2017届第一学期高三教学调研（2016.12）

数学试卷上海市七校十二月联考数学试卷

2016.12

一、 填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生必须在答题纸相应编号空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律不得分.

1、 函数 $f(x)=\sin(\pi x+\frac{1}{3})$ 的最小正周期 $T=$________.

2、函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数是________.

3、计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3n^2}{5n^2+1}=$________.

4、已知函数 $g(x)=2^x$，且 $g(a)\cdot g(b)=2$，则 ab 的最大值是________.

5、 方程 $\lg(2x+1)+\lg x=1$ 的解为________.

6、 $\triangle ABC$ 中，A,B,C 所对边分别为 a,b,c，$a=1$，$b=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{3}$，则 $B=$________.

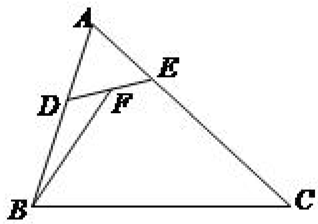
7、设 x_0 为函数 $f(x)=2^x+x-2$ 的零点，且 $x_0\in(m,n)$，其中 m,n 为相邻的整数，则 $m+n=$________.

8、定义在 R 上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+5)=3$，$f(1)=2$，则 $f(2016)=$________.

9、已知 $\cos(\pi+\theta)=-\frac{2}{3}$， $\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)$，则 $\theta=$________.

10、设公比为 q $(q>0)$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n，若 $S_2=3a_2+2$， $S_4=3a_4+2$，则 $q=$________.

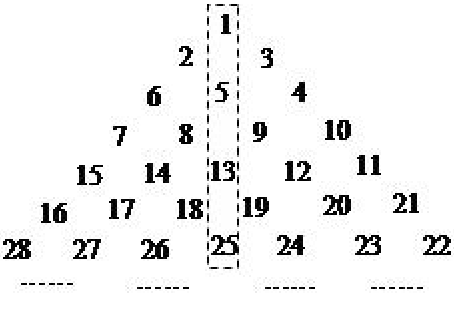
11、如右图在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=4$， $AC=6$，$\angle BAC=60^\circ$， D、E 分别在边 AB、AC 上，且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$， $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$，点 F 为 DE 的中点，则 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}=$________.



12、 若不等式 $|x+a|\le 2$ 在 $x\in[1,2]$ 时恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

13、设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，若 A 的所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$，则集合 $A=$________.

14、把自然数按右图所示排列起来，从上往下依次为第一行、第二行、第三行……，中间用虚线围起来的一列数，从上往下依次为1、5、



13、25、……，按这样的顺序，排在第 30 个的数是________.

二. 选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生必须在答题纸相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律不得分.

15、 若 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $ab<b^2$　　C. $-ab<-a^2$　　D. $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

16、已知平面直角坐标系内的两个向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(m,3m-2)$，且平面内的任一向量 $\vec{c}$ 都可以唯一的表示成 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ (λ,μ 为实数)，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. R　　D. $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

17、下列说法中正确的是（　　）

A. 命题“若 $x^2=1$，则 $x=1$”的否命题是“若 $x^2=1$，则 $x\neq 1$”

B.“$x=-1$”是“$x^2-x-2=0$”的必要不充分条件

C. 命题“若 $x=y$，则 $\sin x=\sin y$”的逆否命题是真命题

D.“$\tan x=1$”是“$x=\frac{\pi}{4}$”的充分不必要条件

18、 已知函数 $f(x)=\sqrt{4-(x-2)^2}$，$x\in[2,4]$ 对于满足 $2<x_1<x_2<4$ 的任意 x_1、x_2，下列结论：① $x_1f(x_2)>x_2f(x_1)$；② $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$；③ $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]<0$；④ $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]>0$；其中正确的是（　　）

A. ①③　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

三. 解答题（本大题满分 74 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19、（本题满分 12 分）本题共有 3 小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 4 分

已知 $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2}$

（1） $\sqrt{2}\vec{a}=\vec{b}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

（2）若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $60°$，求 $|\vec{a}+\vec{b}|$；

（3）若 $\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

20、（本题满分 12 分）本题共有 3 小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 4 分

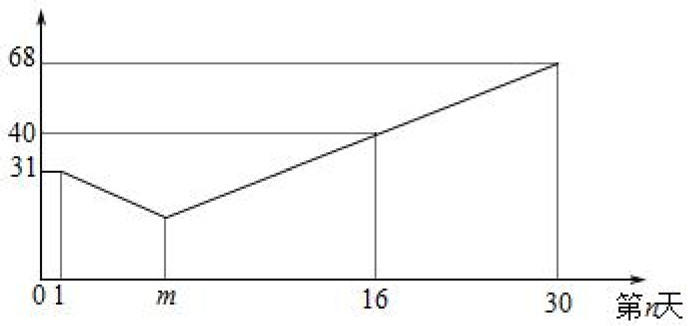
某电器专卖店销售某种型号的空调，记第 n 天 $\left(1\le n\le 30,n\in N^*\right)$ 的日销售量为 $f\left(n\right)$（单位：

台），函数 $f(n)$ 图像中的点分别在两条直线上，如图所示该两条直线交点的横坐标为 $m\left(m\in N^*\right)$，已知 $1\le n\le m$ 时，函数 $f(n)=32-n$

（1）当 $m\le n\le 30$ 时，求函数 $f(n)$ 的解析式;

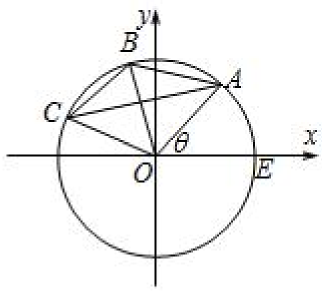
（2）求 m 的值及该店前 m 天销售该型号空调的销售总量;

（3）按照经验判断当该店此型号空调的销售总量达到或超过 570 台，且日销售量仍持续增加时，该型号空调开始旺销，问该店此型号空调销售到第几天时才可被认为开始旺销？



21、（本题满分 16 分）本题共有 2 小题，第 1 小题满分 8 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 4 分

如图已知单位圆上有四个点 $E(1,0),A(\cos\theta,\sin\theta)$，$B(\cos 2\theta,\sin 2\theta),C(\cos 3\theta,\sin 3\theta),0<\theta\le\dfrac{\pi}{3}$ 分别设 ΔOAC、ΔABC 的面积为 S_1 和 S_2.



（1）用 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 表示 S_1 和 S_2；

（2）求 $\dfrac{S_1}{\cos\theta}+\dfrac{S_2}{\sin\theta}$ 的最大值及取最大值时 θ 的值.

（3）

22、（本题满分 16 分）本题共有 3 小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分

已知 a,b 为实数，函数 $f(x)=x^2+ax+1$，且函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数，函数 $g(x)=-b\cdot f\left(f(x+1)\right)+(3b-1)\cdot f(x+1)+2$ 在区间 $(-\infty,2]$ 上的减函数，且在区间 $(-2,0)$ 上

是增函数

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）求实数 b 的值；

（3）设 $h(x)=f(x+1)-2qx+1+2q$，问是否存在实数 q，使得 $h(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上有最小值为 -2 ?若存在，求出 q 的值；若不存在，说明理由.

23、（本题满分 18 分）本题共有 3 小题，第 1 小题满分 8 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 5 分

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 c，公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为 d，公比为 c，其中 $c,d\in Z$，且 $a_1<b_1<a_2<b_2<a_3$.

（1）求证：$0<c<d$，并由 $b_2<a_3$ 推导 c 的值；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 共有 $3n$ 项，前 n 项的和为 A，其后的 n 项的和为 B，再其后的 n 项的和为 C，求的比值.

（3）若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项，前 $2n$ 项、前 $3n$ 项的和分别为 D,G,H，试用含字母 D,G 的式子来表示 H（即 $H=f(D,G)$，且不含字母 d）

参 考 解 答

一、填空题（本大题满分56分）

1、$\underline{2}$.　　2、$\underline{f^{-1}(x)=x^2(x\ge 0)}$.　　3、$\underline{-\frac{3}{5}}$.

4、$\underline{\frac{1}{4}}$.　　5、$\underline{2}$.　　6、$\underline{\frac{5}{6}\pi}$.

7、$\underline{1}$.　　8、$\underline{\frac{3}{2}}$.　　9、$\underline{-\arccos\frac{2}{3}}$.

10、$\underline{\frac{3}{2}}$.　　11、$\underline{4}$.　　12、$\underline{[-3,0]}$.

13、$\underline{\{-3,0,2,6\}}$.　　14、$\underline{1741}$.

二. 选择题（本大题满分20分）

15、D　　16、D　　17、C　　18、B

三、解答题（本大题满分74分）

19、（本题满分12分）本题共有3小题，第1小题满分4分，第2小题满分4分，第3小题满分4分.

参考解答：

（1）因为$\sqrt{2}\vec{a}=\vec{b}$，可知$\vec{a}\parallel\vec{b}$且方向相同，因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 0=\sqrt{2}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}$；

（2）因为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$60°$，因此$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 60°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+\sqrt{2}+2=3+\sqrt{2}$，因此$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\sqrt{2}+3}$.

（3）因为$\vec{a}-\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，所以$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，整理即$\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{b}=1$.

令$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ，因此$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta=\frac{\pi}{4}$.

20、（本题满分12分）本题共有3小题，第1小题满分4分，第2小题满分4分，第3小题满分4分.

参考解答：

（1）当$m\le n\le 30$时，设$f(n)=an+b$，由图可知$\begin{cases}f(16)=40\\f(30)=68\end{cases}$，则有$\begin{cases}16a+b=40\\30a+b=68\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=2\\b=8\end{cases}$，所以当$m\le n\le 30\ (n\in N^*)$时，$f(n)=2n+8$.

（2）由题意$\begin{cases}f(m)=2m+8\\f(m)=32-m\end{cases}$，解得$m=8$，由题意得$f(1)+f(2)+\ldots+f(8)=220$，

所以该店前8天，此型号的空调的销售总量为220台.

（3）由题意得$220+\frac{f(9)+f(n)}{2}\cdot(n-8)\ge 570$，即$n^2+9n-486\ge 0$，得$n\ge 18$.

因为当$m\le n\le 30\ (n\in N^*)$时，函数$f(n)=2n+8$单调增加，所以该店此型号空调销售到第18天时，才可被认为开始旺销.

21、（本题满分16分）本题共有2小题，第1小题满分8分，第2小题满分8分.

参考解答：

（1）$\angle xOA=\theta$，$\angle xOB=2\theta$，$\angle xOC=3\theta$，所以$\angle xOA=\angle AOB=\angle BOC=\theta$，

故$S_1=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin(3\theta-\theta)=\dfrac{1}{2}\sin2\theta=\sin\theta\cos\theta$.

又因为$S_1+S_2=S_{四边形OABC}=\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta=\sin\theta$，

所以$S_2=\sin\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta=\sin\theta(1-\cos\theta)$.

（2）由（1）知$\dfrac{S_1}{\cos\theta}+\dfrac{S_2}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}=\sin\theta-\cos\theta+1=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$.

因为$0<\theta\le\dfrac{\pi}{3}$，所以$-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{12}$，于是当$\theta=\dfrac{\pi}{3}$时去的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

22、（本题满分16分）本题共有3小题，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分6分.

参考解答：

（1）因为函数$y=f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+1$在定义域$R$上是偶函数，

所以有$(x+1)^2+a(x+1)+1=(-x+1)^2+a(-x+1)+1$，即$4x+2ax=0$，

可得$a=-2$，从而$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

（2）$g(x)=-bf(f(x+1))+(3b-1)\cdot f(x+1)+2=-bx^4+(5b-1)x^2+2-b$.

令$t=x^2$，则$u(t)=-bt^2+(5b-1)t-(b-2)$

在$x\in(-\infty,-2]$时，$t=x^2$是减函数，且$t\in[4,+\infty)$，由$g(x)$是减函数可知$u(t)$为增函数；

在$x\in(-2,0)$时，$t=x^2$是减函数，且$t\in(0,4)$，由$g(x)$是增函数可知$u(t)$为减函数；

因此针对二次函数$u(t)$在$t\in(0,4)$时是减函数，在$t\in[4,+\infty)$时是增函数，

所以该二次函数开口向上，可得$b<0$，且有$-\dfrac{5b-1}{-2b}=4$，即$b=-\dfrac{1}{3}$.

（3）函数$h(x)=x^2-2qx+1+2q, x\in[0,2]$，该二次函数的对称轴为$x=q$（分类讨论），

情况一：当$q<0$时，$y_{\min}=h(0)=1+2q=-2$，因此$q=-\dfrac{3}{2}$；

情况二：当$0\le q\le2$时，$y_{\min}=h(q)=q^2-2q^2+1+2q=-2$，因此$q=3$或$q=-1$，均舍；

情况三：当$q>2$时，$y_{\min}=h(2)=4-4q+1+2q=-2$，因此$q=\dfrac{7}{2}$；

综上所述可知$q=-\dfrac{3}{2}$或$q=\dfrac{7}{2}$.

23、（本题满分18分）本题共有3小题，第1小题满分8分，第2小题满分5分，第3小题满分5分.

参考解答：

（1）已知$a_1=c,a_2=c+d,a_3=c+2d,b_1=d,b_2=cd$，由$a_1<b_1$可知$c<d$，

由$b_1<a_2$可知$0<c$，因此$0<c<d$可得；

由条件可得$c<d<c+d<cd<c+2d$，且$c,d\in Z$，

因此可得不等式组$\begin{cases}0<c<d\\d<cd\\cd<c+2d<3d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<c\\1<c\\c<3\end{cases}\Rightarrow 1<c<3$，又因为$c\in Z$，因此$c=2$.

（2）$\{a_n\}$通项为$a_n=2+(n-1)\cdot d$，$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(2-\dfrac{d}{2}\right)n$，$A=S_n$，$B=S_{2n}-S_n$，$C=S_{3n}-S_{2n}$.

方法一：$B=\dfrac{d}{2}(4n^2-n^2)+\left(2-\dfrac{d}{2}\right)(2n-n)=\dfrac{d}{2}\cdot 3n^2+\left(2-\dfrac{d}{2}\right)\cdot n$，

$A+C=\dfrac{d}{2}n^2+\left(2-\dfrac{d}{2}\right)n+\dfrac{d}{2}(9n^2-4n^2)+\left(2-\dfrac{d}{2}\right)(3n-2n)=3d\cdot n^2+\left(2-\dfrac{d}{2}\right)\cdot 2n$

可得$A+C=2B$，因此$\dfrac{(B^2-AC)}{(A-C)^2}=\dfrac{(A+C)^2-4AC}{4(A-C)^2}=\dfrac{(A-C)^2}{4(A-C)^2}=\dfrac{1}{4}$.

方法二：$\begin{cases}A=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=S_n\\B=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots+a_{2n}=S_{2n}-S_n=S_n+n^2d\\C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\ldots+a_{3n}=S_{3n}-S_{2n}=S_n+2n^2d\end{cases}$，

因此A,B,C称等差数列，可得$A+C=2B$，即$\dfrac{(B^2-AC)}{(A-C)^2}=\dfrac{(A+C)^2-4AC}{4(A-C)^2}=\dfrac{1}{4}$.

（本题不局限于首项为2，因此针对任意等差数列均成立）

（3）$\{b_n\}$的通项为$b_n=d\cdot 2^{n-1}$，因此$D=\dfrac{d(2^n-1)}{2-1}=d(2^n-1)$，$G=d(2^{2n}-1)$，$H=d(2^{3n}-1)$.

整理可得$\begin{cases}G=(2^n+1)\cdot D\\H=(2^{2n}+2^n+1)\cdot D\end{cases}$，因此$H=D\cdot\left(\dfrac{G}{D}-1\right)^2+G=\dfrac{G^2}{D}+D-G$.