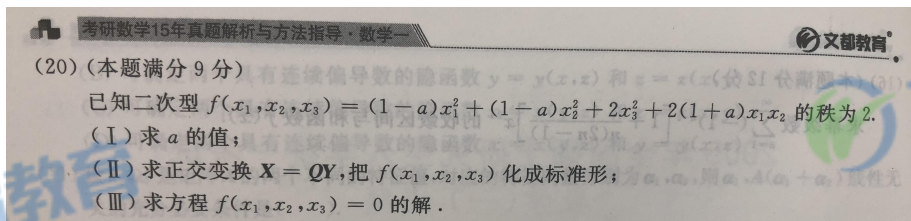


## 2018 考研数学真题解析-二次型

来源：文都教育

每个考生都应该清楚线性代数中两道大题是线性方程组、二次型和相似轮流来，今年也不例外。数一、数二、数三今年线代大题完全相同，其中第一道为线性方程组和二次型相结合的题目，是 2005 年数一第 20 题的再现，想必很多同学在复习时都已着重准备，现解析如下。

【2005 数一第 20 题】：



【2018 数学真题】：设实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$ ,

其中  $a$  是参数.

(1) 求  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  的解;

(2) 求  $f(x_1, x_2, x_3)$  的规范形.

【分析】第一问，本质是考查线性方程组的问题；第二问，写出二次型矩阵，求解特征值即可。

解析：(1)  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  而 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + ax_3 = 0 \end{cases},$$

由  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$  得

当  $a \neq 2$  时， $r(A) = 3$ ，只有零解  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .

当  $a = 2$  时， $r(A) = 2$ ，方程有无穷多解，通解为  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，其中  $k$  为任意常数.

(2) 由 (1) 知，

当  $a \neq 2$  时  $A$  可逆，令 
$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + ax_3 \end{cases}, \text{ 即 } Y = AX, \text{ 则 } f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

当  $a = 2$  时，

法一:  $r(A) = 2$ , 令  $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ , 则  $f = y_1^2 + y_2^2 + (y_1 + y_2)^2 = 2(y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2 + \frac{3}{2}y_2^2$ ,

令  $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(y_1 + \frac{1}{2}y_2\right) \\ z_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ , 则得规范形为  $f = z_1^2 + z_2^2$ .

法二:  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 = X^T \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} X$

记  $B = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ ,

令  $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 18\lambda = \lambda[(\lambda - 5)^2 - 7] = 0$

可得:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 5 - \sqrt{7}$ ,  $\lambda_3 = 5 + \sqrt{7}$ , 则规范型为  $f = z_1^2 + z_2^2$ .

从本次考试来看, 重点始终是重点, 而一些低频考点也不能掉以轻心。在此希望给 2019

考生在复习过程中一点启示。最后, 预祝各位考生考研成功!