2019 年北京市朝阳区高三二模数学考试（文科）逐题解析

2019.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第 I 卷（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,x>1\}$， $B=\{x\,|\,x(x-2)<0\}$,则 $A\cup B=$

（A） $\{x\,|\,x>0\}$　　（B） $\{x\,|\,1<x<2\}$

（C） $\{x\,|\,1\leq x<2\}$　　（D） $\{x\,|\,x>0且x\neq 1\}$

【答案】A

【解析】解不等式 $x(x-2)<0$，解得 $0<x<2$

所以 $A\cup B=\{x\,|\,x>0\}$，故选 A

2. 复数 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$ 的虚部为

（A） $\sqrt{2}$　　（B） 1　　（C） 0　　（D） -1

【答案】B

【解析】 $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=\mathrm{i}-1$，所以虚部为 1，故选 B

3. 已知$a=\log_3 e$，$b=\ln 3$，$c=\log_3 2$，则a，b，c的大小关系是

（A）$c>a>b$　　（B）$c>b>a$

（C）$a>b>c$　　（D）$b>a>c$

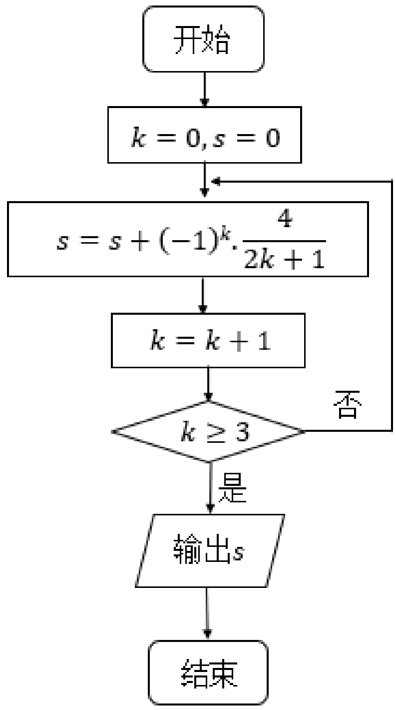
【答案】D

【解析】$a-c=\log_3\dfrac{e}{2}>0$，$\therefore a>c$，$a=\log_3 e<1$，$b=\ln 3>1$，$\therefore b>a$

$\therefore b>a>c$，故选 D

4. 在数学史上，中外数学家使用不同的方法对圆周率π进行了估算，根据德国数学家莱布尼茨在 1674 年给出的求π的方法绘制的程序框图如图所示.执行该程序框图，输出s的值为

（A） 4　　（B）$\dfrac{8}{3}$　　（C）$\dfrac{52}{15}$　　（D）$\dfrac{304}{105}$



【答案】C

【解析】$k=0$，$s=0$

（1）$s=0+(-1)^0\times\dfrac{4}{2\times0+1}=4$，$k=0+1=1$

（2）$s=4+(-1)^1\times\dfrac{4}{2\times1+1}=\dfrac{8}{3}$，$k=1+1=2$

（3）$s=\dfrac{8}{3}+(-1)^2\times\dfrac{4}{2\times2+1}=\dfrac{52}{15}$，$k=2+1=3\geq 3$

输出$s=\dfrac{52}{15}$，故选 C

5. 已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{2\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，则$|\vec{a}+\vec{b}|=$

（A）3　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）7　　（D）$\sqrt{7}$

【答案】B

【解析】$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+4+2\times2\times1\times(-\dfrac{1}{2})}=\sqrt{3}$，故选 B

6. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差$d\neq0$，则“a_1，a_3，a_9成等比数列”是“$a_1=d$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】证充分条件：$\because a_1$，a_3，a_9成等比数列

$\therefore a_3{}^2=a_1\cdot a_9$即$(a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+8d)$，$a_1{}^2+4a_1d+4d^2=a_1{}^2+8a_1d$，$4a_1d=4d^2$

$\because d\neq0$，$\therefore a_1=d$，充分条件成立

证必要条件：$\because a_1=d$，$\therefore a_3=a_1+2d=3d$，$a_9=a_1+8d=9d$

$\therefore a_3{}^2=9d^2$，$a_1\cdot a_9=9d^2$，$a_3{}^2=a_1\cdot a_9=9d^2\,(a_1=d\neq0)$，$\therefore a_3$为$a_1$和$a_9$的等比中项

必要条件成立

综上为充要条件，故选 C

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\ge a\\ -x, x<a\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 存在零点，则实数 a 的取值范围是

（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(0,+\infty)$　　（C）$(-\infty,1)$　　（D）$(1,+\infty)$

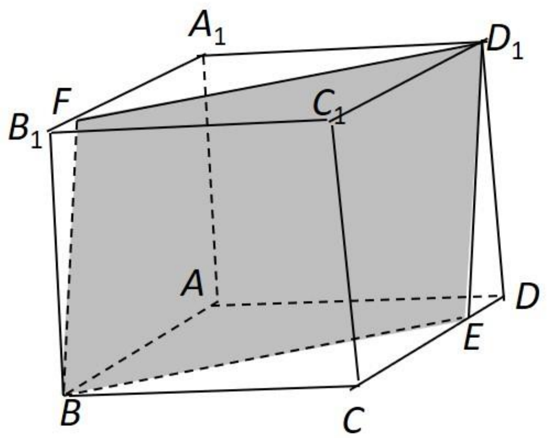
【答案】B

【解析】设 $f(x)$ 的零点为 x_0

$\because 2^x>0$ 恒成立，$\therefore x_0\in(-\infty,a)$

$f(x_0)=-x_0=0$，$x_0=0<a$，$\therefore a>0$，故选 B

8．在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为线段 CD 和 A_1B_1 上的动点，且满足 $CE=A_1F$，则四边形 D_1FBE 所围成的图形（如图所示阴影部分）分别在该正方体有公共顶点的三个面上的正投影的面积之和



（A）有最小值 $\frac{3}{2}$

（B）有最大值 $\frac{5}{2}$

（C）为定值3

（D）为定值2

【答案】D

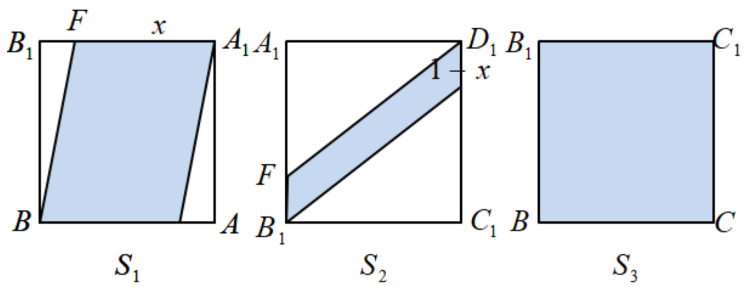
【解析】选取该图形在正方体有公共顶点的三个面

分别为面 B_1BAA_1，面 $A_1B_1C_1D_1$，面 B_1BCC_1 正投影的面积分别为 S_1，S_2，S_3，如图所示

设 $CE=A_1F=x$

$\therefore S_1=1\cdot x=x$，$S_2=1\cdot(1-x)=1-x$，$S_2=1\times1=1$

$\therefore$ 正投影的面积之和 $S=2$，故选 D



第 II 卷（非选择题，共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，共 30 分）

9．函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x$ 的最小正周期为_______.

【答案】π

【解析】$f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

最小正周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

10．已知点 $M(1,2)$ 在抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上，则 $p=$_______；点 M 到抛物线 C 的焦点的距离是_______.

【答案】2， 2

【解析】将 $M(1,2)$ 代入 $y^2=2px$ 中，$2^2=2p\cdot 1$，$\therefore p=2$

$\therefore$ 抛物线 $C:y^2=4x$

$\therefore M$ 到抛物线 C 的焦点的距离等于 M 到准线 $x=-1$ 的距离 d

$\therefore d=x_M+\frac{p}{2}=1+1=2$

11．圆 C：$x^2+(y-1)^2=1$ 上的点 P 到直线 l：$x-2y-3=0$ 的距离最小值是_______.

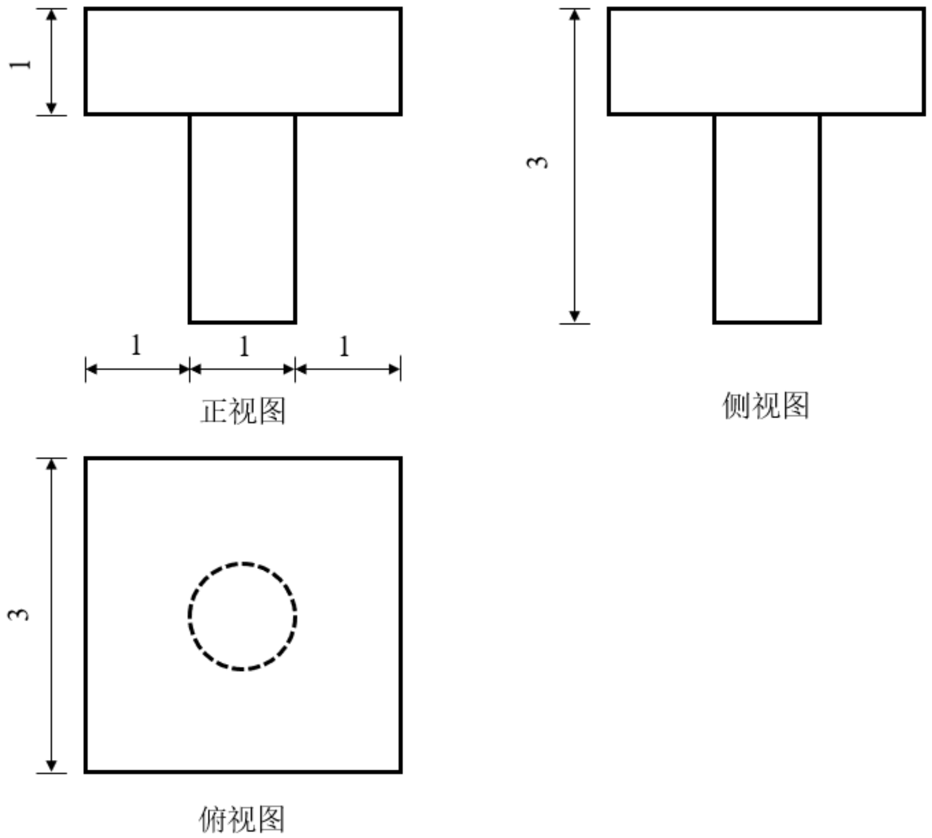
【答案】$\sqrt{5}-1$

【解析】圆 C 的圆心坐标为 $(0,1)$，半径 $r=1$

从而圆 C 的圆心到直线 l 的距离为 $d=\frac{|0-2-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}>r$

因此直线 l 与圆 C 相离，所求最小值为 $d-r=\sqrt{5}-1$

12. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为________.



【答案】$9+\frac{\pi}{2}$

【解析】由三视图可知该几何体由上下两部分组成

其中上部分为一个正四棱柱，底面边长为3，高为1，体积为$3\times3\times1=9$

下部分为一个圆柱，底面直径为1，因此底面半径为$\frac{1}{2}$

圆柱的高为$3-1=2$，体积为$\pi\times(\frac{1}{2})^2\times2=\frac{\pi}{2}$

因此该几何体的体积为两部分之和，即$9+\frac{\pi}{2}$

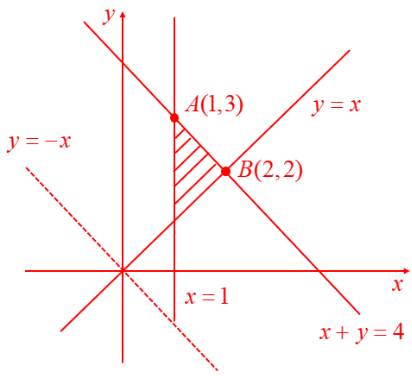
13. 已知实数 x， y 满足 $\begin{cases} x \geq 1, \\ y \geq x, \\ x+y \leq 4. \end{cases}$ 能说明“若 $z=x+y$ 的最大值是 4，则 $x=1$， $y=3$”为假命题的一组 (x,y) 值是_______.

【答案】$(2,2)$（答案不唯一）

【解析】如图做出可行域，目标函数为 $y=-x+z$

当直线 $y=-x+z$ 与直线 $y=-x+4$ 重合时，$z=x+y$ 的最大值是 4

由 $\begin{cases} x=1 \\ x+y=4 \end{cases}$ 得 $A(1,3)$，由 $\begin{cases} y=x \\ x+y=4 \end{cases}$ 得 $B(2,2)$



因此若 $z=x+y$ 的最大值是 4

只需满足 (x,y) 在线段 AB 上即可

不妨取 $B(2,2)$，即可说明原命题为假命题

14. 设全集 $U=\{1,2,3,\ldots,20\}$，非空集合 A， B 满足以下条件：

①$A \cup B = U$， $A \cap B = \varnothing$；

②若 $x \in A$， $y \in B$，则 $x+y \notin A$，且 $xy \notin B$.

当 $7 \in A$ 时，1_______ B（填 $\in$ 或 $\notin$），此时 B 中元素个数为_______.

【答案】$\in$， 18

【解析】

①若 $1 \in A$，

则当 $x \in B$ 时，$1 \cdot x = x \in B$，与 $x \in A$ 矛盾

$\therefore 1 \in B$

②$\because 7\in A$， $1\in B$

$\therefore 7+1=8\in B$， $7+8=15\in B$

若$6\in A$， 则$6+1=7\in B$与$7\in A$矛盾， $\therefore 6\in B$

$\therefore 6+7=13\in B$， $7+13=20\in B$

若$2\in A$， 则$8+2=10\in B$， $2\cdot 10=20\in A$， 与$20\in B$矛盾， $\therefore 2\in B$

$\because 2\in B$ $\therefore 7+2=9\in B$， $7+9=16\in B$， $2\cdot 7=14\in A$

若$3\in A$， 则$1+3=4\in B$， $9+3=12\in B$， 与$3\cdot 4=12\in A$矛盾， $\therefore 3\in B$

$\because 3\in B$， $\therefore 7+3=10\in B$， $7+10=17\in B$

$\because 2\in B$， $8\in B$， $\therefore 4\in B$

$\therefore 4+7=11\in B$， $\therefore 11+7=18\in B$

$\because 3\in B$， $15\in B$， $\therefore 5\in B$

$\therefore 5+7=12\in B$ $12+7=19\in B$

$\therefore A=\{7,14\}$

$B=\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20\}$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15. （本小题满分 13 分）

在等差数列$\{a_n\}$中，已知$a_1+a_3=12$，$a_2+a_4=18$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}$.

【解析】

（Ⅰ）因为$a_1+a_3=12$，$a_2+a_4=18$，所以$2d=6$，

所以$d=3$，$a_1+a_1+2d=12$，$\therefore a_1=3$，$a_n=3n$

（Ⅱ）因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$\{a_{3n}\}$为等差数列

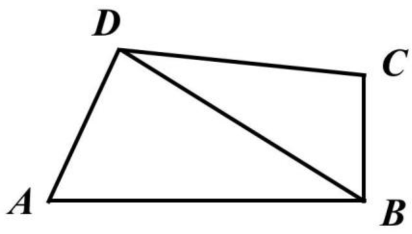
$$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{3n}=\frac{(a_3+a_{3n})\times n}{2}=\frac{9}{2}n^2+\frac{9}{2}n$$

16. （本小题满分 13 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$.已知 $AD=\sqrt{3}$，$BD=\sqrt{6}$.

（Ⅰ）求 $\sin\angle ABD$ 的值；

（Ⅱ）若 $CD=2$，且 $CD>BC$，求 BC 的长.



【解析】

（Ⅰ）在△ABD 中，由正弦定理知

$\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$ 即 $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\angle ABD}$

解得 $\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

（Ⅱ）$\because \angle ABD+\angle CBD=\angle ABC=90^\circ$

$\cos\angle CBD=\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

在△ABD 中，由余弦定理知

$BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cdot\cos\angle CBD=CD^2$

即 $BC^2+6-2BC\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}=4$，化简得 $BC^2-3BC+2=0$

解得 $BC=2$ 或 1

又$\because CD>BC$，$\therefore BC=1$

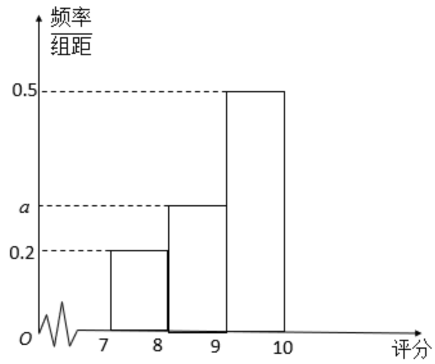
综上所述（1）$\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

（2）$BC=1$

17.（本小题满分 13 分）

某电视台举行文艺比赛，并通过网络对比赛进行直播，比赛现场由 5 名专家组成评委给每位参赛选手评分，场外观众也可以通过网络给每位参赛选手评分.每位选手的最终得分需要综合考虑专家评分和观众评分.某选手参加比赛后，现场专家评分情况如下表.另有约数万名场外观众参与评分，将观众评分按照$[7,8)$，$[8,9)$，$[9,10]$分组，绘成频率分布直方图如下图.

专家	A	B	C	D	E
评分	10	10	8.8	8.9	9.7



（Ⅰ）求a的值，并用频率估计概率，估计某场外观众评分不小于 9 的概率；

（Ⅱ）从现场专家中随机抽取 2 人，求其中评分高于 9 分的至少有 1 人的概率；

（Ⅲ）考虑以下两种方案来确定该选手的最终得分：

方案一：计算所有专家和观众评分的平均数$\overline{x}$作为该选手的最终得分.

方案二：分别计算专家评分的平均数$\overline{x_1}$和观众评分的平均数$\overline{x_2}$，用$\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$作为该选手最终得分.

请直接写出$\overline{x}$与$\dfrac{\overline{x_1}+\overline{x_2}}{2}$的大小关系.

【解析】

（Ⅰ）由频率分布直方图得 $(0.5+a+0.2)\times 1=1$，得 $a=0.3$

设场外观众评分不小于 9 为事件 A，则 $P(A)=0.5$

（Ⅱ）从现场专家中随机抽 2 人，得分情况共有如下 10 种：

$(10,10)$，$(10,8.8)$，$(10,8.9)$，$(10,9.7)$，$(10,8.8)$，$(10,8.9)$，$(10,9.7)$，

$(8.8,8.9)$，$(8.8,9.7)$，$(8.9,9.7)$

其中评分均低于 9 分只有 $(8.8,8.9)$ 1 种

故其中评分高于 9 分的至少 1 人共 9 种

故从现场专家中随机抽 2 人，评分高于 9 分至少有 1 人的概率为 $\frac{9}{10}$

（III）$\bar{x}<\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}$

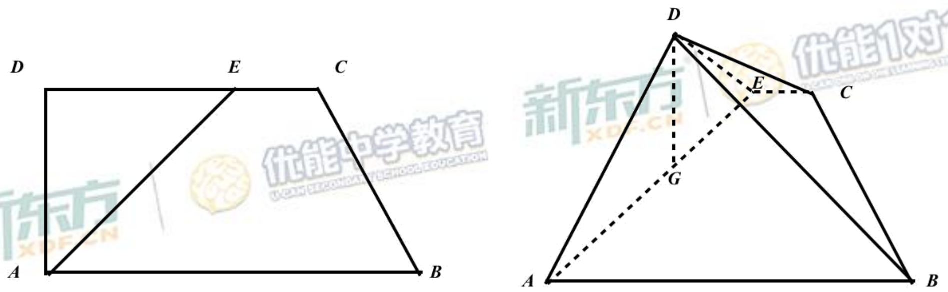
18.（本小题满分 13 分）

如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB//DC$，$\angle BAD=90^{\circ}$，$AB=4$，$AD=2$，$DC=3$，点 E 在 CD 上，且 $DE=2$，将 $\triangle ADE$ 沿 AE 折起，使得平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCE$（如图 2），G 为 AE 中点.

（Ⅰ）求证：$DG\perp$ 平面 $ABCE$；

（Ⅱ）求四棱锥 $D-ABCE$ 的体积；

（Ⅲ）在线段 BD 上是否存在点 P，使得 $CP//$ 平面 ADE？若存在，求 $\dfrac{BP}{BD}$ 的值，若不存在，请说明理由.



【解析】

（Ⅰ）因为 $ED=AD$，且 G 为 AE 中点，所以 $DG\perp AE$

因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$

平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AE$，$DG\subset$ 平面 ADE

所以 $DG\perp$ 平面 $ABCE$

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $DG\perp$ 平面 $ABCE$. 所以 DG 为 $D-ABCE$ 的高

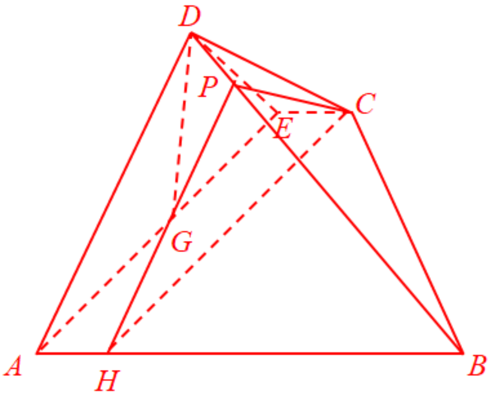
$$S_{梯AECB}=\frac{(EC+AB)\cdot AD}{2}=5$$

等腰 $Rt\Delta ADE$ 中， $DG \perp AE$ ， $DE = DA = 2$

所以 $DG = \sqrt{2}$， $V_{D-ABCE} = \frac{1}{3} \cdot S_{AECB} \cdot DG = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

（III）作 $CH // AE$ 交 AB 于 H， 过 H 作 $HP // AD$

因为 $CH \not\subset$ 平面 ADE， $AE \subset$ 平面 ADE



因为 $AE // CH$， 所以 $CH //$ 平面 ADE

同理可证 $HP //$ 平面 ADE

因为 $CH \cap HP = H$， 所以平面 $PHC //$ 平面 ADE

因为 $CP \subset$ 平面 CHP， 所以 $CP //$ 平面 ADE

在 ΔADB 中， 因为 $AD // HP$

所以 $\frac{BH}{BA} = \frac{BP}{BD} = \frac{3}{4}$

19.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 C： $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设直线 l 过点 $M(1,0)$ 且与椭圆 C 相交于 A， B 两点，过点 A 作直线 $x=3$ 的垂线，垂足为 D.证明：直线 BD 过 x 轴上的定点.

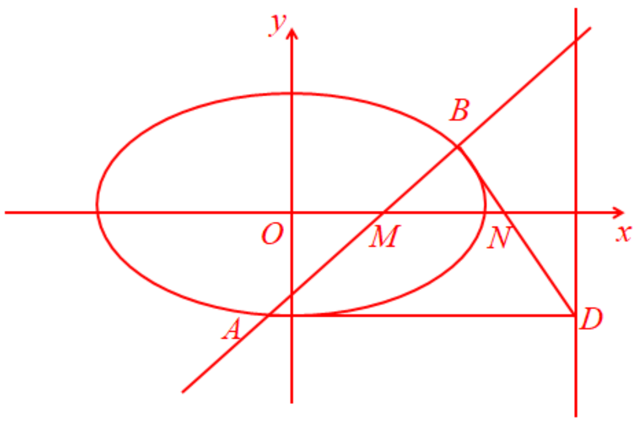
【解析】（Ⅰ）由题意知 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{a^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=1-(\frac{\sqrt{6}}{3})^2=\frac{1}{3}$

所以 $a^2=3$

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

（Ⅱ）①若直线 l 与 x 轴垂直，不妨设 A 点在 x 轴下方

易得 $A(1,-\frac{\sqrt{6}}{3})$， $B(1,\frac{\sqrt{6}}{3})$， $D(3,-\frac{\sqrt{6}}{3})$



设直线 BD 与 x 轴的交点 $N(n,0)$，

满足 $k_{BD}=k_{DN}$

所以 $\frac{-\frac{2\sqrt{6}}{3}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{n-3}$

解得 $n=2$

所以 N 点坐标为 $(2,0)$

②若直线l与x轴不垂直，设l的方程为$y=k(x-1)$， $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$， 则$D(3,y_1)$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$得： $(1+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$

显然$\Delta>0$

所以$x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{1+3k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{3k^2-3}{1+3k^2}$

所以$k_{NB}-k_{ND}=\dfrac{y_2}{x_2-2}-\dfrac{y_1}{3-2}$

$$=\frac{k(x_2-1)-k(x_1-1)(x_2-2)}{x_2-2}$$

$$=\frac{k[-x_1x_2+2(x_1+x_2)-3]}{x_2-2}$$

$$=\frac{-3k^2+3+12k^2-3-9k^2}{1+3k^2}\times\frac{k}{x_2-2}=0$$

所以直线BD始终过x轴上的定点$(2,0)$

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=(m+1)x+\ln x(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}-f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内有且只有一个极值点，求 m 的取值范围.

【解析】

（Ⅰ）当 $m=1$ 时， $f(x)=2x+\ln x,x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=2+\frac{1}{x}$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=3$

且 $f(1)=2$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-2=3(x-1)$

即 $3x-y-1=0$

（Ⅱ） $f'(x)=m+1+\frac{1}{x}=\frac{(m+1)x+1}{x}(x>0)$

（1）当 $m+1\geq 0$，即 $m\geq -1$ 时

$f'(x)>0$ 恒成立

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$

（2）当 $m+1<0$，即 $m<-1$ 时

令 $f'(x)>0$，解得 $x\in(0,-\frac{1}{m+1})$

令 $f'(x)<0$，解得 $x\in(-\frac{1}{m+1},+\infty)$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,-\frac{1}{m+1})$

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\frac{1}{m+1},+\infty)$

（Ⅲ）$g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}-f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}-(m+1)x-\ln x$

且由题意，$g'(x)=x-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-m-1$ 必须在 $(1,2)$ 上有唯一变号零点

设 $m(x)=x-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-m-1, x\in(1,2)$，

$m'(x)=1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}>0$

所以 $m(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增

所以 $\begin{cases} m(1)=1-1-1-m-1<0 \\ m(2)=2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-m-1>0 \end{cases}$

解得 $m\in(-2,\frac{1}{4})$