2018 年浙江省高考数学解析

新东方杭州学校优能中学教育 高中数学组

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，则 $C_U A=$（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{1,3\}$　　C．$\{2,4,5\}$　　D．$\{1,2,3,4,5\}$

【答案】C

【解析】全集 U 范围内 A 的补集中的元素有且只有 $2,4,5$．

2．双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的焦点坐标是（　　）

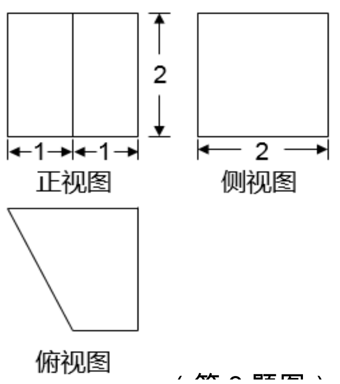
A．$(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0)$　　B．$(-2,0),(2,0)$　　C．$(0,-\sqrt{2}),(0,\sqrt{2})$　　D．$(0,-2),(0,2)$

【答案】B

【解析】双曲线焦点在 x 轴上，为 $(c,0)$ 和 $(-c,0)$，且 $c^2=3+1=4$，$c=2$，则焦点坐标为 $(-2,0),(2,0)$．

3．某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8



（第 3 题图）

【答案】C

【解析】该几何体为底面是直角梯形的四棱柱，底面积 $S=\frac{(1+2)*2}{2}=3$，高 $h=2$，$V=Sh=6$．

4．复数 $\frac{2}{1-i}$（i 为虚数单位）的共轭复数是（　　）

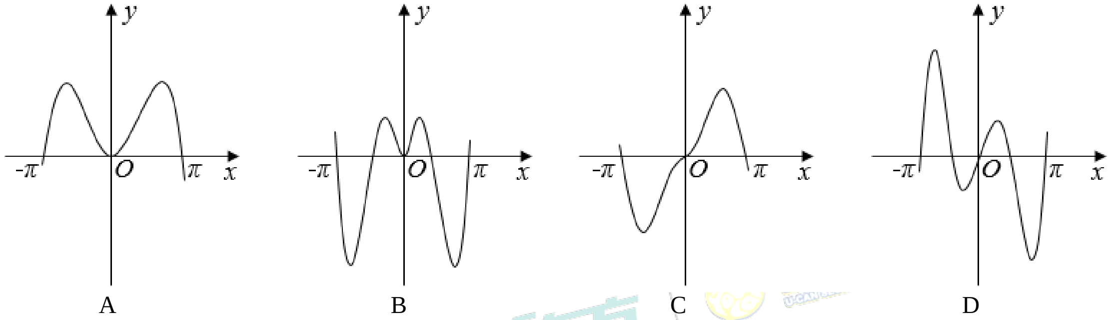
A．$1+i$　　B．$1-i$　　C．$-1+i$　　D．$-1-i$

【答案】B

【解析】$\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i}{1-i^2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$，$1+i$ 的共轭复数是 $1-i$．

优能中学教育 新东方 XDF.CN

5．函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是（　　）



【答案】D

【解析】由图可知，函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 是奇函数，所以排除 A、B 两个选项，

不论 x 取什么值，$2^{|x|}$ 始终大于 0，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$\sin 2x>0$，故 $2^{|x|}\sin 2x>0$，图像在 x 轴的上方，

当 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$\sin 2x<0$，$2^{|x|}\sin 2x<0$，故图像在 x 轴的下方，答案选 D．

6．已知平面 α，直线 m,n 满足 $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则“$m//n$”是“$m//\alpha$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】$m//n$ 时，$m//\alpha$ 成立，是线面平行的判定定理，即充分性成立；

$m//\alpha$，$m//n$ 不一定成立，此时会出现异面直线的情况，即必要性不成立，

所以 A 选项是正确的．

7．设 $0<p<1$，随机变量的分布列是:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当 p 在 $(0,1)$ 内增大时，（　　）

A．$D(\xi)$ 减小　　B．$D(\xi)$ 增大　　C．$D(\xi)$ 先减小后增大　　D．$D(\xi)$ 先增大后减小

【答案】D

【解析】∵期望 $E(\xi)=0\times(\frac{1-p}{2})+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{p}{2}=p+\frac{1}{2}$，

∴方差 $D(\xi)=(0-p-\frac{1}{2})^2\times(\frac{1-p}{2})+(1-p-\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}+(2-p-\frac{1}{2})^2\times\frac{p}{2}=-p^2+p+\frac{1}{4}$，

该函数为一元二次函数，开口向下，对称轴为 $p=\frac{1}{2}$，

$\therefore D(\xi)$ 先增大后减小.

8．已知四棱锥 $S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，E 是线段 AB 上的点（不含端点），设 SE 与 BC

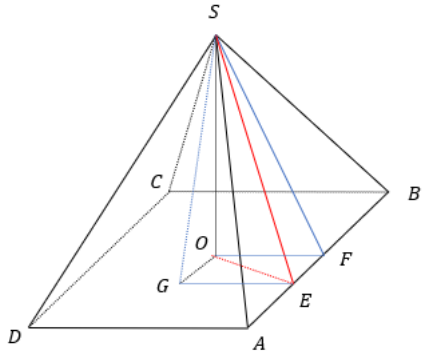
所成角为 θ_1 ，SE 与平面 $ABCD$ 所成角为 θ_2 ，二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3 ，则（　　）

A．$\theta_1 \le \theta_2 \le \theta_3$ B．$\theta_3 \le \theta_2 \le \theta_1$ C．$\theta_1 \le \theta_3 \le \theta_2$ D．$\theta_2 \le \theta_3 \le \theta_1$

【答案】D

【解析】如下图所示，作 S 的投影点 O ，取 AB 的中点为 F ，连接 SO ，SF ，OF ；

作 GE 平行于 BC ，且 $GE=\dfrac{1}{2}BC$ ，连接 SG ，GE ，SE ，OE .



$\because S-ABCD$ 的底面是正方形，侧棱长均相等，$\therefore \angle SOF=\angle SOE=\angle SGE=90^\circ$ ，

$\because SE$ 与 BC 所成角为 θ_1 ，$\therefore \cos\theta_1=\dfrac{GE}{SE}$ ，

$\because SE$ 与平面 $ABCD$ 所成角为 θ_2 ，$\therefore \sin\theta_2=\dfrac{SO}{SE}$ ，

$\because$二面角 $S-AB-C$ 的平面角为 θ_3 ，$\therefore \sin\theta_3=\dfrac{SO}{SF},\cos\theta_3=\dfrac{OF}{SF}$ ，

$\because GE=OF, SF<SE$ ，$\therefore \cos\theta_1<\cos\theta_3$ ，即 $\theta_1>\theta_3$ ，

$\therefore \sin\theta_2<\sin\theta_3$ ，即 $\theta_2<\theta_3$ ，

$\therefore \theta_1 \ge \theta_3 \ge \theta_2$.

9．已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{e}$ 为平面向量，$\vec{e}$ 是单位向量，若非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ ，向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b}^2-4\vec{e}\cdot\vec{b}+3=0$ ，则 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 的最小值是（　　）

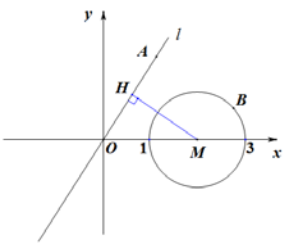
A．$\sqrt{3}-1$　　　B．$\sqrt{3}+1$　　　C．2　　　D．$2-\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

$\vec{e}$ 为单位向量，设 $\vec{e}=(1,0)$ ，$\vec{b}=(x,y)$ ，

由 $\vec{b}^2-4\vec{e}\cdot\vec{b}+3=0$ 可得 $x^2+y^2-4x+3=0$ ，即 $(x-2)^2+y^2=1$ ，可以表示为下图所示：



$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$（$B$ 在圆 $M:(x-2)^2+y^2=1$ 上运动）；$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$（$A$ **在** l **上运动，** l **与** x 轴的非负半轴所成角为 $\dfrac{\pi}{3}$ ）

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$ ，过 M 作 $MH\perp l$ ，垂足为**点** H ，**则** $\left|\overrightarrow{AB}\right|_{\min}=\left|MH\right|-1=\sqrt{3}-1$

10．已知 a_1,a_2,a_3,a_4 成等比数列,且 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$,若 $a_1>1$ ，则（　　）

A． $a_1<a_3,a_2<a_4$　　B． $a_1>a_3,a_2<a_4$　　C． $a_1<a_3,a_2>a_4$　　D． $a_1>a_3,a_2>a_4$

【答案】B

【解析】由 $x>0$ ， $\ln x\le x-1$ ，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)\le a_1+a_2+a_3-1$ ， $a_4\le -1$ ，于是公比 $q<0$

当 $q\le -1$ 时， $a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+q)(1+q^2)<0$ ，

此时 $a_1+a_2+a_3=a_1(1+q+q^2)\ge a_1>1$ ， $\ln(a_1+a_2+a_3)>0$ ，矛盾

所以 $-1<q<0$ ，即 $a_1-a_3=a_1(1-q^2)>0,a_2-a_4=a_1q(1-q^2)<0$ ，所以选 B

二、填空题：本大题共 7 个小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11．我国古代数学著作《张丘建算经》中记载百鸡问题："今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱，买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？"设鸡翁，鸡母，鸡雏个数分别为 x,y,z ，则 $\begin{cases}x+y+z=100\\5x+3y+\frac{1}{3}z=100\end{cases}$ ，当 $z=81$ 时， $x=$__________， $y=$__________．

【答案】8，11．

【解析】将 $z=81$ 代入，得 $\begin{cases}x+y=19\\5x+3y=73\end{cases}$ ，解得 $\begin{cases}x=8\\y=11\end{cases}$ ．

12．若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\ge 0\\2x+y\le 6\\x+y\ge 2\end{cases}$ ，则 $z=x+3y$ 的最小值是__________，最大值是__________．

【答案】 -2 ， 8 ．

【解析】当 $-x+2=-2x+6$ 时，解得 $x=4,y=-2$ ，此时 z 最小值为 $4-3\times 2=-2$ ；

当 $x=-2x+6$ 时，解得 $x=2,y=2$ ，此时 z 最大值为 $2+3\times 2=8$ ．

13．在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c ，若 $a=\sqrt{7},b=2,A=60°$ ，则 $\sin B=$__________， $c=$__________．

【答案】 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ，3

【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\frac{\sqrt{7}}{\sin 60°}=\frac{2}{\sin B}$ ，得 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$ ；

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4+c^2-7}{4c}=\frac{1}{2}$ ，得 $c=3$ ．

14．二项式 $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x})^8$ 的展开式的常数项是__________．

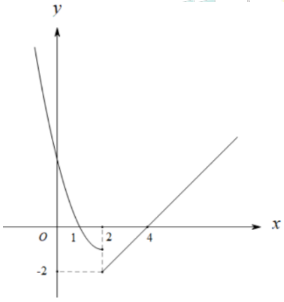
【答案】7．

【解析】$(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x})^8$ 的通项公式为 $C_8^r(\frac{1}{2})^r x^{\frac{8-4r}{3}}$ ，令 $8-4r=0$ ，即 $r=2$ ，$(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x})^8$ 的展开式的常数项为 $C_8^2(\frac{1}{2})^2=7$ ．

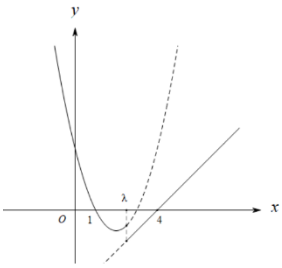
15．已知 $\lambda\in R$ ，函数 $f(x)=\begin{cases}x-4, & x\ge\lambda\\ x^2-4x+3, & x<\lambda\end{cases}$ ，当 $\lambda=2$ 时，不等式 $f(x)<0$ 的解集是__________，若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则 λ 的取值范围是__________．

【答案】$x\in(1,4)$ ；$\lambda\in[1,3]\quad(4,+\infty)$ ．

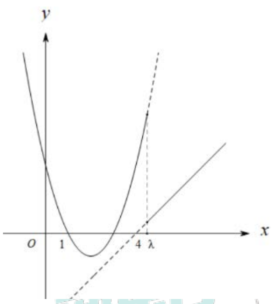
【解析】当 $\lambda=2$ 时，分段函数的图象如下，得出不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $x\in(1,4)$



当 $\lambda\in[1,3]$ 时，如下图所示，有 2 个零点



当 $\lambda\in(4,+\infty)$ 时，如下图所示，有 2 个零点



16．从 $1,3,5,7,9$ 中任选 2 个数字，从 $0,2,4,6$ 中任选 2 个数字，一共可以组成__________个没有重复数字的四位数．（用数字作答）

【答案】1260

【解析】分两类讨论，第一类：不含 0 的，按照分步乘法计数原理：$C_5^2C_3^2A_4^4=10\times3\times24=720$ ；

第二类：包含 0 的，按照分步乘法计数原理：$C_5^2C_3^1A_3^1A_3^3=10\times3\times3\times6=540$ ．

最后根据分类加法计数原理，一共有 1260 个没有重复数字的四位数

17．已知点 $P(0,1)$，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=m(m>1)$ 上两点 A,B 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则当 $m=$________时，点 B 横坐标的绝对值最大．

【答案】5

【解析】由题意得 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，设 $B(x_0,y_0)$，则 $A(-2x_0,3-2y_0)$，即满足方程组 $\begin{cases}\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=m\\ \frac{(-2x_0)^2}{4}+(3-2y_0)^2=m\end{cases}$，

消元得 $4y_0^2-(3-2y_0)^2=3m$，解得：$y_0=\frac{3+m}{4}$，

代入原式得：$\frac{x_0^2}{4}+(\frac{3+m}{4})^2=m$，化简：$\frac{x_0^2}{4}=\frac{-(m-5)^2+16}{16}$

即当 $m=5$ 时，点 B 横坐标的绝对值最大．

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18．已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 $P(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$．

（1）求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值；

（2）若角 β 满足 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$ 的值．

【答案】（1）$\frac{4}{5}$；（2）$-\frac{56}{65}$ 或 $\frac{16}{65}$

【解析】

（1）由角 α 的终边过点 $P(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ 可知 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=-(-\frac{4}{5})=\frac{4}{5}$；

（2）由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$ 可得 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$，$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$

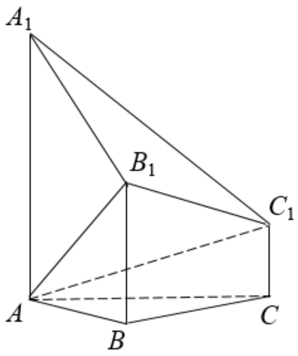
当 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$ 时，$\cos\beta=\frac{12}{13}\times(-\frac{3}{5})+\frac{5}{13}\times(-\frac{4}{5})=-\frac{56}{65}$；

当 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}$ 时，$\cos\beta=(-\frac{12}{13})\times(-\frac{3}{5})+\frac{5}{13}\times(-\frac{4}{5})=\frac{16}{65}$；

19．如图，已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$，A_1A,B_1B,C_1C 均垂直于平面 ABC，$\angle ABC=120^\circ$，$A_1A=4$，$C_1C=1$，$AB=BC=B_1B=2$．

（1）证明：$AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成角的正弦值．



（第 19 题图）

【答案】（1）见解析；（2）$\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

【解析】

（1）由条件容易得到：在 ABC中，$AB=BC=2,\ \angle ABC=120^\circ$ ，得到 $AC=2\sqrt{3}$ ，

直角 ACC_1中，$AC_1=\sqrt{13}$ ，直角 ABB_1中，$AB_1=2\sqrt{2}$ ，

直角梯形 ABB_1A_1 中，$A_1B_1=2\sqrt{2}$ ，直角梯形 BCC_1B_1 中，$B_1C_1=\sqrt{5}$ ，

在 $\triangle AA_1B_1$ 中，满足 $A_1B_1^{\ 2}+AB_1^{\ 2}=AA_1^{\ 2}$ ，$AB_1\perp A_1B_1$ ，

在 AB_1C_1中，满足 $B_1C_1^{\ 2}+AB_1^{\ 2}=AC_1^{\ 2}$ ，$AB_1\perp B_1C_1$ ，

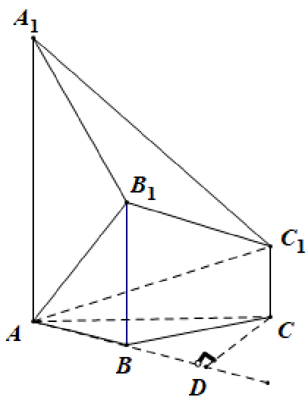
$A_1B_1 \quad B_1C_1=B_1$ ，$AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$

（2）方法一：如图所示，过 C 做 AB 延长线的垂线 CD ，垂足为 D ，

由 $CC_1 \parallel BB_1$ ，得 $CC_1 \parallel$ 面 ABB_1 ，

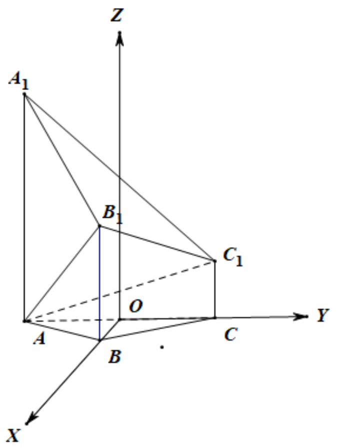
所以点 C_1 到面 ABB_1 的距离与点 C 到面 ABB_1 的距离相等，$d=CD=\sqrt{3}$ ，

$$\therefore \sin\theta=\frac{d}{AC_1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{13}.$$



方法二：建系

以 AC 中点 O 为原点，建立如图直角坐标系，



$A\left(0,-\sqrt{3},0\right),C_1\left(0,\sqrt{3},1\right),B(1,0,0),B_1(1,0,2)$

$\overrightarrow{AC_1}=\left(0,2\sqrt{3},1\right),\overrightarrow{AB}=\left(1,\sqrt{3},0\right),\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$

设平面 ABB_1 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{BB_1}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$$

计算得 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，

$$\therefore\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{13},$$

即直线 AC_1 与平面 ABB_1 做成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$．

20．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>1$，且 $a_3+a_4+a_5=28$, a_4+2 是 a_3,a_5 的等差中项．数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，数列 $\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$ 的前 n 项和为 $2n^2+n$．

（1）求 q 的值；

（2）求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式．

【答案】（1）$q=2$，（2）$b_n=15-\frac{4n+3}{2^{n-2}}(n\in N^*)$．

【解析】（1）由题意知：$a_3+a_4+a_5=28\cdots$Ⅱ，$a_3+a_5=2(a_4+2)\cdots$♋

联立Ⅱ♋得 $a_4=8$，带入Ⅱ得 $q=2$ $(q>1)$．

故 $a_n=2^{n-1}(n\in N^*)$，$q=2$．

（2）$b_1=1$，

$(b_{n+1}-b_n)a_n=(b_{n+1}-b_n)2^{n-1}$

当 $n=1$ 时，$(b_2-b_1)a_1=2+1$，$b_2=4$，

当 $n\geq2$ 时，$(b_{n+1}-b_n)2^{n-1}=(2n^2+n)-[2(n-1)^2+(n-1)]=4n-1$，

故 $b_{n+1}-b_n=\frac{4n-1}{2^{n-1}}$（$n\geq2$ 且 $n\in N^*$）

经检验 $n=1$ 时上式也成立，故

$b_{n+1}-b_n=\frac{4n-1}{2^{n-1}}$（$n\in N^*$）

故 $b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)+b_1$（$n\geq2$ 且 $n\in N^*$）

$=\frac{4n-5}{2^{n-2}}+\frac{4n-9}{2^{n-3}}+\cdots+\frac{7}{2}+\frac{3}{1}+1=\frac{-8n-6}{2^{n-1}}+14+1=15-\frac{4n+3}{2^{n-2}}$ （$n\geq 2$且$n\in N^*$）

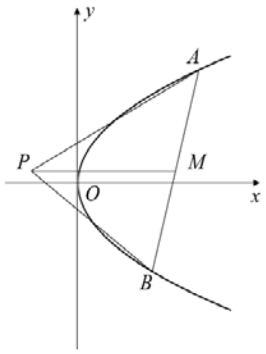
经检验$n=1$时上式也成立，

故$b_n=15-\frac{4n+3}{2^{n-2}}(n\in N^*)$．

21．如图，已知点P是y轴左侧（不含y轴）一点，抛物线$C:y^2=4x$上存在不同的两点A,B满足PA,PB的中点均在C上．

（1）设AB中点为M，证明：PM垂直于y轴；

（2）若P是半椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1(x<0)$上的动点，求ΔPAB面积的取值范围．



【答案】（1）见解析（2）$[6\sqrt{2},\frac{15\sqrt{10}}{4}]$

【解析】（1）设$P(x_0,y_0)\ \ (x_0<0)$，$A(y_1^2,2y_1),B(y_2^2,2y_2)$，则$AB$中点$M(\frac{y_1^2+y_2^2}{2},y_1+y_2)$；

因此要证$PM\perp y$轴，即证$y_1+y_2=y_0$；

因为PA的中点$C(\frac{x_0+y_1^2}{2},\frac{y_0+2y_1}{2})$在抛物线$y^2=4x$上，将其代入方程得：$(\frac{y_0+2y_1^2}{2})^2=4\cdot\frac{x_0+y_1^2}{2}$，

化简得：$4y_1^2-4y_0y_1-y_0^2+8x_0=0$ Ⅱ；

同理，由PB的中点$D(\frac{x_0+y_2^2}{2},\frac{y_0+2y_2}{2})$也在抛物线上，可得：$4y_2^2-4y_0y_2-y_0^2+8x_0=0$ ♋，

由Ⅱ♋可知，y_1,y_2为方程$4y^2-4y_0y-y_0^2+8x_0=0$的两个不等的实根，

由韦达定理可得：$y_1+y_2=y_0$，命题得证．

（2）由（1）可得：$y_1+y_2=y_0$，$y_1y_2=\frac{-y_0^2}{4}+2x_0$，

所以$x_M=\frac{y_1^2+y_2^2}{2}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{2}=\frac{y_0^2-2(\frac{-y_0^2}{4}+2x_0)}{2}=\frac{3}{4}y_0^2-2x_0$；

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{2y_0^2-8x_0}$；

因为$S_{\Delta PAB}=S_{\Delta PAM}+S_{\Delta PBM}=\frac{1}{2}|PM|\cdot|y_A-y_B|=\frac{1}{2}(x_M-x_0)|2y_1-2y_2|=(x_M-x_0)|y_1-y_2|$，

即有$S_{\Delta PAB}=(\frac{3}{4}y_0^2-3x_0)\sqrt{2y_0^2-8x_0}$ ♌；

由于点$P(x_0,y_0)$在半椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1(x<0)$上，所以$y_0^2=4-4x_0^2(-1\leq x_0<0)$，

代入♌式得：$S_{\triangle PAB}=6\sqrt{2}(-x_0^2-x_0+1)^{\frac{3}{2}}=6\sqrt{2}[-(x_0+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}]^{\frac{3}{2}}(-1\le x_0<0)$，

所以 $S_{\triangle PAB}\in[6\sqrt{2},\frac{15}{4}\sqrt{10}]$.

22．已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

（1）若 $f(x)$ 在 $x=x_1,\ x_2(x_1\ne x_2)$ 处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$；

（2）若 $a\le 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点．

【答案】（1）见解析（2）见解析

【解析】（1）$f(x)=\sqrt{x}-\ln x$ $\therefore f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{x}=x^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x^{-\frac{1}{2}})$.

令 $x^{-\frac{1}{2}}=t>0$；则 $f'(x)=g(t)=t(\frac{1}{2}-t)$；设 $t(\frac{1}{2}-t)=m$

考察方程 $t^2-\frac{1}{2}t+m=0$．当 $m<\frac{1}{16}$ 时有两相异解 t_1,t_2 对应 x_1,x_2 使得 $f'(x_1)=f'(x_2)$；

（其中，$t_1+t_2=\frac{1}{2},t_1\times t_2=m$）

而 $f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\ln(x_1x_2)=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}-\ln(\frac{1}{t_1^2}\cdot\frac{1}{t_2^2})=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}+2\ln(t_1t_2)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}+2\ln m$；设 $h(m)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}+2\ln m$，则 $h'(m)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{2}{m}=\frac{2m-\frac{1}{2}}{m^2}$；

$\boldsymbol{m<\frac{1}{16}\therefore h'(m)<0}$ 即 $h(m)>h(\frac{1}{16})=8-8\sqrt{2}$ （证毕）.

（2）方法一：

原命题等价于证明 $t-\ln t^2=kt^2+a(t>0)$ 有唯一解．

等价于证明 $k=g(t)=\frac{t-\ln t^2-a}{t^2}$ 单调且值域为 $(0,+\infty)$

$$\boldsymbol{g'(t)=\frac{(1-\frac{2}{t})t^2-2t(t-\ln t^2-a)}{t^4}=\frac{4\ln t+2a-2-t}{t^3}}$$

设 $h(t)=4\ln t-t+2a-2$，则 $h'(t)=\frac{4}{t}-1$，$\therefore h(t)\le h(4)=2(4\ln 2-3+a)\le 0$.

$\therefore g'(t)\le 0$ 即 $g(t)$ 单调减．

显然，$\boldsymbol{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{g(t)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{t-2\ln t-a}=0}$ 即当 t 趋向于 0 时 $g(t)$ 趋近于 $+\infty$，

又 $\boldsymbol{\frac{\ln t}{t}<1}$，$\boldsymbol{\therefore 0\le\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^2}<\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0}$，$\boldsymbol{\therefore\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^2}=0}$

而 $\boldsymbol{\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t-2\ln t-a}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}(\frac{1}{t}-\frac{2\ln t}{t^2}-\frac{a}{t^2})=(0-0-0)=0}$，$\therefore g(t)\in(0,+\infty)$

综上，$k=g(t)$ 单调递减且 $g(t)$ 的值域为 $(0,+\infty)$ (证毕)．

方法二：

令 $G(x)=\sqrt{x}-\ln x-kx-a$，则 $G'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}-k=-\frac{2kx-\sqrt{x}+2}{2x}$，

（1）当 $\Delta=1-16k\le 0$时，$k\ge\frac{1}{16}$，$G'(x)<0$，$G(x)$在$(0,+\infty)$上单调，

所以对 $\forall x\in R$，$G(x)$恒有唯一零点．

（2）当 $\Delta=1-16k>0$时，$0<k<\frac{1}{16}$，设$G'(x)=0$的两个根为x_1,x_2，则$0<x_1<x_2$，

所以$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\frac{1}{2k}$，$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}=\frac{1}{k}$，且$2kx_1-\sqrt{x_1}+2=0$，$2kx_2-\sqrt{x_2}+2=0$．

函数$G(x)$在$x=x_1$处取得极小值，在$x=x_1$处取得极小值．

$G(x_1)=\sqrt{x_1}-\ln x_1-kx_1-a=\sqrt{x_1}-\ln x_1-\frac{1}{2}\sqrt{x_1}+1-a=\frac{1}{2}\sqrt{x_1}-\ln x_1+1-a$，

$G'(x_1)=\frac{1}{4\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{\sqrt{x_1}-4}{4x_1}$，所以$G(x_1)$在$x=2$处取得最小值$3-4\ln x-a>0$．

$G(x)$恒有唯一零点．

综上，证毕．

新东方 XDF.CN 优能中学教育 U-CAN SECONDARY SCHOOL EDUCATION