

2018 年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学全国 I 卷

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名, 准考证号填写在答题卡上
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{0, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

【答案】 A

【解析】 集合 A, B 的公共元素为 0, 2, 故 $A \cap B = \{0, 2\}$

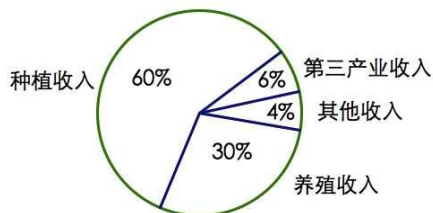
2. 设 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i$, 则 $|z| =$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

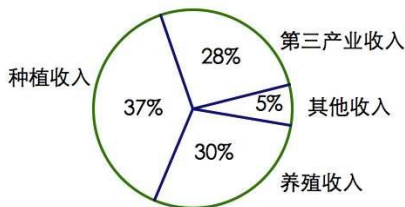
【答案】 C

【解析】 $z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} + 2i = \frac{1-2i+i^2}{1-i^2} + 2i = \frac{-2i}{2} + 2i = i$, 则 $|z| = 1$

3. 某地区经过一年的新农村建设, 农村的经济收入增加了一倍, 实现翻番, 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况, 统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例, 得到如下饼图:



建设前经济收入构成比例



建设后经济收入构成比例

则下面结论中不正确的是

- A. 新农村建设后, 种植收入减少

- B. 新农村建设后，其他收入增加了一倍以上
C. 新农村建设后，养殖收入增加了一倍
D. 新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

【答案】A

【解析】设建设前经济收入为 a ，则经济建设后经济收入为 $2a$ ，建设前种植收入为 $a \times 60\% = 0.6a$ ，建设后种植收入为 $2a \times 37\% = 0.74a$ ，故A选项错误。建设前其他收入为 $a \times 4\% = 0.04a$ ，建设后其他收入为 $2a \times 5\% = 0.1a$ ，建设后其他收入增加了一倍以上，B选项正确。建设前养殖收入为 $a \times 30\% = 0.3a$ ，建设后养殖收入为 $2a \times 30\% = 0.6a$ ，增加了一倍，选项C正确。建设后养殖收入与第三产业收入总和占比为 $30\% + 28\% = 58\%$ ，超过了经济收入的一半，选项D正确。

4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点为 $(2, 0)$ ，则 C 的离心率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】C

【解析】由题意， $c = 2, b^2 = 4$ ，则 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2\sqrt{2}$ ，离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1, O_2 ，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为8的正方形，则该圆柱的表面积为

- A. $12\sqrt{2}\pi$ B. 12π C. $8\sqrt{2}\pi$ D. 10π

【答案】B

【解析】正方形面积为8，边长为 $2\sqrt{2}$ ，则该圆柱的底面圆半径 $r = \sqrt{2}$ ，高 $h = 2\sqrt{2}$ ，则该圆柱的表面积为 $S = \pi \times (\sqrt{2})^2 \times 2 + 2\pi \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12\pi$

6. 设函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$ ，若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为

- A. $y = -2x$ B. $y = -x$ C. $y = 2x$ D. $y = x$

【答案】D

【解析】函数 $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$ 为奇函数，则 $f(-x) = -x^3 + (a-1)x^2 - ax = -f(x)$ ，则 $a = 1$ ，

$$f(x) = x^3 + ax, \quad f'(x) = 3x^2 + 1,$$

$$f'(0) = 1, \quad f(0) = 0, \quad \text{则 } f(x) \text{ 在点 } (0, f(0)) \text{ 处的切线为 } y = x$$

7. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 为 BC 上的中线， E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB} =$

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

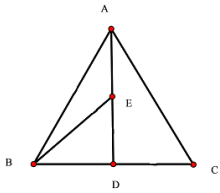
B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

【答案】A

【解析】如图，因为 D 为 AC 中点，所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ ，又因为 E 为 AD 中点，



所以 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AE}$ ， $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ， $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

8. 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2$ ，则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π ，最大值为 3

B. $f(x)$ 的最小正周期为 π ，最大值为 4

C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，最大值为 3

D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，最大值为 4

【答案】B

【解析】 $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = (\cos 2x + 1) - \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2 = \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{5}{2}$ ，则 $f(x)$ 的最小正

周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，当 $\cos 2x = 1$ 时， $f(x)$ 取最大值 4

9. 某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如右图。圆柱的表面上的 M 在正视图上的对应点为 A ，圆柱表面上的点 N 在左视图的对应点为 B ，则在此圆柱的侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为

A. $2\sqrt{17}$

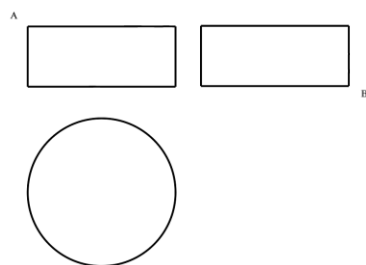
B. $2\sqrt{5}$

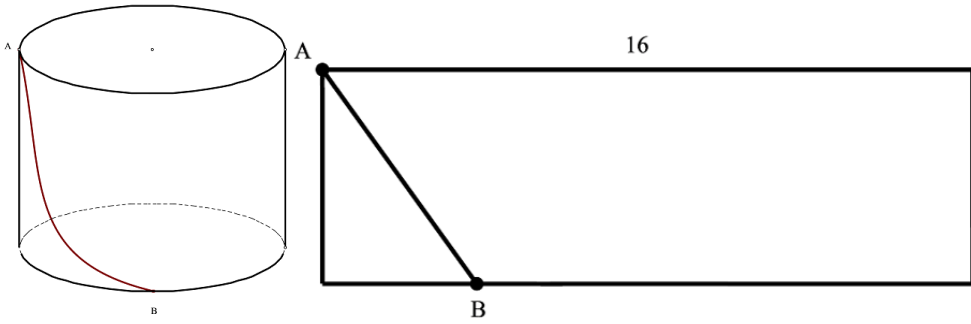
C. 3

D. 2

【答案】B

【解析】立体图和侧面展开图如下：





所以 $|AB| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, 选 B

10. 在长方体中 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=BC=2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° 则该长方体的体积为

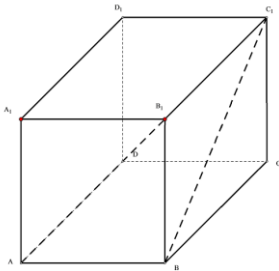
A. 8

B. $6\sqrt{2}$

C. $8\sqrt{2}$

D. $8\sqrt{3}$

【答案】C



【解析】

如图所示, AC_1 与平面 BB_1C_1C 的夹角是 $\angle AC_1B$

$$\therefore \angle AC_1B = 30^\circ$$

设该长方体的高为 h , $\because AB=BC=2$

$$AC_1 = \sqrt{h^2 + 8}, BC_1 = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore |AB|^2 + |BC_1|^2 = |AC_1|^2$$

解得 $h = 2\sqrt{2}$

$$\therefore V = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}, \text{ 选 C}$$

11. 已知角 α 的顶点为坐标原点, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边上有两点 $A(1, a), B(2, b)$, 且

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3}, \text{ 则 } |a-b| =$$

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 1

【答案】B

【解析】 $\because \alpha$ 终边上的点为 $(1, a), (2, b)$

$\therefore \alpha$ 在第一或四象限, $\therefore \cos \alpha > 0$

$\therefore \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3}$ 且 $\cos \alpha > 0$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{b^2+4}}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ b = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ b = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

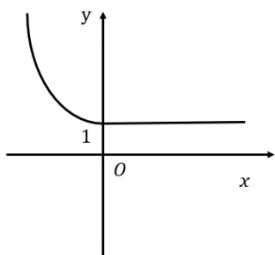
$\therefore |a-b| = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 选 B

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, 则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, 0)$ D. $(-\infty, 0)$

【答案】D

【解析】函数 $f(x)$ 的图像如图所示,



则由 $f(x+1) < f(2x)$ 有 $\begin{cases} x+1 > 2x \\ 2x < 0 \end{cases}$, 则 $x \in (-\infty, 0)$, 选 D

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 + a)$, 若 $f(3) = 1$, 则 $a =$ _____.

【答案】-7

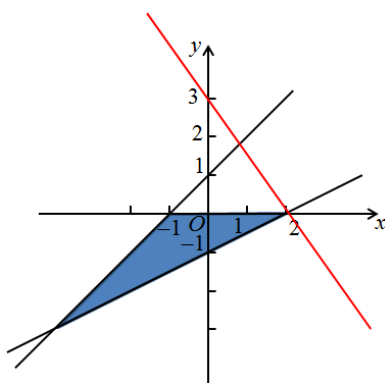
【解析】

$$\begin{aligned} \therefore f(3) &= 1 \\ \therefore 1 &= \log_2(9+a) \\ \therefore 9+a &= 2^1 = 2 \\ \therefore a &= -7 \end{aligned}$$

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y-2 \leq 0, \\ x-y+1 \geq 0, \\ y \leq 0, \end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为_____.

【答案】6

【解析】根据约束条件画出可行域：



$z=3x+2y \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$, 结合图象知直线 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$ 过点 $(2,0)$ 时截距 $\frac{z}{2}$ 最大, 即 z 最大,

所以 $z_{\max} = 3x+2y = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$.

15. 直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】将圆的方程写成标准方程: $x^2+(y+1)^2=4$, 所以圆心为 $(0,-1)$, 半径为 $r=2$, 圆心到直线

$y=x+1$ 的距离为 $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 由勾股定理及垂径定理, 有 $|AB| = 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{2}$.

16. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$, $b^2 + c^2 - a^2 = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】由正弦定理得: $2bc = 4ab \sin C$, 所以 $c = 2a \sin C$, 再由正弦定理有 $\sin C = 2 \sin A \sin C$,

又 $C \in (0, \pi)$, $\sin C > 0$, 所以有 $\sin A = \frac{1}{2}$,

而由 $b^2 + c^2 - a^2 = 8$ 及余弦定理知 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0$, 故 A 为锐角, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$,

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $bc = \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤, 第 17—21 题为必考题, 每个试题学生都必须作答, 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分

17. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$, 设 $b_n = \frac{a_n}{n}$.

(1) 求 b_1, b_2, b_3 ;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列, 并说明理由;

(3) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

【答案】(1) $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4$ (2) 是 (3) $a_n = n2^{n-1}$

【解析】(1) $b_1 = \frac{a_1}{1} = 1$

$b_2 = \frac{a_2}{2}$, $a_2 = 4a_1 = 4$, 所以 $b_2 = 2$

$b_3 = \frac{a_3}{2}$, $2a_3 = 6a_2 = 24$, 所以 $b_3 = 4$

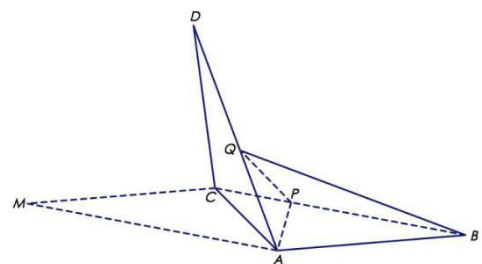
(2) 因为 $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}$, 即 $b_{n+1} = 2b_n$

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列

(3) 由 (2) 可知 $b_n = 2^{n-1}$, 所以 $a_n = n2^{n-1}$

18. (12 分) 如图, 在平行四边形 $ABCM$ 中, $AB = AC = 3$, $\angle ACM = 90^\circ$. 以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起, 使点 M 到达点 D 的位置, 且 $AB \perp DA$.

(1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;



(2) Q 为线段 AD 上一点, P 为线段 BC 上一点, 且 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$, 求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积.

【答案】(1) 见解析 (2) 1

【解析】(1) 在平行四边形 $ABCD$ 中, $CM \parallel AB$,

因为 $AC \perp CM$, 所以 $AC \perp AB$

又 $AD \perp AB, AD \cap AC = A$

所以 $AB \perp$ 面 ACD

因为 $AB \subset$ 面 ABC

所以面 $ABC \perp$ 面 ACD .

(2) 如图所示, 过 Q 作 QE 垂直 AC 于 E

因为 $DC \perp AC$, 又 AC 是面 ABC 和面 ACD 的交线,

所以 $DC \perp$ 面 ABC , 因为 $QE \parallel DC$

所以 $QE \perp$ 面 ABC , 所以 QE 就是三棱锥 $Q-APB$ 的高

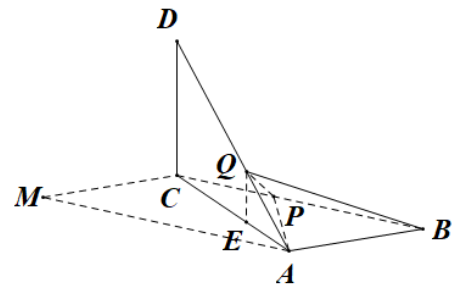
因为 $AB = AC = CD = 3, \angle BAC = \angle ACD = 90^\circ$, 所以 $AD = BC = 3\sqrt{2}$,

因为 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$, 所以 $AQ = \frac{1}{3}AD, BP = \frac{2}{3}BC$,

由相似易得 $QE = \frac{1}{3}CD = 1$, P 到 AB 的距离 $h = \frac{2}{3}AC = 2$.

所以 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$

所以 $V_{Q-APB} = \frac{1}{3}S_{\triangle APB} \cdot QE = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 1 = 1$.



19. (12分) 某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据 (单位: m^3) 和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据, 得到频数分布表如下:

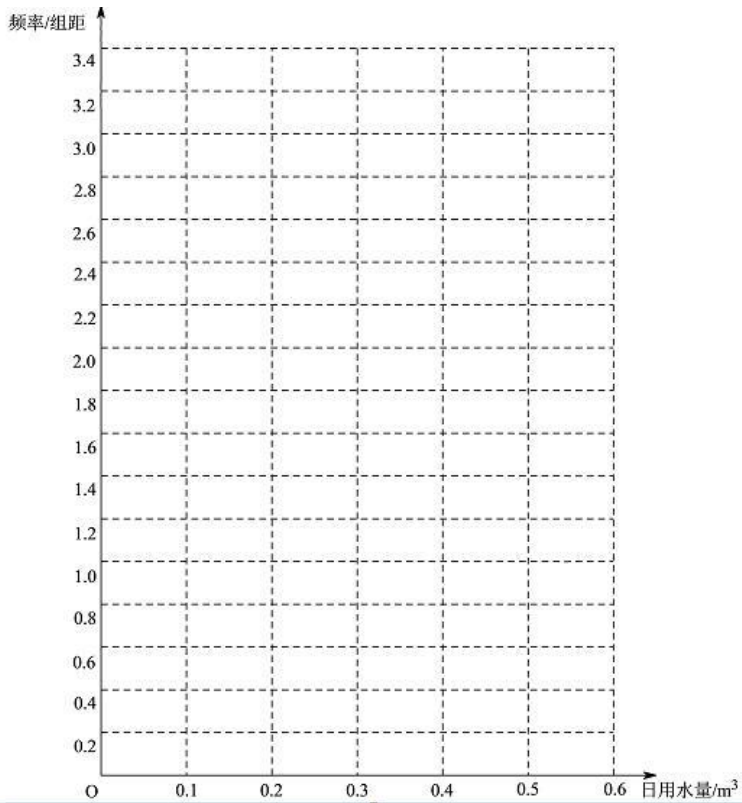
未使用节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	[0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	[0.5,0.6)	[0.6,0.7)
频数	1	3	2	4	9	26	5

使用了节水龙头 50 天的日用水量频数分布表

日用水量	[0,0.1)	[0.1,0.2)	[0.2,0.3)	[0.3,0.4)	[0.4,0.5)	[0.5,0.6)
频数	1	5	13	10	16	5

(1) 在答题卡上作出使用了节水龙头 50 天的日常用水量数据的频率分布直方图

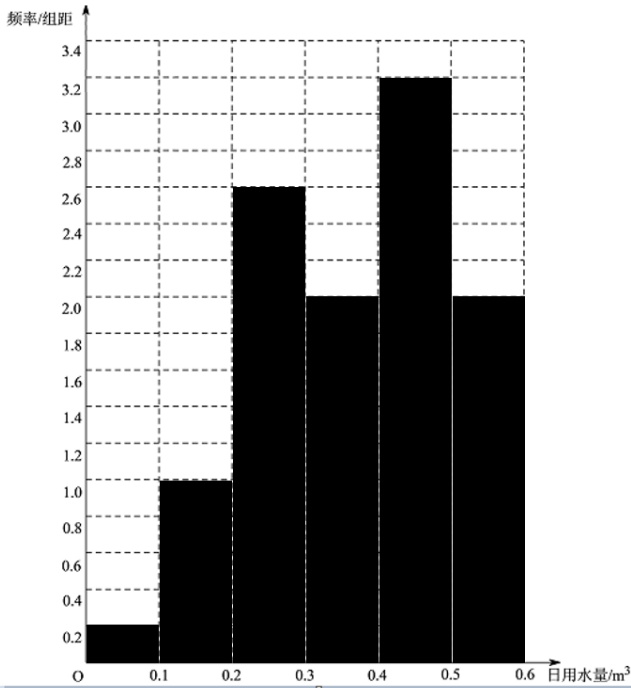


(2) 估计该家庭使用节水龙头后，日用水量小于 $0.35m^3$ 的概率；

(3) 估计该家庭使用节水龙头后，一年能节省多少水？（一年按 365 天计，同一组中的数据以这组数据所在区间重点的值作代表）

【答案】(1) 见解析 (2) 48% (3) 47.45

【解析】(1)



(2) 只需要计算频率分布直方图中，横坐标为0.35左边的矩形的面积
其面积为 $0.1 \times 0.2 + 0.1 \times 1 + 0.1 \times 2.6 + 0.05 \times 2 = 0.48$

(3) 未使用节水龙头，每日用水量平均值为

$$\frac{1}{50} (1 \times 0.05 + 3 \times 0.15 + 2 \times 0.25 + 4 \times 0.35 + 9 \times 0.45 + 26 \times 0.55 + 5 \times 0.65) = 0.48$$

使用节水龙头，每日用水量平均值为

$$\frac{1}{50} (1 \times 0.05 + 5 \times 0.15 + 13 \times 0.25 + 10 \times 0.35 + 16 \times 0.45 + 5 \times 0.55) = 0.35$$

所以每日平均节省了0.13立方米的水量，因此一年节省 $0.13 \times 365 = 47.45$

20. (12分) 设抛物线 $C: y^2 = 2x$ ，点 $A(2,0)$ ， $B(-2,0)$ ，过点 A 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点

(1) 当 l 与 x 轴垂直时，求直线 BM 的方程；

(2) 证明： $\angle ABM = \angle ABN$.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ (2) 见解析

【解析】(1) l 与 x 轴垂直时，其方程为 $x = 2$ ，解得 $M(2,2)$ 或 $M(2,-2)$

当 $M(2,2)$ 时，方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$

当 $M(2,-2)$ 时，方程为 $y = -\frac{1}{2}x - 1$

(2) 要想证明 $\angle ABM = \angle ABN$ ，只需要证明 BM, BN 斜率相反

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，即只需要证明 $\frac{y_1}{x_1 + 2} = -\frac{y_2}{x_2 + 2}$

设 l 的方程为 $x = my + 2$ ，联立抛物线方程可得： $y^2 - 2my - 4 = 0$

所以 $y_1 + y_2 = 2m, y_1 y_2 = -4$

所以要证 $\frac{y_1}{x_1 + 2} = -\frac{y_2}{x_2 + 2}$ ，即证 $\frac{y_1}{my_1 + 4} = -\frac{y_2}{my_2 + 4}$

即证 $2my_1 y_2 + 4(y_1 + y_2) = 0$

代入 $y_1 + y_2 = 2m, y_1 y_2 = -4$ 可得上式成立，因此 $\angle ABM = \angle ABN$

21. (12分) 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x - 1$.

(1) 设 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a ，并求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明：当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时， $f(x) \geq 0$.

【答案】(1) $a = \frac{1}{2e^2}$ ，单调减区间 $(0, 2)$ ，单调增区间 $(2, +\infty)$ ；(2) 见解析

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，易求得 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$ ，

则由 $f'(2) = 0$ ，解得 $a = \frac{1}{2e^2}$ ，

所以 $f'(x) = \frac{1}{2}e^{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{x-2} - 2}{2x}$ ，

因为 x, e^{x-2} 在 $(0, +\infty)$ 上都是正的递增函数，所以 xe^{x-2} 在 $(0, +\infty)$ 也是递增函数，

所以 $xe^{x-2} - 2 = 0$ 至多一根，又易知 $x = 2$ 满足方程，所以 $x = 2$ 是其唯一解，

所以在 $(0, 2)$ 上， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；在 $(2, +\infty)$ 上， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增。

所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, 2)$ ，单调增区间为 $(2, +\infty)$ 。

(2) $f'(x) = \frac{axe^x - 1}{x}$ ，令 $G(x) = axe^x - 1, x \in (0, +\infty)$ ，

因为 $a \geq \frac{1}{e}$ ，所以易知 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

又 $G(0) = -1 < 0, G(1) = ae - 1 \geq 0$ ，所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点，令为 x_0 ，

则有 $x_0 \in (0, 1]$ ，及 $ax_0 e^{x_0} - 1 = 0$ ，且当 $x \in (0, x_0)$ 时， $G(x) < 0$ ，当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $G(x) > 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(x_0)$ ，

且 $f(x_0) = ae^{x_0} - \ln x_0 - 1 = \frac{1}{x_0} - \ln x_0 - 1$,

令 $F(x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1$, 求导得 $F'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

因为 $0 < x_0 \leq 1$, 所以 $F(x_0) \geq F(1) = 0$, 所以 $f(x_0) \geq 0$, 即 $f(x) \geq 0$.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的方程为 $y = k|x| + 2$. 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho \cos \theta - 3 = 0$

(1) 求 C_2 的直角坐标方程

(2) 若 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点, 求 C_1 的方程.

【答案】(1) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ (2) $y = -\frac{4}{3}|x| + 2$

【解析】(1) 因为 $\rho^2 = x^2 + y^2, \rho \cos \theta = x$, 代入得 $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

(2) $y = \begin{cases} kx + 2, & x \geq 0 \\ -kx + 2, & x < 0 \end{cases}$, 则 C_2 的圆心 $(-1, 0)$ 到 $y = kx + 2$ 和 $y = -kx + 2$ 的距离分别为

$$d_1 = \frac{|-k+2|}{\sqrt{1+k^2}}, d_2 = \frac{|k+2|}{\sqrt{1+k^2}}$$

既然只有 3 个交点, 则 d_1, d_2 其中之一必然有一个正好等于半径 2, 另一个应该小于 2

若 $d_1 = 2$, 解得 $k = 0$ 或 $k = -\frac{4}{3}$

$k = 0$ 时, 作图实际验证可得只有 1 个交点

$k = -\frac{4}{3}$ 时, 作图实际验证可得有 3 个交点

若 $d_2 = 2$, 解得 $k = 0$ 或 $k = \frac{4}{3}$

$k = \frac{4}{3}$, 作图实际验证可得无交点

所以 $k = -\frac{4}{3}$, 所以 $y = -\frac{4}{3}|x| + 2$

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 $f(x) = |x+1| - |ax-1|$

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(2) 若 $x \in (0,1)$ 时不等式 $f(x) > x$ 成立, 求 a 的取值范围

【答案】(1) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (2) $(0, 2]$

【解析】(1) $a=1$ 时, $f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 1 \\ 2x, & -1 < x < 1 \\ -2, & x \leq -1 \end{cases}$

所以 $f(x) > 1$, 即 $\begin{cases} 2 > 1, & x \geq 1 \\ 2x > 1, & -1 < x < 1 \\ -2 > 1, & x \leq -1 \end{cases}$ 解得 $x > \frac{1}{2}$

(2) 当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x) = x+1 - |ax-1| > x$
即 $|ax-1| < 1$ 在 $x \in (0,1)$ 上恒成立。

①若 $\frac{1}{a} \leq 0 \Rightarrow a < 0$ 时, 当 $x \in (0,1)$ 时, $|ax-1| < |a-1| \leq 1$, 解得 $a \in [0, 2]$, 所以此时无解

②若 $a=0$, 则 $1 < 1$ 不成立, 因此 $a \neq 0$

③若 $\frac{1}{a} \in (0, \frac{1}{2}) \Rightarrow a \in (2, +\infty)$ 时, 当 $x \in (0,1)$ 时, $|ax-1| < |a-1| \leq 1$, 解得 $a \in [0, 2]$, 所以此时无解

④若 $\frac{1}{a} \in [\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow a \in (1, 2]$ 时, 当 $x \in (0,1)$ 时, $|ax-1| < 1$ 恒成立, 所以 $a \in (1, 2]$

⑤若 $\frac{1}{a} \geq 1 \Rightarrow a \in (0, 1]$ 时, 当 $x \in (0,1)$ 时, $|ax-1| < 1$ 恒成立, 所以 $a \in (0, 1]$

综上所述, $a \in (0, 2]$