文章编号: 1000-5862(2012)06-0584-05

几类高阶线性微分方程亚纯解的迭代级

何　静, 郑秀敏*

(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西　南昌, 330022)

摘要: 研究了几类具有迭代级亚纯函数系数的高阶线性微分方程亚纯解的增长性和零点分布问题, 当系数 a_0 或 a_d 对其它系数起支配作用时, 得到了方程满足一定条件的亚纯解的迭代级的一些结果, 所得结果推广了前人已有结果.

关键词: 线性微分方程; 亚纯解; 迭代级; 迭代零点收敛指数

中图分类号: O 174.52　　　　文献标志码: A

0　引言与结果

微分方程的复振荡理论是应用复分析理论来研究复域微分方程解的振荡性质. 该理论的研究始于 20 世纪 80 年代, 从研究 2 阶齐次线性微分方程解的性质开始, 渐渐地转到研究高阶微分方程解的性质[1-2]. 对于微分方程大量存在的无穷级亚纯解, 只用级和零点收敛指数来估计是粗糙的, 因而又引进了超级和迭代级来对方程的解进行精确估计. 本文使用值分布理论的标准记号及以下几个定义[3-6]. 为了方便, 对任给的 $r\in(0,+\infty)$, 记

$$\begin{aligned}&\exp_0 r=r,\exp_1 r=\mathrm{e}^r,\\&\exp_{l+1} r=\exp(\exp_l r),\exp_{-1} r=\log r;\\&\log_0 r=r,\log_1 r=\log r,\\&\log_{l+1} r=\log(\log_l r),\log_{-1} r=\exp_1 r.\end{aligned}$$

定义 1　设 p 是正整数, 亚纯函数 $f(z)$ 的迭代级 $\sigma_p(f)$ 定义为

$$\sigma_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p^+ T(r,f)/\log r.$$

注 1　(i) $\sigma_1(f)=\sigma(f)$;

(ii) 当 $f(z)$ 为整函数时,

$$\sigma_p(f)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p^+ T(r,f)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_{p+1}^+ M(r,f)}{\log r}.$$

定义 2　亚纯函数 $f(z)$ 的迭代级的增长指标为

$$i(f)=\begin{cases}0, & f\text{是有理函数},\\ \min\{n\in\mathbf{N}:\sigma(f)<\infty\}, & \begin{array}{l}f\text{是超越亚纯函数},\\ \text{且存在某个}n\in\mathbf{N},\\ \text{使得}\sigma_n(f)<\infty,\end{array}\\ \infty, & \begin{array}{l}\text{对于所有的}n\in\mathbf{N}\\ \text{都有}\sigma_n(f)=\infty.\end{array}\end{cases}$$

注 2　仿定义 1 和定义 2 可得亚纯函数 $f(z)$ 的迭代下级 $\mu_p(f)$ 及其增长指标 $i_\mu(f)$ 的定义.

定义 3　设 p 是正整数, 亚纯函数 $f(z)$ 的 a 值点序列的迭代收敛指数 $\lambda_p(f-a)$ 定义为

$$\lambda_p(f-a)=\lambda_p(f,a)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p^+ N(r,1/(f-a))}{\log r}.$$

亚纯函数 $f(z)$ 的不同 a 值点序列的迭代收敛指数 $\overline{\lambda}_p(f-a)$ 定义为

$$\overline{\lambda}_p(f-a)=\overline{\lambda}_p(f,a)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p^+ \overline{N}(r,1/(f-a))}{\log r}.$$

注 3　(i) $\overline{\lambda}_1(f-a)=\overline{\lambda}(f-a)$;

(ii) $\lambda_1(f-a)=\lambda(f-a)$.

定义 4　亚纯函数 $f(z)$ 的 a 值点序列的迭代收敛指数的增长指标 $i_\lambda(f-a)$ 定义为

收稿日期: 2012-04-05

基金项目: 国家自然科学基金(11126145), 江西省自然科学基金(20114BAB211003)和江西省教育厅青年科学基金(GJJ11072)资助项目.

作者简介: 郑秀敏(1980-), 女, 江西上饶人, 副教授, 博士, 主要从事复分析的研究.

$$i_\lambda(f-a)=\begin{cases}0, & n(r,1/(f-a))=O(\log r),\\ \min\left\{\begin{array}{l}n\in\mathbf{N}:\\ \lambda_n(f-a)<\infty\end{array}\right\}, & \begin{array}{l}\exists n\in\mathbf{N}\text{使得}\\ \lambda_n(f-a)<\infty,\end{array}\\ \infty, & \begin{array}{l}\text{对于所有的}n\in\mathbf{N}\\ \text{都有}\lambda_n(f-a)=\infty.\end{array}\end{cases}$$

注 4　仿定义 4 可得亚纯函数 $f(z)$ 的不同 a 值点序列的迭代收敛指数的增长指标 $i_{\overline{\lambda}}(f-a)$ 定义.

对于线性微分方程大量的无穷级亚纯解，如何更精确地估计其增长性，陈玉等在文献[7]中研究了高阶线性微分方程

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=0 \tag{1}$$

和

$$f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=F \tag{2}$$

的亚纯解的超级和超级零点收敛指数，得到以下结果.

定理 A　假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，满足 $\sigma(a_j)<\sigma(a_0)\leqslant\infty(j=1,\cdots,k-1)$ 且 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log m(r,a_0)/\log r=\sigma(a_0)$. 如果 $f(\not\equiv0)$ 是微分方程(1)的亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(f)$，则 $\sigma(f)=\infty,\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$.

定理 B　假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},F(\not\equiv0)$ 是有穷级亚纯函数，满足 $\sigma(a_j)<\sigma(a_0)(j=1,\cdots,k-1)$.如果微分方程(2)的所有解 $f(\not\equiv0)$ 是亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(f)$，$\sigma(f)=\infty$，则

(i) $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=+\infty$;

(ii) $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)\leqslant\sigma(a_0)$.

若 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log m(r,a_0)/\log r=\sigma(a_0)$，则 $\overline{\lambda}_2(f)=\lambda_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_0)$，至多除去 1 个例外.

定理 C　假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，存在某个超越亚纯函数 $a_d(d\in\{0,\cdots,k-1\})$，满足 $\sigma(a_j)<\mu(a_d)(j\neq d)$ 且 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log m(r,a_d)/\log r=\sigma(a_d)$，如果微分方程(1)的所有解为亚纯解，且 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$，则 $\sigma_2(f)\leqslant\sigma(a_d)$，且至多有 1 个解满足 $\sigma_2(f)=\sigma(a_d)$.

定理 D　假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 满足定理 C 的条件，$F(\not\equiv0)$ 是一有限级亚纯函数，假设微分方程(2)的解均为亚纯函数且 $\lambda(1/f)<\mu(a_d)$，f_0 是方程(2)的 1 个解，$g_1,g_2,\cdots,g_k$ 是微分方程(1)基础解系，则存在 1 个解 $g_j(j\in\{1,\cdots,k\})$，不妨设为 g_1，使所有解空间 $\{cg_1+f_0,c\in\mathbf{C}\}$ 内的解满足 $\overline{\lambda}_2(f)=\sigma_2(f)=\sigma(a_d)$，至多有 1 个例外.

虽然超级能对增长性较快的解进行估计，但是还有大量的微分方程解的超级是无穷大，对这些解用超级估计其增长性仍不够精确，因此本文利用迭代级的定义对微分方程的解进行更为精确的估计，在微分方程系数为迭代级亚纯函数的情形下得到了下面的结果.

定理 1　假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，满足 $\max\{\sigma_p(a_j),j=1,\cdots,k-1\}<\sigma_p(a_0)<\infty,0<p<\infty$ 且 $i_\lambda(1/a_0)<p$ 或 $\lambda_p(1/a_0)<\sigma_p(a_0)$. 如果 $f(\not\equiv0)$ 是微分方程(1)的亚纯解且满足 $\lambda_p(1/f)<\mu_p(f)$，则 $\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(a_0)$.

定理 2　假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1},F(\not\equiv0)$ 是亚纯函数，满足 $\max\{\sigma_p(a_j),j=1,\cdots,k-1\}<\sigma_p(a_0)<\infty,i(F)=q,0<q\leqslant p<\infty,\sigma_q(F)<\sigma_p(a_0)$，且 $i_\lambda(1/a_0)<p$ 或 $\lambda_p(1/a_0)<\sigma_p(a_0)$.如果微分方程(2)的所有解 $f(\not\equiv0)$ 为亚纯解，且 $\lambda_p(1/f)<\mu_p(f)$，则 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(a_0)$，至多除去 1 个例外解.

定理 3　假设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，存在某个超越亚纯函数 $a_d(d\in\{0,\cdots,k-1\})$，满足 $0<p<\infty,\sigma_p(a_j)<\mu_p(a_d)(j\neq d)$ 且 $i_\lambda(1/a_d)<p$ 或 $\lambda_p(1/a_d)<\sigma_p(a_d)$.如果微分方程(1)的所有解 f 为亚纯解，且 $\lambda_p(1/f)<\mu_p(a_d)$，则 $\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(a_d)$，且至少有 1 个解满足 $\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(a_d)$.

定理 4　设 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 满足定理 3 中的条件，$F(\not\equiv0)$ 是亚纯函数满足 $\sigma_q(F)<\sigma_p(a_d)(0<q\leqslant p<\infty)$. 假设微分方程(2)的解 f 均为亚纯函数，且 $\lambda_p(1/f)<\mu_p(a_d)$, f_0 是微分方程(2)的 1 个解，$f_1,f_2,\cdots,f_k$ 是微分方程(1)的基础解系，则存在 1 个 $f_j(j\in\{1,\cdots,k\})$，不妨设为 f_1，使得所有解空间 $\{cf_1+f_0;c\in\mathbf{C}\}$ 内的解满足 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(a_d)$，至多有 1 个例外.

注 5　若将定理 3 和定理 4 中的条件 $\sigma_p(a_j)<\mu_p(a_d)$ 和 $\lambda_p(1/f)<\mu_p(a_d)$ 改为 $\sigma_p(a_j)<\sigma_p(a_d)$ 与 $\lambda_p(1/f)<\mu_p(f)$，结论仍然成立.

1　相关引理

引理 1[7]　设 $F(r)$ 与 $G(r)$ 是 $(0,\infty)$ 中的非减函数.

如果 (i)$F(r)\leqslant G(r)$ n.e.；或 (ii) 当 $r\notin(0,1]\cup H$时，$F(r)\leqslant G(r)$，其中 $H\subset(1,\infty)$ 是一对数测度为有限的集合，则对任给常数 $\alpha>1$，$\exists r_0>0$，当 $r>r_0$ 时，有 $F(r)\leqslant G(\alpha r)$.

引理 2[8] 设 p 是正整数，$f(z)=g(z)/d(z)$ 是亚纯函数，其中 $g(z)$ 和 $d(z)$ 是整函数且满足 $\mu_p(g)=\mu_p(f)=\mu\leqslant\sigma_p(g)=\sigma_p(f)<+\infty, i(d)<p$ 或 $i(d)=p$ 且 $\sigma_p(d)=\rho<\mu$. 假设 z 为 $|z|=r$ 上满足 $|g(z)|=M(r,g)$ 的点，$\upsilon_g(r)$ 表示 $g(z)$ 的中心指标，则存在 1 个对数测度有限的集合 $E_1\subset(1,\infty)$，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 时，有

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^n(1+o(1))(n\in\mathbf{N}).$$

引理 3[9] 假设亚纯函数 $f(z)$ 满足 $i(f)=p(p\in\mathbf{N})$ 且 $\sigma_p(f)=\sigma$，则存在整函数 $\pi_1(z),\pi_2(z)$ 和 $D(z)$ 使得

$$f(z)=\pi_1(z)\mathrm{e}^{D(z)}/\pi_2(z)$$

和

$$\sigma_p(f)=\max\left\{\sigma_p(\pi_1),\sigma_p(\pi_2),\sigma_p\left(\mathrm{e}^{D(z)}\right)\right\}.$$

进一步地，$\forall\varepsilon>0$，有

$$\exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\varepsilon}\right\}\right\}\leqslant$$

$$|f(z)|\leqslant\exp_p\left\{r^{\sigma_p(f)+\varepsilon}\right\}(r\notin E_2),$$

其中 E_2 是 1 个有限线性测度的 r 值集合.

引理 4[10] 假设整函数 $g(z)$ 满足 $i(g)=p(0<p<\infty)$，$\sigma_p(g)=\sigma$，则

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p\upsilon_g(r)/\log r=\sigma_p(g)=\sigma,$$

其中 $\upsilon_g(r)$ 为 g 的中心指标.

引理 5[11] 假设微分方程 $f^{(k)}+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_0f=0$ 被 k 个线性无关的亚纯解 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 所满足，则 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$ 是亚纯函数，且对于 $j=0,1,\cdots,k-1$，有

$$m(r,a_j)=O\left[\log\left(\max\left\{T(r,f_d),d=1,\cdots,k\right\}\right)\right].$$

2 定理的证明

定理 1 的证明 假设 $f(\neq0)$ 是微分方程(1)的亚纯解，则由方程(1)可得

$$-a_0=\frac{f^{(k)}}{f}+a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+a_1\frac{f'}{f}. \tag{3}$$

由(3)式及对数导数引理可知，至多除去 1 个线性测度为有限的集合 E_3，对所有 $r\notin E_3$，有

$$m(r,a_0)\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}m(r,a_j)+O\{\log rT(r,f)\}. \tag{4}$$

因为 $i_\lambda(1/a_0)<p$ 或 $\lambda_p(1/a_0)<\sigma_p(a_0)$，所以 $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log_p m(r,a_0)/\log r=\sigma_p(a_0)$. 于是利用(4)式及引理 1 可得

$$\sigma_p(a_0)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p m(r,a_0)/\log r\leqslant$$

$$\max\left\{\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_{p+1}T(r,f)}{\log r},\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log_p m(r,a_j)}{\log r},j=1,\cdots,k-1\right\},$$

即 $\sigma_p(a_0)\leqslant\max\left\{\sigma_{p+1}(f),\sigma_p(a_j),j=1,\cdots,k-1\right\}$. 又由题设条件 $\max\left\{\sigma_p(a_j),j=1,\cdots,k-1\right\}<\sigma_p(a_0)$ 可知 $\sigma_p(a_0)\leqslant\sigma_{p+1}(f)$.

下证 $\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(a_0)$. 由 Hadamard 定理，$f$ 可表示成 $f(z)=g(z)/d(z)$，其中 $g(z),d(z)$ 为整函数，满足 $\mu_p(f)=\mu_p(g)\leqslant\sigma_p(g)=\sigma_p(f),\sigma_p(d)=\lambda_p(1/f)<\mu_p(f)$. 由引理 2，取点 z 满足 $|z|=r$ 及 $|g(z)|=M(r,g),\upsilon_g(r)$ 表示整函数 $g(z)$ 的中心指标，则存在 1 个对数测度有限的集合 $E_1\subset(1,\infty)$，当 $|z|=r\notin E_1\cup[0,1]$ 时，有

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^j(1+o(1))(j=1,\cdots,k). \tag{5}$$

将方程(1)改写为

$$-\frac{f^{(k)}}{f}=a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+a_1\frac{f'}{f}+a_0. \tag{6}$$

将(5)式代入(6)式可得

$$-\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^k(1+o(1))=a_{k-1}\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^{k-1}(1+o(1))+\cdots+$$

$$a_1\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)(1+o(1))+a_0. \tag{7}$$

由引理3，$\forall\varepsilon>0$，存在1个有限线性测度的集合 E_2，当 $|z|=r\notin E_2$ 且 r 充分大时，有

$$|a_j(z)|\leqslant\exp_p\left\{r^{\sigma_p(a_0)+\varepsilon}\right\}(j=0,\cdots,k-1). \tag{8}$$

由(7)式和(8)式可知，当 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$ 且 $|g(z)|=M(r,g),r\to\infty$ 时，有

$$\upsilon_g(r)|1+o(1)|\leqslant kr^k|1+o(1)|\exp_p\left\{r^{\sigma_p(a_0)+\varepsilon}\right\}. \tag{9}$$

由(9)式及引理 1 和引理 4 可得 $\sigma_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(g)\leqslant\sigma_p(a_0)+\varepsilon$，根据 ε 的任意性可知 $\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(a_0)$.

从而 $\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(a_0)$. 定理 1 证毕.

定理 2 的证明　先证 $\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(a_0)$. 由 Hadamard 定理，$f$ 可表示成 $f(z)=g(z)/d(z)$，其中 $g(z),d(z)$ 为整函数，满足 $\mu_p(f)=\mu_p(g)\leqslant\sigma_p(g)=\sigma_p(f),\sigma_p(d)=\lambda_p(1/f)<\mu_p(f)$. 由引理 2，取点 z 满足 $|z|=r$ 及 $|g(z)|=M(r,g),\upsilon_g(r)$ 表示整函数 $g(z)$ 的中心指标，则存在 1 个对数测度有限的集合 $E_1\subset(1,\infty)$，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 时，有(5)式成立.将(2)式改写为

$$-\frac{f^{(k)}}{f}=a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+a_1\frac{f'}{f}+a_0-\frac{F}{f},\tag{10}$$

将(5)式代入(10)式得

$$-\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^k(1+o(1))=a_{k-1}\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)^{k-1}(1+o(1))+\cdots+ a_1\left(\frac{\upsilon_g(r)}{z}\right)(1+o(1))+a_0-\frac{F}{f}.\tag{11}$$

由引理 3 知，$\forall\varepsilon>0$，存在 1 个有限线性测度的集合 $E_2,|z|=r\notin E_2,|g(z)|=M(r,g)$ 且 $r\to\infty$ 时有(8)式成立，并且有

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right|=\left|\frac{F(z)d(z)}{g(z)}\right|=\frac{|F(z)||d(z)|}{M(r,g)}\leqslant \frac{\exp_p\left\{r^{\sigma_q(F)+\varepsilon}\right\}\exp_p\left\{r^{\sigma_p(d)+\varepsilon}\right\}}{\exp_p\left\{r^{\mu_p(g)-\varepsilon}\right\}}.$$

因 $\sigma_p(d)=\lambda_p(1/f)<\mu_p(f)=\mu_p(g)$，故可取 ε 满足 $0<\varepsilon<(\mu_p(g)-\sigma_p(d))/2$, 从而有

$$|F(z)/f(z)|\leqslant\exp_p\left\{r^{\sigma_q(F)+\varepsilon}\right\}\leqslant\exp_p\left\{r^{\sigma_p(a_0)+\varepsilon}\right\}.\tag{12}$$

由(8)，(11)及(12)式可知，当 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1\cup E_2$ 且 $|g(z)|=M(r,g),r\to\infty$ 时，有(9)式成立.又由(9)式及引理 1 和引理 4 易知 $\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(a_0)$.

下证 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)$. 显然 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)\leqslant\lambda_{p+1}(f)\leqslant\sigma_{p+1}(f)$. 又因 $F\not\equiv0$，可将方程(2)改写为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f}+a_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}+\cdots+a_0\right),\tag{13}$$

由(13)式易知

$$n(r,1/f)\leqslant k\overline{n}(r,1/f)+n(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}n(r,a_j),$$

$$N(r,1/f)\leqslant k\overline{N}(r,1/f)+N(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}N(r,a_j).\tag{14}$$

由(13)式及对数导数引理知，至多除去 1 个线性测度为有限的集合 E_3, 对所有 $r\notin E_3$，有

$$m(r,1/f)\leqslant m(r,1/F)+\sum_{j=0}^{k-1}m(r,a_j)+O\{\log rT(r,f)\}.\tag{15}$$

由(14)式和(15)式可知

$$T(r,f)=T(r,1/f)+O(1)\leqslant k\overline{N}(r,1/f)+T(r,F)+\sum_{j=0}^{k-1}T(r,a_j)+O\{\log rT(r,f)\}.\tag{16}$$

当 r 充分大时，将 $O\{\log rT(r,f)\}\leqslant T(r,f)/2$ 代入(16)式，并由题设条件和引理 1 可知 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)\geqslant\sigma_{p+1}(f)$. 从而 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)\leqslant\sigma_p(a_0)$.

假设有方程(2)的解 $f_1,f_2\,(f_1\neq f_2)$ 满足 $\sigma_{p+1}(f_1)<\sigma_p(a_0),\sigma_{p+1}(f_2)<\sigma_p(a_0)$，则 $\sigma_{p+1}(f_1-f_2)\leqslant\max\{\sigma_{p+1}(f_1),\sigma_{p+1}(f_2)\}<\sigma_p(a_0)$. 而 f_1-f_2 是方程(2)对应齐次方程的解，由定理 1 证明的第 1 部分可知 $\sigma_{p+1}(f_1-f_2)\geqslant\sigma_p(a_0)$, 于是矛盾. 即至多除去 1 个例外解，其它所有亚纯解 $f(\not\equiv0)$ 有 $\overline{\lambda}_{p+1}(f)=\lambda_{p+1}(f)=\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(a_0)$. 定理 2 证毕.

定理 3 的证明　由于方程(1)的所有解为亚纯函数，设 $\{f_1,f_2,\cdots,f_k\}$ 为方程(1)的基础解系，由引理 5 有

$$m(r,a_d)\leqslant M\log\left(\max\{T(r,f_n),1\leqslant n\leqslant k\}\right).$$

因为 $i_\lambda(1/a_d)<p$ 或 $\lambda_p(1/a_d)<\sigma_p(a_d)$, 所以

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\log_p m(r,a_d)/\log r=\sigma_p(a_d),$$

故存在 1 个对数测度为无穷的集合 $E_4\subset(1,\infty)$，使得 $|z|=r\in E_4$, 有

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_4}}\log_p m(r,a_d)/\log r=\sigma_p(a_d).$$

令 $E_{4n}=\{r:r\in E_4,m(r,a_d)\leqslant M\log T(r,f_n)\}\ (n=1,\cdots,k)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{k}E_{4n}=E_4$. 由于 E_4 的对数测度为无穷，所以必存在某个 $E_{4n}\ (n\in\{1,\cdots,k\})$, 不妨设为 E_{4m}，在 $r\in E_{4m}$ 上满足 $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\ r\in E_{4m}}}\log_p m(r,a_d)/\log r=\sigma_p(a_d)$ 和 $m(r,a_d)\leqslant M\log T(r,f_m)$. 由此可得 $\sigma_p(a_d)\leqslant\sigma_{p+1}(f_m)$.

将方程(1)改写为

$$-a_d=(f^k+a_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+a_{d+1}f^{(d+1)}+ a_{a-1}f^{(d-1)}+\cdots+a_0f)/f_d$$

从而可得

$$T(r,a_d)\leqslant CT(r,f)+\sum_{j\neq d}T(r,a_j)+O(\log r),\tag{17}$$

其中 C 为实常数.又假设 $\max\{\sigma_p(a_j):j=0,\cdots,k-1$

且$j \ne d\}$ $< \mu_p(a_d)$ 及(17)式可得 $\mu_p(f) \geqslant \mu_p(a_d)$. 又因为$\lambda_p(1/f) < \mu_p(a_d)$,所以$\lambda_p(1/f) < \mu_p(a_d) \leqslant \mu_p(f)$.

由 Hadamard 定理, f 可表示成 $f(z) = g(z)/d(z)$, 其中 $g(z), d(z)$ 为整函数, 满足 $\mu_p(g) = \mu_p(f) \leqslant \sigma_p(g) = \sigma_p(f), \sigma_p(d) = \lambda_p(1/f) < \mu_p(f)$. 由引理 2, 取 z 为 $|z| = r$ 上的点, 满足 $|g(z)| = M(r,g), \upsilon_g(r)$ 表示整函数 $g(z)$ 的中心指标, 则存在 1 个对数测度有限的集合 $E_1 \subset (1,\infty)$, 当 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$ 时, 有(5)式成立.

由引理 3, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 1 个有限线性测度的集合 E_2, 当 $|z| = r \notin E_2$ 且 r 充分大时, 有

$$\left|a_j(z)\right| \leqslant \exp_p\left\{r^{\sigma_p(a_d)+\varepsilon}\right\} \ (j = 0,\cdots,k-1). \tag{18}$$

由(5), (6)及(18)式可知, 当 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1 \cup E_2$ 且 $|g(z)| = M(r,g), r \to \infty$ 时, 有

$$\upsilon_g(r)\left|1+o(1)\right| \leqslant kr^k \left|1+o(1)\right| \exp_p\left\{r^{\sigma_p(a_d)+\varepsilon}\right\}. \tag{19}$$

由(19)式及引理 1 和引理 4 易知 $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(g) \leqslant \sigma_p(a_d) + \varepsilon$.根据 ε 的任意性, 可得 $\sigma_{p+1}(f) \leqslant \sigma_p(a_d)$. 从而至少存在 1 个亚纯解 f_m 使 $\sigma_{p+1}(f_m) = \sigma_p(a_d)$. 定理 3 证毕.

定理 4 的证明 由定理 3 知 $\sigma_{p+1}(f_j) \leqslant \sigma_p(a_d)$ $(j = 1,\cdots,k)$, 且存在 1 个 f_j, 不妨设为 f_1, 满足 $\sigma_{p+1}(f_1) = \sigma_p(a_d)$. 用文献[12]的证明方法, 可以证明解空间 $\{cf_1 + f_0, c \in \mathbf{C}\}$ 内的解满足 $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(a_d)$, 至多有 1 个例外.定理 4 证毕.

3 参考文献

[1] 石磊, 易才凤. 一类高阶线性微分方程解的增长性 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(3): 230-233.

[2] 龙见仁, 伍鹏程. 单位圆上高阶线性微分方程解的性质 [J]. 江西师范大学学报: 自然科学版, 2012, 36(2): 147-150.

[3] 杨乐.值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[4] Bernal L G. On growth *k*-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equation [J]. Proc Amer Math Soc, 1987, 101(2): 317-322.

[5] Kinnunen L. Linear differential equations with solutions of finite iterated order [J]. Southeast Asian Bull Math, 1998, 22(4): 385-405.

[6] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations [M]. Berlin: de Gruyter Studies in Mathematics, 1993.

[7] 陈玉, 陈宗煊.几类高阶线性微分方程亚纯解的增长性 [J]. 数学研究与评论. 2007, 27(4): 826-831.

[8] Tu Jin, Chen Zongxuan. Growth of solutions of complex differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order [J]. Southeast Asian Bull Math, 2009, 33(1): 153-164.

[9] Tu Jin, Long Teng.Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2009, 66: 1-13.

[10] 涂金, 陈宗煊, 曹廷彬. 几类微分方程解的迭代解与零点收敛指数 [J].数学研究与评论, 2006, 26(4): 757-763.

[11] Frank G, Hellerstein S. On the meromorphic solutions of non-homogeneous linear differential equations with polynomial coefficients [J]. Proc London Math Soc, 1986, 53(3): 407-428.

[12] 肖丽鹏, 陈宗煊. 一类高阶微分方程亚纯解的增长性 [J]. 数学研究, 2005, 38(3): 265-271.

The Iterated Order of Meromorphic Solutions of Some Classes of Higher Order Linear Differential Equations

HE Jing, ZHENG Xiu-min*

(College of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi 330022, China)

Abstract: The growth and the distribution of zeros of meromorphic solutions of some classes of higher order linear differential equations with meromorphic coefficients of iterated orders are investigated. Some results on the iterated order of the solutions, which satisfy some conditions are obtained, when the coefficient a_0 or a_d dominates the other coefficients. Our results are extensions on previous results.

Key words: linear differential equation; meromorphic solution; iterated order; iterated convergence exponent of zero sequence

(责任编辑: 王金莲)