§5.3 电偶极辐射

Electric Dipole Radiation

电磁波是以交变运动的电荷系统辐射出来的，在宏观情形电磁波由载有交变电流的天线辐射出来；在微观情形，变速运动的带电粒子导致电磁波的辐射。

本节研究宏观电荷系统在其线度远小于波长情形下的辐射问题。

1、计算辐射场的一般公式

当电流分布 $\vec{j}(\vec{x}',t')$ 给定时，计算辐射场的基础是 $\vec{A}$ 的推迟势：

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{r}d\tau'$$

若电流 $\vec{j}(\vec{x}',t')$ 是一定频率ω的交变电流，有

$$\vec{j}(\vec{x}',t')=\vec{j}(\vec{x}')e^{-i\omega t'}$$

因此

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{-i\omega t'}}{r}d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}d\tau'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{i(kr-\omega t)}}{r}d\tau'$$

式中 $k=\omega/c$ 为波数

如果令 $\vec{A}(\vec{x},t)=\vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ 且有

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ikr}}{r}d\tau'$$

式中因子e^{ikr}是推迟作用因子，它表示电磁波传到场点时有相位滞后kr。

根据**Lorentz**条件，可求出标势φ：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-c^2\nabla\cdot\vec{A}$$

由此可见，由矢势$\vec{A}$的公式完全确定了电磁场。

另外，根据电荷守恒定律 $\nabla\cdot\vec{j}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 且有

$\nabla\cdot\vec{j}=i\omega\rho$ ，只要给定电流 $\vec{j}$ ，则电荷分布**ρ**也自然确定了。从而标势 φ 也就随之而确定了，因而在这种情况下，有

$$\begin{cases}\vec{A}(\vec{x})=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_V\frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ikr}}{r}d\tau' \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-c^2\nabla\cdot\vec{A} \\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A} \\ \vec{E}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{cases}$$

在电荷分布区域外面，$\vec{j}=0$，所以

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}$$

故得
$$\vec{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B}$$

2、矢势 $\vec{A}$ 的展开式

对于矢势

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{ikr}}{r}d\tau'$$

a) 近区（似稳区） $r << \lambda$ ，但仍满足 $r >> l$

且有kr <<1，推迟因子e^{ikr}~1，因而场保持稳恒场的主要特点，即电场具有静电场的纵向形式，磁场也和稳恒场相似。

b) 感应区（过渡区），$r \sim \lambda$，但满足$r>>l$。

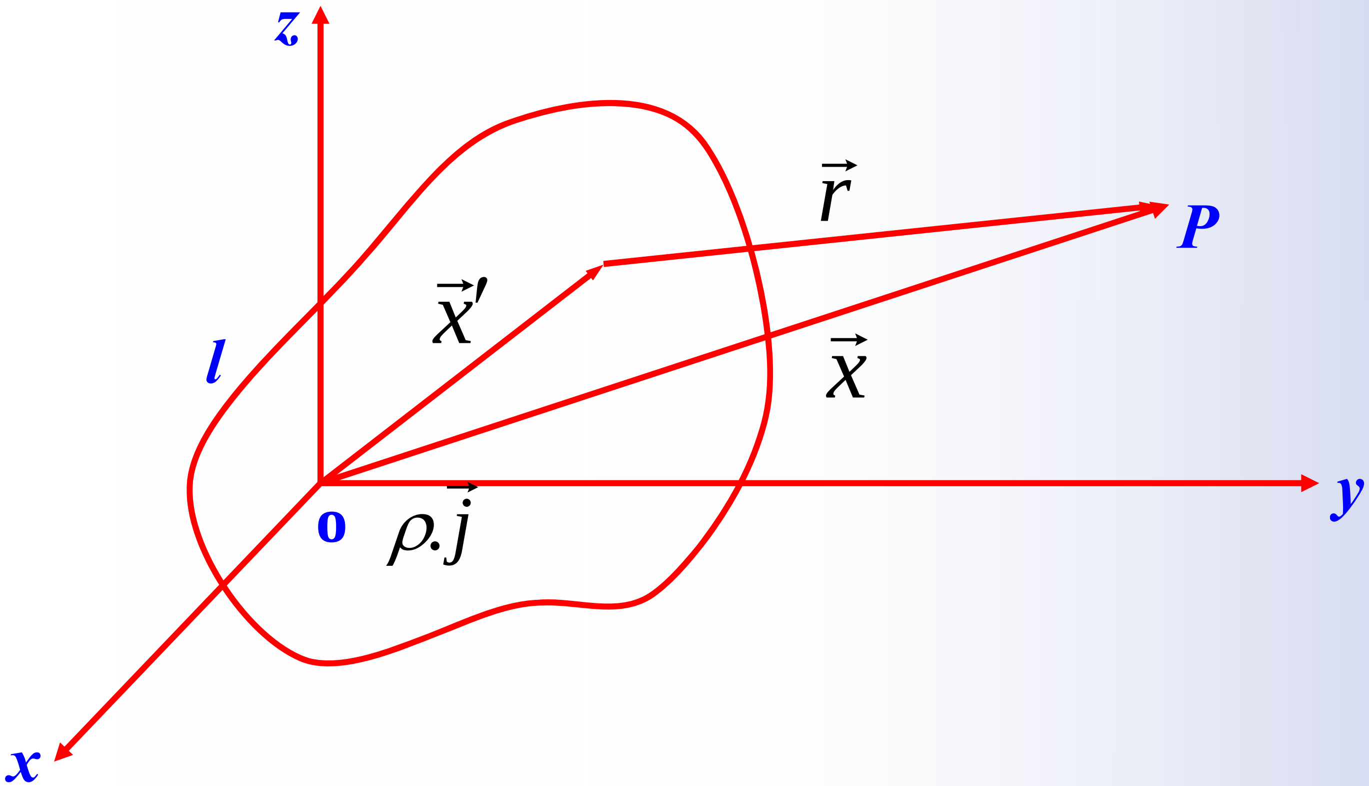
这个区域是一个过渡区域。它介于似稳区和辐射区的过渡区域中。

c) 远区（辐射区）$r>> \lambda$，而且也保证$r>>l$。

在此区域中场强 $\vec{E}$和 $\vec{B}$均可略去 $\frac{1}{R}=\frac{1}{|\vec{x}'|}$ 的高次项，该区域内的场主要是横向电磁场。

现在主要讨论电流分布于小区域而激发的远

区场。



把相因子对 $k\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}'$ 展开，得

$$e^{-ik\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}'}=1-ik\hat{\vec{n}}+\frac{1}{2!}(ik\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}')^2+\cdots$$

从而得到矢势 $\vec{A}$ 的展开式为：

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\left[1-ik\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}'+\frac{1}{2!}(ik\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x})^2+\cdots\right]d\tau'$$

展开式的各项对应于各级电磁多极辐射。

3、偶极辐射

研究展开式的第一项： 推导

$$\vec{A}_{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{j}(\vec{x}')d\tau'$$

由于

$$\dot{\vec{P}} = \int_V \dot{\rho}\vec{x}'d\tau' = -\int_V (\nabla'\cdot\vec{j})\Big|_{t'=\text{常数}}\vec{x}'d\tau'$$

$$= -\int_V \nabla'\cdot(\vec{j}\vec{x}')d\tau' + \int_V (\vec{j}\cdot\nabla')\vec{x}'d\tau'$$

$$= -\oiint_S \vec{j}\vec{x}'\cdot d\vec{s}' + \int_V \vec{j}\cdot\overleftrightarrow{I}d\tau'$$

由于积分区域包含了全部电荷、电流存在的空间，

因而在包围该区域的边界面上不可能有电流出去，即S面 $\vec{j}=0$ ，从而有

$$\dot{\vec{P}} = \int_V \vec{j}\cdot\overleftrightarrow{I}\,d\tau' = \int_V \vec{j}\,d\tau'$$

故得

$$\boxed{\vec{A}_{(1)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\vec{P}}}$$

<u>现在讨论计算辐射场的技巧问题：</u>

在计算辐射场时，需要对$\vec{A}$作用算符∇和$\dfrac{\partial}{\partial t}$

由于讨论远区场时，只保留$\dfrac{1}{R}$的最低次项，因而算符∇不需作用到分母上，而仅需作用到相因子e^{ikR}上即可达到要求，作用结果相当于代换：

$$\boxed{\nabla \to ik\hat{\vec{n}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega.}$$

由此得到，辐射场为

推导

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = ik\hat{\vec{n}} \times \vec{A}$$

$$= \frac{i\mu_0 k}{4\pi R} e^{ikR} \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{p}}$$

$$= \frac{i\mu_0 \frac{\omega}{c}}{4\pi R} e^{ikR} \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{p}}$$

$$= \frac{i \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\omega}{c}}{4\pi R} e^{ikR} \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{p}}$$

$$= \frac{1}{4\pi R c^3 \varepsilon_0} e^{ikR} i\omega \hat{\vec{n}} \times \dot{\vec{p}}$$

$$= \frac{1}{4\pi R c^3 \varepsilon_0} e^{ikR} \ddot{\vec{p}} \times \hat{\vec{n}}$$

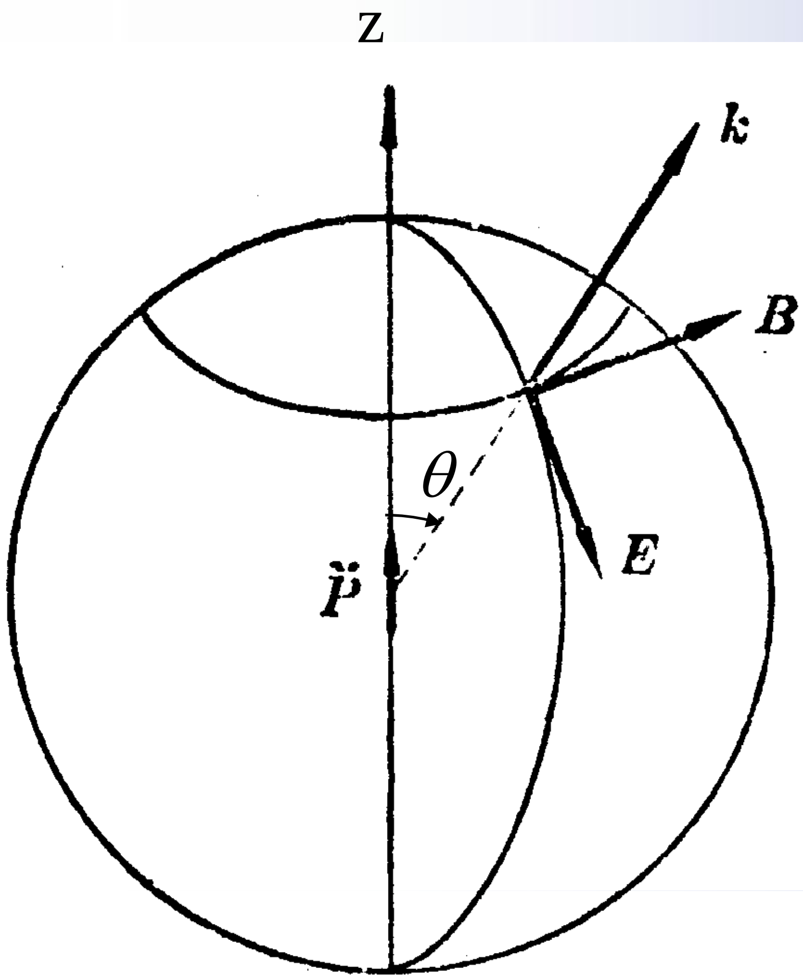
$$\vec{E} = \frac{ic}{k}\nabla\times\vec{B} = \frac{ic}{k}ik\hat{\vec{n}}\times\vec{B}$$

$$= c\vec{B}\times\hat{\vec{n}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 Rc^2}e^{ikR}(\ddot{\vec{p}}\times\hat{\vec{n}})\times\hat{\vec{n}}$$

如果取球坐标，原点在电荷电流分布区域内，并以 $\vec{p}$ 方向为极轴，则由上式得到：

$\vec{B}$沿纬线上振荡，$\vec{E}$ 沿经线上振荡。


z
k
B
θ
E
p̈

故得到：

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \, |\ddot{\vec{p}}| \sin(\theta) \vec{e}_\phi \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} e^{ikR} \, |\ddot{\vec{p}}| \sin(\theta) \vec{e}_\theta\end{aligned}}$$

该式表明：

磁力线是围绕极轴的园周， $\vec{B}$ 总是横向的；电力线是经面上的闭合曲线，由于在空间中 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$， $\vec{E}$ 线必须闭合。因此 $\vec{E}$ 不可能完全横

向，只有当略去$\frac{1}{R}$的高次项后，才能近似地为横向。由此得到一个结论：电偶极辐射是空间中的横磁波（TMW）。

4、辐射性能的几个重要参数

衡量一个带电系统辐射性能的几个重要参数，是它的辐射功率和辐射角分布，这些问题都可以通过能流密度求得答案。

a）辐射场的能流密度

在波动区域中，电磁场能流密度的平均值为

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \overline{\vec{S}} = \frac{1}{2\mu_0} R_e (\vec{E}^* \times \vec{B})$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} R_e \left[c(\vec{B} \times \hat{\vec{n}})^* \times \vec{B} \right]$$

$$= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \hat{\vec{n}}$$

$$= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3 R^2} \sin^2 \theta \hat{\vec{n}}$$

b) 辐射场的角分布

所谓辐射场的角分布，就是讨论辐射的方向性，在平均能流密度$\vec{S}$中，$\sin^2\theta$因子表示电偶极

辐射的角分布。

辐射角分布 **(Angular distribution of radiation)**定义为：在 $\theta.\phi$ 方向单位立体角内平均辐射能流，即

$$\overline{f(\theta\cdot\varphi)}=\frac{\overline{\vec{S}}\cdot d\vec{s}}{d\Omega}$$

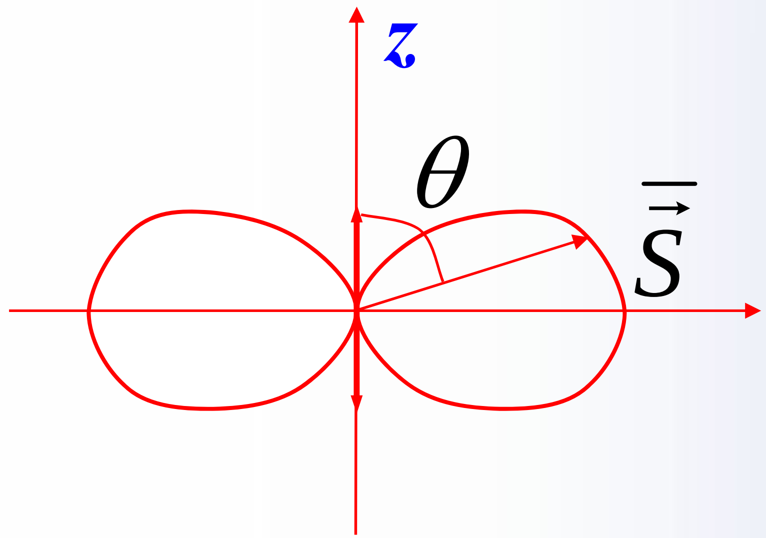
当 $\boldsymbol{R}$ 一定时，$\overline{\vec{S}}\propto\sin^2\theta.$ 显然

$$\overline{f(\theta\cdot\varphi)}=\frac{\overline{\vec{S}}\cdot R^2 d\Omega\hat{\vec{n}}}{d\Omega}$$

$$=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\boxed{\sin^2\theta}$$

由此可见

$$\begin{cases} 当\theta = \dfrac{\pi}{2}时， \quad 辐射最强 \\ 当\theta = 0或\pi时， \quad 辐射为0 \end{cases}$$



这就是我们在日常生活中，经常通过拨动收音机或电视机天线的方位为获得最佳音响和清晰图象的缘故。

c) 辐射功率

单位时间内通过半径为 $\boldsymbol{R}$ 的球面向外辐射的平均能量，称为辐射功率（**Radiation power**）。

把 $\vec{\bar{S}}$ 对球面积分即得总辐射功率，即

推导

$$\overline{p} = \oiint_S |\overline{\vec{s}}| \cdot ds = \oiint_S |\overline{\vec{s}}| R^2 d\Omega$$

$$= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \oiint_S \sin^2 \theta d\Omega$$

$$= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} 2\pi \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}$$

如果偶极子作简谐振动，角频率为ω，且有

$$\vec{p}(\vec{x},t)=\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

则

$$\dot{\vec{p}}=-i\omega\vec{p}=-i\omega\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{p}}=-i\omega\dot{\vec{p}}=-i\omega(-i\omega)\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

$$=-\omega^2\vec{p}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

从而得到

$$|\ddot{\vec{p}}|^2=p_0^2\omega^4$$

故

$$\overline{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0^2\omega^4}{3c^3}$$

若保持电偶极矩的振幅 $\vec{p}_0(\vec{x})$ 不变，则辐射功率正比于频率ω的四次方，即频率变化时，辐射功率迅速变化。

§5.4　磁偶极辐射和电四极辐射

Radiation of
Magnetic Dipole and Electric Quadrupole

1、矢势 $\vec{A}$ 的展开式第二项的物理内容

已知矢势 $\vec{A}$ 的展开式为：

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{j}(\vec{x}')\left[1 - ik\hat{n}\cdot\vec{x}' + \cdots\right]d\tau'$$

该式的第一项，属于电偶极辐射，那么第二项到底属于什么的辐射呢？为了弄清这个问题，我们把被积函数写为：

$$\vec{j}(\vec{x}')[\underbrace{\hat{n}\cdot\vec{x}'}_{\text{标量}\to\text{数}}] = [\hat{n}\cdot\vec{x}']\vec{j}(\vec{x}') = \hat{n}\cdot\hat{\vec{x}}'\vec{j}(\vec{x}')$$

推导

而 $\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}')$ 是一个张量，我们把它分解为对称部分和反对称部分：

$$\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') = \frac{1}{2}\left[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'\right] + \frac{1}{2}\left[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') - \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'\right]$$

因而 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式的第二项为：

$$\vec{A}_{(2)}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik \int_V \vec{j}(\vec{x}')\left[\hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}'\right] d\tau'$$

$$= -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik \int_V \left\{ \hat{\vec{n}} \cdot \frac{1}{2}\left[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') + \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'\right] \right.$$

$$\left. + \hat{\vec{n}} \cdot \frac{1}{2}\left[\vec{x}'\vec{j}(\vec{x}') - \vec{j}(\vec{x}')\vec{x}'\right] \right\} d\tau'$$

$$= -\frac{ik\mu_0}{4\pi R}e^{ikR}\int_V \frac{1}{2}\left[(\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}')\vec{j}(\vec{x}') + (\hat{\vec{n}}\cdot\vec{j}(\vec{x}'))\vec{x}'\right]d\tau'$$

$$-\frac{ik\mu_0}{4\pi R}e^{ikR}\int_V \frac{1}{2}\left[(\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}')\vec{j}(\vec{x}') - (\hat{\vec{n}}\cdot\vec{j}(\vec{x}'))\vec{x}'\right]d\tau'$$

第二项：由于

$$(\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}')\vec{j}(\vec{x}') - (\hat{\vec{n}}\cdot\vec{j}(\vec{x}'))\vec{x}' = -\hat{\vec{n}}\times(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}'))$$

因此第二项积分部分为：

$$-\hat{\vec{n}}\times\int_V \frac{1}{2}\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')d\tau' = -\hat{\vec{n}}\times\vec{m}$$

磁偶极矩

该项辐射是磁偶极辐射。

第一项：

把它看成对所有带电粒子求和，则得

$$\frac{1}{2}\int_V \left[(\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}\,')\,\vec{j}(\vec{x}\,') + (\hat{\vec{n}}\cdot\vec{j}(\vec{x}\,'))\,\vec{x}\,'\right] d\tau'$$

$$= \frac{1}{2}\sum e\left[(\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}\,')\vec{\upsilon}(\vec{x}\,') + (\hat{\vec{n}}\cdot\vec{\upsilon}(\vec{x}\,'))\,\vec{x}\,'\right]$$

因为 $\vec{\upsilon}(\vec{x}') = \dfrac{d\vec{x}'}{dt}$，所以上式可写为：

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum e(\hat{\vec{n}}\cdot\vec{x}')\vec{x}' = \hat{\vec{n}}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum e\vec{x}'\vec{x}'\right]$$

$$= \frac{1}{6}\hat{\vec{n}}\cdot\frac{d}{dt}\overleftrightarrow{D}$$

$$= \frac{1}{6}\hat{\vec{n}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{D}}$$

式中$\overleftrightarrow{D} = \sum 3e\vec{x}'\vec{x}'$是点电荷系的电四极矩。

该项辐射是<u>电四极矩的辐射</u>。

至此，$\vec{A}(\vec{x})$的展开式第二项的物理内容为：

$$\vec{A}_{(2)}(\vec{x}) = -\frac{ik\mu_0}{4\pi R}e^{ikR}\left[-\hat{\vec{n}}\times\vec{m} + \frac{1}{6}\hat{\vec{n}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{D}}\right]$$

即磁偶极辐射和电四极辐射是在 $\vec{A}(\vec{x})$ 的展开式中同一级项中出现。

2、磁偶极辐射

为了清楚起见，先计算磁偶极辐射项：

$$\vec{A}^{m}_{(2)}(\vec{x}) = \frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\hat{\vec{n}} \times \vec{m}$$

在辐射区域中，

$$\vec{m} = \vec{m}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$$

由此可见

$$\vec{A}^{m}_{(2)}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} ik\hat{\vec{n}} \times \vec{m}$$

$$= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R} \nabla \times \vec{m}$$

辐射区的电磁场为：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = i\vec{k} \times \overline{A}$$

$$= \frac{\mu_0 k^2}{4\pi R} e^{ikR} (\hat{\vec{n}} \times \vec{m}) \times \hat{\vec{n}}$$

而又因为

$$\dot{\vec{m}} = -i\omega \vec{m} \ , \qquad \ddot{\vec{m}} = -\omega^2 \vec{m}.$$

还有 $k^2 = \omega^2 / c^2$

从而得到

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2}(\ddot{\vec{m}} \times \hat{\vec{n}}) \times \hat{\vec{n}}$$

而

$$\vec{E} = c\vec{B} \times \hat{\vec{n}} = -\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c}(\ddot{\vec{m}} \times \hat{\vec{n}})$$

讨论：

将电偶极辐射场和磁偶极辐射场比较，即

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_{\text{电偶极}} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 Rc^2}(\ddot{\vec{p}}\times\hat{\vec{n}})\times\hat{\vec{n}} \\ \vec{B}_{\text{磁偶极}} &= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi Rc^2}(\ddot{\vec{m}}\times\hat{\vec{n}})\times\hat{\vec{n}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{B}_{\text{电偶极}} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 Rc^3}(\ddot{\vec{p}}\times\hat{\vec{n}}) \\ \vec{E}_{\text{磁偶极}} &= \frac{-\mu_0 e^{ikR}}{4\pi Rc}(\ddot{\vec{m}}\times\hat{\vec{n}})\end{aligned}\right\}$$

通过以上比较，有

$$\vec{p}_{\text{电偶极}} \rightarrow \frac{\vec{m}_{\text{磁偶极}}}{c}$$

$$\vec{E}_{\text{电偶极}} \rightarrow c\vec{B}_{\text{磁偶极}}$$

$$c\vec{B}_{\text{电偶极}} \rightarrow -\vec{E}_{\text{磁偶极}}$$

由此可见，磁偶极辐射的能流密度为：

$$\overline{\vec{s}} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}(\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left[(c\vec{B}^* \times \hat{\vec{n}}) \times \vec{B}\right]$$

$$= \frac{c}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\ \hat{\vec{n}}$$

推导

而 $$\vec{B}_{磁偶极} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} (\ddot{\vec{m}} \times \hat{\vec{n}}) \times \hat{\vec{n}}$$

$$= \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R c^2} |\ddot{\vec{m}}| \sin\theta \vec{e}_\theta$$

故得

$$\overline{\vec{s}} = \frac{c}{2\mu_0} \frac{\mu_0^2 |\ddot{\vec{m}}|^2}{16\pi^2 R^2 c^4} \sin^2\theta \hat{\vec{n}}$$

$$= \frac{\mu_0 (\omega^4 |\ddot{\vec{m}}|^2)}{32\pi^2 R^2 c^3} \sin^2\theta \hat{\vec{n}}$$

其中： $\ddot{\vec{m}}=-\omega^2\vec{m},\ |\ddot{\vec{m}}|^2=\omega^4|\vec{m}|^2.\ |\vec{m}|^2$ 为磁矩的振幅，θ 为极角（以$\vec{m}$ 方向为极轴），其辐射图形如电偶极辐射相同。

磁偶极辐射的总辐射功率：

$$\overline{p}=\oiint_S \overline{\vec{s}}\cdot d\vec{s}=\oiint_S |\overline{\vec{s}}|\cdot ds=\oiint_S |\overline{\vec{s}}|R^2 d\Omega$$

$$=\oiint_S \frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2R^2c^3}\sin^2\theta R^2 d\Omega$$

$$=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta$$

$$=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{32\pi^2c^3}\cdot 2\pi\cdot\frac{4}{3}$$

$$=\frac{\mu_0\omega^4|\vec{m}|^2}{12\pi c^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\omega^4|\vec{m}|^2}{3c^3}$$

3、电四极辐射

这里由$\vec{A}(\vec{x})$的展开式第二项计算电四极辐射项：

$$\vec{A}^e_{(2)}(\vec{x})=-\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R}\hat{\vec{n}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{D}}$$

为方便计，定义一个矢量$\vec{D}(\hat{\vec{n}})$：

$$\vec{D}(\hat{\vec{n}})=\hat{\vec{n}}\cdot\overleftrightarrow{D}$$

则矢势为：

$$\vec{A}^{e}_{(2)}(\vec{x})=-\frac{ik\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R}\dot{\vec{D}}=-\frac{i\frac{\omega}{c}\mu_0 e^{ikR}}{24\pi R}\dot{\vec{D}}$$

$$=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{24\pi cR}\ddot{\vec{D}}=\frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 Rc^3}\ddot{\vec{D}}$$

辐射区域的电磁场为

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=ik\hat{\vec{n}}\times\vec{A}=\frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 Rc^4}\dddot{\vec{D}}\times\hat{\vec{n}}$$

$$\vec{E}=c\vec{B}\times\hat{\vec{n}}=\frac{e^{ikR}}{24\pi\varepsilon_0 Rc^3}(\dddot{\vec{D}}\times\hat{\vec{n}})\times\hat{\vec{n}}$$

相应地辐射平均能流密度为：

$$\bar{\vec{s}} = \frac{1}{2} R_e (\vec{E}^* \times \vec{B}) = \frac{1}{2} R_e \left[(c\vec{B}^* \times \hat{\vec{n}}) \times \vec{B} \right]$$

$$= \frac{c}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \ \hat{\vec{n}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5 R^2} |\dddot{\vec{D}} \times \hat{\vec{n}}|^2$$

4、举例讨论

例1：一电流线圈半径为a，激发电流振幅为I_0，角频率为 ω，求辐射功率。

Solution:

电流线圈的磁矩为 $m_0 = I_0 \pi a^2$，即

$$\vec{m}(\vec{x},t) = \vec{m}_0(\vec{x})e^{-i\omega t}$$

然而 $$\dot{\vec{m}} = -i\omega\vec{m}$$

$$\ddot{\vec{m}} = -i\omega\dot{\vec{m}} = (-i\omega)(-i\omega)\vec{m} = -\omega^2\vec{m}$$

根据磁偶极辐射的辐射功率

$$\overline{p} = \frac{\mu_0\omega^4 |\vec{m}|^2}{12\pi c^3}$$

得到

$$\overline{p} = \frac{\mu_0 \omega^4 I_0^2 (\pi a^2)^2}{12\pi c^3}$$

因为 $\omega = kc = \frac{2\pi}{\lambda} c$ ， $\omega^4 = \frac{(2\pi)^4}{\lambda^4} c^4$

因此得到

$$\overline{p} = \frac{4\pi^5}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 I_0^2$$

例2：求如图所示的电四极子以频率ω振幅时的辐射功率和角分布。

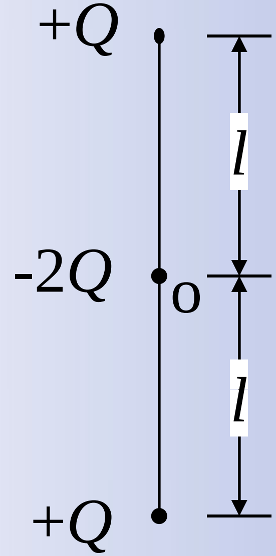
Solution:

该体系的电四极矩张量为：

$$\overset{\leftrightarrow}{D}=\sum 3e\vec{x}'\vec{x}'$$

$$=3Q\vec{e}_z\vec{e}_z l^2+0+3Q(-\vec{e}_z)(-\vec{e}_z)l^2$$

$$=6Ql^2\vec{e}_z\vec{e}_z$$

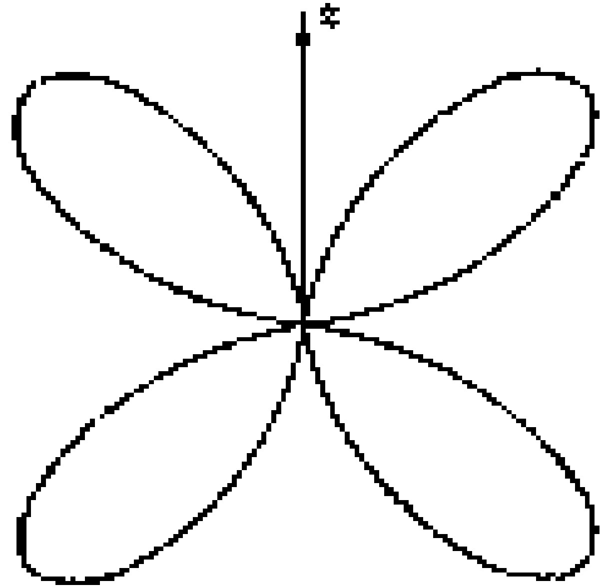


$$\vec{D} = \hat{\vec{n}} \cdot \overleftrightarrow{D} = 6Ql^2 \hat{\vec{n}} \cdot \vec{e}_z \vec{e}_z = 6Ql^2 \cos\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{D} \times \hat{\vec{n}} = 6Ql^2 \cos\theta \vec{e}_z \times \hat{\vec{n}} = 6Ql^2 \cos\theta \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

$$|\dddot{\vec{D}} \times \hat{\vec{n}}|^2 = 36Q^2 l^4 \omega^6 \cos^2\theta \sin^2\theta$$

由此可见，辐射角分布由因子$\cos^2\theta\sin^2\theta$ 确定，如图所示。



辐射功率为：

$$\overline{p} = \oiint_S \overline{\vec{s}} \cdot d\vec{s} = \oiint_S |\overline{\vec{s}}| ds = \oiint_S |\overline{\vec{s}}| R^2 d\Omega$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5} 36 Q^2 l^4 \omega^6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin^3\theta d\theta$$

因为 $\int_0^{\pi} \cos^2 \sin^3 \theta d\theta = \int_0^{\pi} \cos^2 \sin^2 \theta \sin \theta d\theta$

$$= -\int_0^{\pi} \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta$$

$$= -\int_0^{\pi} \cos^2 \theta d \cos \theta + \int_0^{\pi} \cos^4 \theta d \cos \theta$$

$$= \frac{4}{15}$$

故

$$\overline{p} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{288\pi c^5} 36 Q^2 l^4 \omega^6 \cdot \frac{4}{15} = \frac{Q^2 l^4 \omega^6}{60\pi\varepsilon_0 c^5}$$