a}_{m-1m}$	…	$\bar{a}_{m-1n}$	$\bar{a}_{m-1n+1}$	…	$\bar{a}_{m-1n+m-1}$	0	$\bar{b}_{m-1}$
y_m	0	…	0	$\bar{a}_{mm}$	…	$\bar{a}_{mn}$	$\bar{a}_{mn+1}$	…	$\bar{a}_{mn+m-1}$	1	$\bar{b}_m$

由于最优值为 0，所以每个人工变量的取值必然都为 0，y_m 对应行的右端必然为 0，即 $\bar{b}_m=0$。

如果在表 2-11 所示基变量 y_m 对应的行中，$\boldsymbol{x}$ 中的非基变量的系数都为 0 的话，则说明原规划中该约束可以用其他约束线性表示出，也就是说，该约束是多余约束，与假设行满秩矛盾，因而 $\boldsymbol{x}$ 中的非基变量的系数必然有不等于 0 的。

此时在该行系数不等 0 的 $\boldsymbol{x}$ 的非基变量中任选一个，让其替代基变量 y_m 作为基变量，就可以得到一个新的基可行解。由于上述单纯形表中该行右端的值 $\bar{b}_m=0$，所以在进行行的初等变换时，单纯形表的最后一列不变，也就是新基可行解的变量取值和目标函数值不变，该解的目标函数值还是为 0，因而还是辅助规划的最优基可行解。如果该最优基可行解还有人工变量是基变量，继续上述过程，直至所有的人工变量都变为非基变量。

提 示

此时新最优基可行解的检验数不一定都小于等于 0，也就是说，检验数小于等于 0 是最优基可行解的充分条件，而不是必要条件，在退化情况下，最优基可行解的检验数可能出现大于零的情况。

三、第二阶段

总之，如果最优值等于 0，通过替换可以把人工变量的基可行解变成非基变量，最后可以得到基变量全部在 x 中的最优基可行解。此时把人工变量对应的列删除，同时把检验数一行变成原问题系数的相反数，得到如表 2-12 所示的数据表。

表 2-12 原始问题的数据表

基变量	x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	
	$-c_1$	…	$-c_m$	$-c_{m+1}$	…	$-c_n$	0
x_1	1	…		$\hat{a}_{1m+1}$	…	$\hat{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	0	…	1	$\hat{a}_{mm+1}$	…	$\hat{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

然后通过行的初等变换把基变量对应的检验数变为 0，即分别用基变量对应的行乘以目标函数的系数，加在检验数那一行中，即可得到原问题的检验数和初始单纯形表，如表 2-13 所示。

表 2-13 原始问题的初始单纯形表

基变量	x_1	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	
	0	…	0	ξ_{m+1}	…	ξ_n	$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
x_1	1	…		$\hat{a}_{1m+1}$	…	$\hat{a}_{1n}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	0	…	1	$\hat{a}_{mm+1}$	…	$\hat{a}_{mn}$	$\bar{b}_m$

以该单纯形表作为原规划初始单纯形表，利用单纯形算法就可以求解原规划。

例 2-7 求解下面线性规划

$$\min\ 5x_1 + 21x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_j \geq 0;\ \ j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

解：如果以 x_4、x_5 为基变量，则可以得到该问题的基解 $(0,0,0,-2,-1)^{\mathrm{T}}$，不是可行解，而其第一个基可行解不能直接给出，下面用两阶段法求解。

首先引入人工变量，考虑问题

$$
\min \quad x_6 + x_7
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_7 = 1 \\ x_j \geq 0;\ \ j = 1,2,3,4,5,6,7 \end{cases}
$$

以 x_6 和 x_7 为基变量，可得第一个基可行解 $(0,0,0,0,0,2,1)^{\mathrm{T}}$，对应单纯形表如表 2-14 所示。

表 2-14　辅助问题的初始单纯形表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	2	0	8	−1	−1	0	0	3
x_6	1	−1	6	−1	0	1	0	2
x_7	1	1	2	0	−1	0	1	1

由于 $\xi_3 = 8 > 0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵该列有大于 0 的元素，所以取 x_3 为入基变量。计算 $\theta = \min\left\{\dfrac{2}{6},\dfrac{1}{2}\right\} = \dfrac{2}{6}$，所以取第一个约束对应的基变量 x_6 为出基变量，就可以得到一个新的基可行解。在表 2-14 中，把 x_3 对应的列变成单位向量，系数矩阵第一行对应的元素为 1，则可以得到该基可行解的单纯形表如表 2-15 所示。

表 2-15　辅助问题的单纯形表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	2/3	4/3	0	1/3	−1	−4/3	0	1/3
x_3	1/6	−1/6	1	−1/6	0	1/6	0	1/3
x_7	2/3	4/3	0	1/3	−1	−1/3	1	1/3

由于 $\xi_2 = 4/3 > 0$，所以该基可行解不是最优解，同时系数矩阵该列有大于 0 的元素，所以取 x_2 为入基变量。计算 $\theta = \dfrac{1}{3}\Big/\dfrac{4}{3}$，所以取第二个约束对应的基变量 x_7 为出基变量，就可以得到一个新的基可行解。在表 2-15 中，把 x_2 对应的列变成单位向量，系数矩阵第二行对应的元素为 1，则可以得到该基可行解的单纯形表如表 2-16 所示。

表 2-16　辅助问题的单纯形表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	0	0	0	0	0	−1	−1	0
x_3	1/4	0	1	−1/8	−1/8	1/8	1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	−3/4	−1/4	3/4	1/4

由于检验数都小于等于 0，所以对应的基可行解就是辅助问题的最优解，最优值为 0，且人工变量都是非基变量，所以得到原问题的基可行解，对应的基变量为 x_2 和 x_3，去掉人工变量对应的列，把检验数换成原规划目标函数系数的相反数，如表 2-17 所示。

表 2-17　原问题的数据表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	−5	0	−21	0	0	0
x_3	1/4	0	1	−1/8	−1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	−3/4	1/4

把基变量 x_3 的检验数化为 0，即用其对应典式第一行乘以 21 加在检验数行，可得对应的单纯形表如表 2-18 所示。

表 2-18　原问题的初始单纯形表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1/4	0	0	−21/8	−21/8	63/8
x_3	1/4	0	1	−1/8	−1/8	3/8
x_2	1/2	1	0	1/4	−3/4	1/4

由于 $\xi_1 = 1/4 > 0$，所以该基可行解不是原问题最优解，同时系数矩阵该列有大于 0 的元素，所以取 x_1 为入基变量。计算 $\theta = \min\left\{\frac{3}{8}\bigg/\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\bigg/\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{4}\bigg/\frac{1}{2}$，所以取第二个约束对应的基变量 x_2 为出基变量，就可以得到一个新的基可行解。在表 2-17 中，把 x_1 对应的列变成单位向量，系数矩阵第二行对应的元素为 1，则可以得到该基可行解的单纯形表如表 2-19 所示。

表 2-19　原问题的最优单纯形表

基变量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	−1/2	0	−11/4	−9/4	31/4
x_3	0	−1/2	1	0	−1/4	1/4
x_1	1	2	0	1/2	−3/2	1/2

由于检验数都小于等于 0，所以对应的基可行解就是原问题的最优解，最优值为 31/4，对应的最优解为 $(1/2, 0, 1/4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$。

提　示

(1) 人工变量的个数根据需要添加，如果原规划系数矩阵中包含部分单位向量，则可以少添加部分人工变量，只要能使系数矩阵中出现单位矩阵即可。

(2) 辅助规划的目标函数是新增的人工变量之和，不含原有变量。

延伸阅读 2-2

线性规划的多项式时间算法

线性规划问题小的只有几十到几百个变量，而大的问题则可能有几十万到几百万个变

量，虽然计算机越来越快，总有解决不了的问题，因而从 20 世纪 50—60 年代数学家致力于改进单纯形算法，使其能够解决越来越大的问题，这一时期是单纯形算法独领风骚的时代。

这一时期数学家开始思考算法的好坏，大致上说，计算机是通过有限的四则运算(加、减、乘、除)来求得问题的答案，给定一个问题，计算机最多需要多少次运算才能解决该问题呢？当然这与问题的规模有关，问题越大变量越多，需要的运算次数就越多。这种运算次数与问题规模的依赖关系就成为判断一种算法好与坏的标准。按照这个标准，单纯形算法是一个坏的算法，这一结论是由美国华盛顿大学的两位教授在 1971 年得出的。这在当时的理论界引起了轰动，我们使用已久的单纯形算法竟然是个“坏”算法！

那么究竟有没有解决线性规划的好算法呢？1979 年一位名不见经传的苏联数学家哈奇扬(L.G. Khachian)，发明了一种新算法来解决线性规划问题，他从理论上证明了这种椭球算法是一种好算法，把线性规划有没有好算法的问题彻底解决了，当时的《纽约时报》刊登了这一消息，哈奇扬本人也因此一炮走红。

第五节 求 解 软 件

学习单纯形算法是培养运筹学的基本理论素养，实际中的问题规模都比较大，一般不会用单纯形算法进行人工计算，需要借助软件求解线性规划模型。

求解线性规划的软件主要有三类：一类是专门求解数学规划的专业软件，如 LINGO 软件；一类是科学计算软件，如 Matlab、Scilab 等；还有一类是通用数据分析与处理软件，如 Excel 的规划求解工具等。LinGo 等专业软件具有求解速度快、精度高等优点，Excel 具有适用范围广、数据处理方便等优点，本节主要介绍 LINGO 软件和 Excel 的规划求解工具。

一、LINGO 软件

LINGO(Linear INteractive and General Optimizer，交互式的线性和通用优化求解器）由美国 Lindo 系统公司(Lindo System Inc.)推出，可以用于求解数学规划，也可以用于一些线性和非线性方程组的求解等，其功能十分强大，是求解优化模型的最佳选择。其特色在于内置建模语言，提供十几个内部函数，可以允许决策变量是整数(即整数规划，包括 0、1 整数规划)，方便灵活，而且执行速度非常快。

1. 下载和安装

LINGO 软件分为企业版和学生版，学生版可以在 Lindo 系统公司的网页(http://www.lindo. com)上注册后通过邮件方式获得。学生版的功能和企业版相同，只不过求解问题的规模有所限制，LINGO 9.0 学生版最多可以求解有 300 个变量和 150 个约束的规划问题，其整数变量限制是 30 个，一般遇到的问题规模不会超过上述限制。

下载后双击安装程序，就可以进入安装过程，安装过程中可以选择默认设置，安装后会在桌面显示软件图标，单击图标可以进入程序。

2. 窗口与界面

首次进入时会弹出 LINGO License Key 对话框，单击 Demo 按钮即可，如图 2-9 所示。

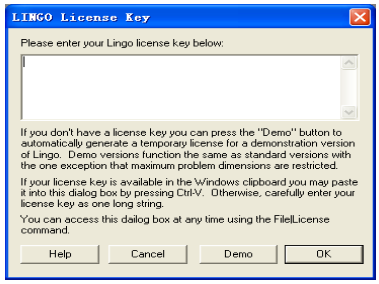

图 2-9　输入序列号对话框

随后出现几个对话框，单击 OK 按钮和第一个按钮就进入主页面，如图 2-10 所示。

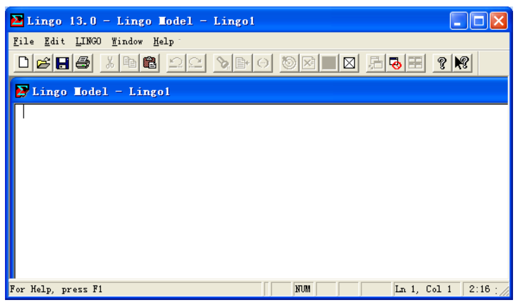

图 2-10　LINGO 主界面

LINGO 软件的界面和一般软件的界面类似，只是增加了 LINGO 的命令菜单和按钮，最常用的就是求解按钮，如图 2-11 所示。

图 2-11　求解按钮

3. 模型输入

模型输入是求解模型的第一步，LINGO 模型的输入方式有两种，这里只介绍最简单的模型输入方式，即直接书写方式。LINGO 模型的输入规则如下。

(1) 要以“model:”开始，以“end”结束，在中间输入目标和约束。

(2) 目标的输入以“max=”或“min=”开始，目标函数或约束输完后以“;”结束。

(3) 变量的名称以字母开始，由字母、数字和-等符号组成。

例如，考虑下列线性规划：

$$\min\ 3x_1+2x_2+x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+2x_2+x_3\leqslant 15 \\ 2x_1+5x_3\geqslant 18 \\ 2x_1+4x_2+x_3\leqslant 10 \\ x_j\geqslant 0 \quad j=1,2,3 \end{cases}$$

其模型输入为：

```
model:
min=3*x1+2*x2+x3;
x1+2*x2+x3<=15;
2*x1+5*x3>=18;
2*x1+4*x2+x3<=10;
End
```

提　示

(1) LINGO 的输入必须在英文半角状态下输入。

(2) LINGO 没有下标，可以用字母后面跟数字表示。

(3) LINGO 没有≤或≥号，用<= 和>=分别代表两种不等号。

(4) 在系数与变量之间要有“*”表示乘号。

(5) 变量大于等于零为默认要求，不用输入。如果要输入自由变量，需要用函数@free( )定义，每次只能定义一个。

(6) LINGO 内部函数必须以“@”开始。

(7) 输入有上下界的变量用@BND(下界，变量，上界)。

4. 结果输出

单击求解按钮就会弹出如图 2-12 所示的对话框。

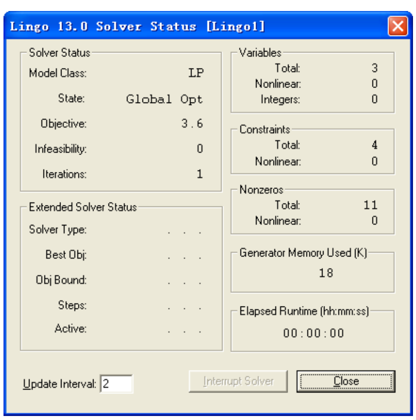

图 2-12　模型报告对话框

说明该模型的类型求解状态等信息，单击 Close 按钮就进入结果报告窗口，如图 2-13 所示。

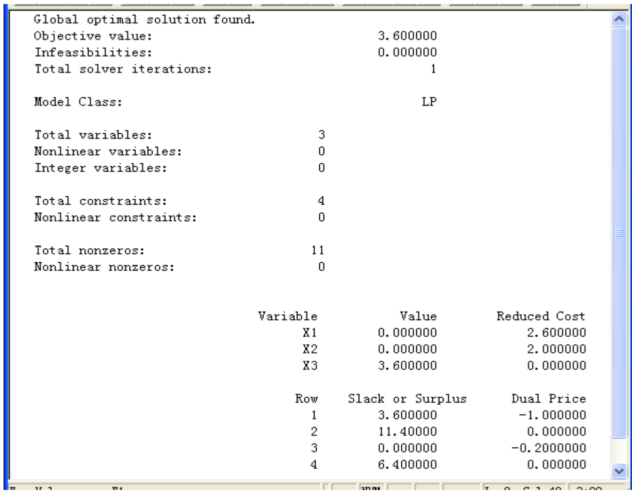

图 2-13　结果输出窗口

第一行说明该模型得到全局最优解；第二行给出最优值，中间部分介绍了模型的基本参数。在右下角部分有 Variable 和 Value 列，下面分别对应变量和变量的最优取值，对应列中模型最优解为 X1=0、X2=0、X3=3.6，最优值为 3.6。

提　示

本节只介绍了 LINGO 最简单的输入方式，该方式学习起来比较简单，但输入比较麻烦，特别是当变量和约束比较多时。LINGO 还有一种集合输入方式，具体见附录一。该方法学习起来比较难，但对于输入复杂的模型比较方便。

二、Excel 的规划求解

Microsoft Excel 是最常用的数据分析与处理软件，其使用方法见参考文献[12]。Microsoft Excel 中求解数学规划的工具是规划求解宏命令，一般在安装 Microsoft Excel 时不安装规划求解宏命令，在首次使用前必须装载。

装载宏命令的方法是在 Excel 的“工具”菜单中选择“加载宏”命令，会弹出图 2-14 所示对话框。

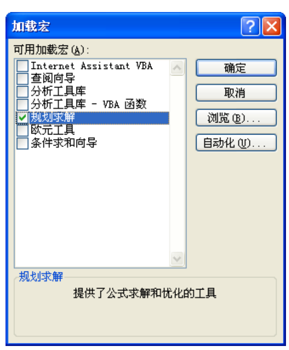

图 2-14　“加载宏”对话框