2018全国大学生数学竞赛模拟赛试题（非数学类）

一、填空题（每题5分，共30分）

1．$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\int_0^x \ln t\,dt} =$________

2．设 $f(x)=\begin{cases} xe^x, & -1<x<1 \\ x-1, & x\geq 1 \end{cases}$，则 $\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t =$________

3．设 $2\sin^2 xy + z = x^2 + 4y - z$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} =$________

4．曲线 $y=x^2+1,\ y=2|x|$ 绕 x 轴旋转所围成的旋转体的体积是________

5．设 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\leq 4$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+6y^2+8z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$__________

6．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(3x-2)^n$ 的收敛区间是__________

二（10分） 已知奇函数 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 处可导，非零数列 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 都收敛，分析极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(\frac{\alpha_n}{n})+f(\frac{\beta_n}{n})]$ 是否存在。若存在，极限是什么。

三（10 分）设 $f''(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上存在，$a<c<b$，证明：存在 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$

四（10分） 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3(x+y)=x^3$ 所确定的隐函数，求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{y^3}$

五（10分） 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2}\sin(\frac{k}{n})^2$ 的近似值，精确到 10^{-4}

六（10分） 已知 $f(x)\ \ (x\in[0,\ 2])$ 是一个二次可微函数，而且 $|f^{(k)}(x)|\leq 1$，$k=1,\ 2$，证明 $|\int_0^2 (x-1)f(x)\mathrm{d}x|\leq 1$

七（10分）设 $f(x)$ 为正值连续函数，试证不等式 $\oint_L \frac{-y}{f(x)}\mathrm{d}x + xf(y)\mathrm{d}y \geq 2\pi a^2$，其中 L 是圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2 (a>0)$，取逆时针方向。

八（10 分）　设$\{u_n\}$、$\{c_n\}$为正实数列，试证明：

（1）若对所有的正整数n满足：$c_n u_n - c_{n+1}u_{n+1} \le 0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散；

（2）若对所有的正整数n满足：$c_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - c_{n+1} \ge a$，（常数$a>0$），且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{c_n}$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛。