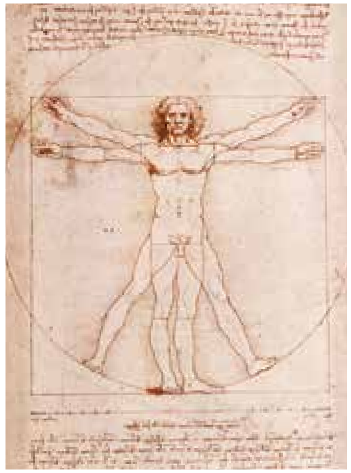
028　為甚麼說生活中黃金分割無處不在？

黃金分割對數學、科技和藝術領域均有深遠影響，且人體比例亦與黃金分割有密切關係。



達・文西的名作《維特魯威人》

要把一條線段用最賞心悅目、最有意義的方式分開，你會把這個分割點選在這條線段的甚麼位置呢？

在這條線段上的無數個點中，有一個非常特殊的點，把這條線段分成兩個部分，其中較長部分與較短部分之比正好等於整條線段與較長部分之比。這個比值就是**黃金比**，也稱為**黃金分割**，常用 φ 來表示，其數值為

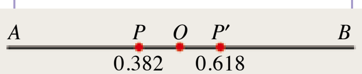
$$\varphi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.618\ 033\ 988\ 7\cdots$$

人們對黃金分割的認識有悠久的歷史。早在公元前 6 世紀的古希臘，畢達哥拉斯學派就研究過正五邊形和正十邊形，正五角星還是這個學派的祕密標誌。這些圖形與黃金分割的關係極其密切。公元前 3 世紀問世的堪稱「數學第一書」的《幾何原本》，也是第一部流傳至今的首次提到黃金分割的著作。

微博士

黃金點

五角星中充滿了黃金點！黃金點有一個重要性質就是：線段上的黃金點的中心對稱點也是黃金點。



如果 P 是線段 AB 上的黃金點，O 是 AB 的中點，則 P 的中心對稱點 P' 也是 AB 上的黃金點。所以取定線段上的黃金點必成對出現，且互為中心對稱點。更進一步，P 也是 AP' 上的黃金點；P' 也是 PB 上的黃金點。

在很長一段歷史時期，黃金分割的觀點一直統治着西方建築美學。古希臘的巴特農神廟，從外形看，寬與高之比就接近黃金比。

有經驗的報幕員在報幕時，往往不會站在舞台正中，而是站在舞台的黃金分割點上，給觀眾留下更為協調的形象。拍照時，把人放在正中或太靠邊，都不是最佳的選擇，最佳的位置正是靠近黃金分割點的位置。就連莊嚴美麗的五星紅旗上的五角星也蘊含着黃金分割：五角星的每條邊恰好被與之相交的另外兩邊所黃金分割。

令人驚訝的是，人體自身也和黃金分割密切相關。人體畫家和雕塑家認為，人的身高與其肚臍高度之比接近於黃金比，肚臍高度與膝蓋高度之比也接近於黃金比。這大概就是標準身材的一個判定標準吧！不信，大家可以自己測量一下。

有趣的是，首次給這種比例關係冠以「黃金」美稱的，正是意大利著名科學家、藝術家和工程師達・文西。在他的名作《維特魯威人》中，各種人體比例的依據也與黃金分割息息相關。這幅畫的名稱是根據古羅馬傑出的建築家維特魯威的名字取的，這位建築家在他的著作《建築十書》中曾盛讚人體比例和黃金分割。

多年來，圍繞黃金分割已經積累了非常多的文獻資料，很多人認為它是理解所有形態學（包括人類解剖學）、藝術、建築和音樂等的基礎。（李大潛）

029　甚麼樣的矩形看上去最美？

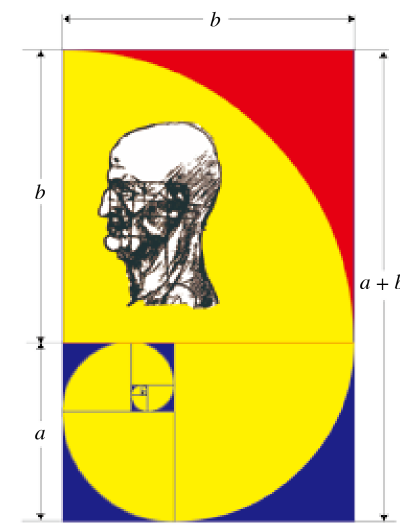
長寬之比等於黃金比的矩形看上去最美。

巴特農神廟寬與高之比接近黃金比

普普通通的矩形竟然會有美醜之分？相信許多人看到這個問題，都會產生這樣的疑惑。事實上，有位心理學家就曾做過一項試驗，他精心設計了很多各種尺寸的矩形，請人從中挑選出自己認為最美的矩形。結果有四個矩形得票最多，它們看上去邊長協調而勻稱，能給人一種舒美的感受。經測量，它們的兩邊邊長比分別為

$$8:5，13:8，21:13，34:21。$$

這組矩形的長邊與短邊之比均為斐波那契數列的相鄰兩項之比，十分接近**黃金比**。在數學上，就將長寬之比等於黃金比的矩形稱為**黃金矩形**。太方正或太扁平的矩形顯然在視覺上不會帶來太多美感，人們普遍認為長寬之比等於黃金比的矩形是所有矩形中最有美感的。



黃金矩形套

如果從黃金矩形中截去以寬的長度為邊的正方形，剩下的部分仍是一個黃金矩形。這一過程一直繼續下去，就得到一系列的越來越小的黃金矩形，稱為黃金矩形套。如果我們在截取正方形時在每個正方形內畫一個 $\frac{1}{4}$ 圓弧，就可以得到一條與對數螺線非常近似的曲線。

除了黃金矩形，幾何上還把腰長與底邊長之比為黃金比的等腰三角形稱為黃金三角形（也就是頂角為 36° 的等腰三角形）；長半軸 a 與短半軸 b 之比為黃金比的橢圓 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1)$ 稱為黃金橢圓；半焦距 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ 與實半軸 a 之比為黃金比的雙曲線 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1，a>b)$ 稱為黃金雙曲線。這一系列賞心悅目的圖形都有一個共通之處，那就是和黃金分割密切相關。（李大潛）

077 如何測量一條曲線的長度？

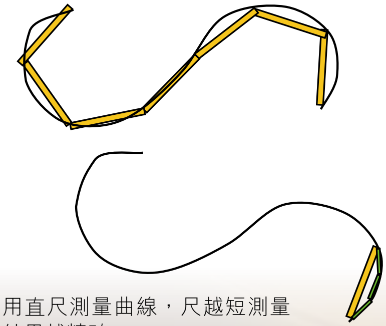
可利用直尺量度曲線的長度。如果尺的長度為 s，量了 n 次，這段曲線的長度近似等於 ns。

如果要測量一條直線的長度，只需要一把尺就可以了。如果要測量一段**曲線**的長度，自然也需要用尺去量。如果知道尺的長度為 s，量了 n 次，那麼，這段曲線的長度近似等於 ns。但這只是一個近似值，而不是曲線真正的長度。因為在這個測量過程中，忽略了每一小段曲線的彎曲，因此，測出的長度顯然要比曲線的真實長度短一些。

© 古希臘數學家阿基米德

要提高測量的精度，可以用更短的尺來測量曲線，這樣原來被直線代替的那一段曲線上的一些彎曲部分也可以被測量出來，因此測得的長度更接近曲線的真實長度。而且用的尺越短，測出的長度越接近於曲線的真實長度。但不管怎樣，結果仍然是近似值。要求出曲線的真實長度，必須讓尺長無限縮短直至趨向於 0。這時，如果測出的長度越來越接近於某個確定的值，則這個值就是所測曲線的真實長度。

對於一些常見的曲線，比如圓周、二次曲線的一段等，都可以用上述方法計算其長度。這種測量或者計算曲線長度的想法，2000 多年前的阿基米德就在使用了。阿基米德為計算圓周率，用圓內接正多邊形的周長來計算圓周長，實際上就是以圓內接正多邊形的邊長作為尺長來測量圓周長，而測量的次數就是內接正多邊形的邊數。記內接正 n 邊形的邊長為 s_n，則其周長為 ns_n，這就是用長為 s_n 的尺測量圓周長所量出的長度。當內接正多邊形的邊數 n 越來越大，邊長 s_n 就越來越短，也就是尺長越來越短。因此，量出的圓周長越來越精確。如果讓 n 趨向於無窮大，或者尺長 s_n 趨向於 0，就可得到圓周的精確長度。


用直尺測量曲線，尺越短測量結果越精確

數學上，簡單地用直尺測量曲線長度並非總是行得通的，曲線長度的數學定義要複雜得多，我們無法在這裏嚴格介紹，但其總的思想是一樣的。（邱維元）

自然界中的曲線

的某些方面不太擅長。總之，只要你受過教育、懷有興趣，再加上一點才華，就總有那麼幾個數學領域能讓你發揮才幹，做出切實而有用的貢獻。那或許不是數學中最輝煌的部分，但這其實是個正常的現象；許多時候，平淡無奇的基本問題，到頭來卻比任何花哨的應用都更重要。再者，你在能夠染指某個領域的著名問題之前，還是先得從這個領域裏不怎麼輝煌的部分着手；只要看看當今任何一位偉大數學家的早期成就，就會明白這話的意思了。

對有的人來說，充沛的天才反倒會妨害他在數學上的長遠發展。比如，答案來得太過容易，他可能就不會耗費精力去辛勤工作，提「傻」問題，或是拓寬知識面，長此以往，能力就會停滯不前。另外，一旦習慣了簡單的成功，他可能就培養不出解決真正的難題所需的耐心了。才華固然重要，但如何培養、發展才華才是更重要的。（陶哲軒）

002 為甚麼各個國家中小學都開設數學課？

因為數學教育能使學生表達清晰、思維有條理，使學生具有實事求是的態度、鍥而不捨的精神。

作為基礎學科之一，數學是學校教育中最重要的課程，世界上許多國家都將數學設為中小學的必修課，也是各種升學考試的必考科目。除了數學知識的實用價值之外，數學教育更能使學生表達清晰、思維有條理，使學生具有實事求是的態度、鍥而不捨的精神，使學生學會用數學的思考方式去認識世界、解決問題。

具體來說，數學教育的主要價值在於：第一，掌握必要的數學知識，為進一步學習其他知識打基礎、做準備；第二，掌握必要的數學方法，用以解決自然與社會中普遍存在的數量化問題及邏輯推理問題；第三，進行嚴密的思維訓練，潛移默化地培養學生「數學方式的理性思維」，如抽象思維、邏輯思維等；第四，提供一種觀念，倡導一種精神，做到胸中有數，說理有據。（張文俊）

香港放大鏡

香港的數學教育

在香港現行的教育制度下，數學課在中小學均設為必修課。而在中四至中六的高中課程中，數學科分為必修部分及延伸部分。必修部分為所有學生必須修讀的課程。延伸部分為數學上表現較佳，或對數學較有興趣的學生而設。他們可從兩個單元：代數與微積分（單元一）、微積分與統計（單元二）中二擇其一。

066 古希臘數學家是如何計算地球周長的？

埃拉托色尼利用太陽光線的角度大小及兩個城之間的距離求地球的周長。

跨學科連線 物理

子午線

唐代的天文學家一行主持了世界上第一次地球子午線長度的實測，開元十二年（724 年），一行發起了一次大規模的天文大地測量工作。他的團隊在 13 個位點上測量北極星的地平高度（角度）和正午時分八尺表的日影長度。一行等人根據測量結果得出結論：南北距離大約 351 里 80 步，北極高度相差一度。這就是地球子午線一度的球面距離。

▶ 增潤知識

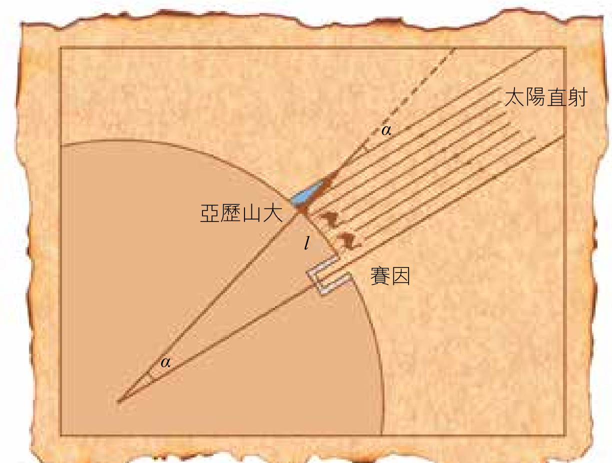
見《天文 II》

關於地球的形狀，古希臘學者有好幾種不同的觀點：有人認為是平的，呈圓盤狀或長方形；但也有很多人正確地認為是圓球體，因為他們判斷，月食時在月亮上出現的圓弧形陰影正是地球的投影。時任亞歷山大城圖書館館長的著名數學家埃拉托色尼首次嘗試用嚴格的數學方法計算地球的**周長**。

埃拉托色尼了解到，在每年的夏至日正午，太陽光直射到賽因（現為埃及的阿斯旺）中一口深井的井底；與此同時，在距離賽因正北約 5000 希臘里的亞歷山大城，太陽光線與地面垂直線有 $\frac{2\pi}{50}$ 弧度（7.2°）的夾角。假設太陽光線是平行的，則根據計算**圓周**的公式，地球沿着通過南北兩極的子午線周長為

$$\text{周長} = 5000 \times 2\pi \div \frac{2\pi}{50} = 250\ 000 \text{ 希臘里。}$$

古希臘數學家計算地球周長示意圖



按雅典的長度單位，1 希臘里等於 185 米，由此得到地球的周長是 46 000 多公里。按埃及長度單位，1 希臘里等於 157.5 米，地球周長約 39 000 多公里。

現在人們已經精確地測量到，地球的子午線周長是 40 008 公里。由此可見，2000 多年前埃拉托色尼的計算還是比較準確的。

埃拉托色尼的另一個重要數學貢獻是發明了篩選素數的有效方法——後人稱之為「埃拉托色尼篩法」。

（善平）

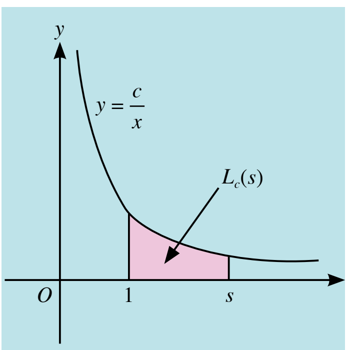
雅典衛城

科學偉人

約翰•納皮爾（John Napier）

約翰•納皮爾（1550 – 1617）是蘇格蘭數學家、物理學家兼天文學家。出身於蘇格蘭貴族家庭。他最為人所熟知的是發明了對數。納皮爾發表的一篇論文裏討論了一種計算乘法的簡便方法，並且介紹了後來被稱為「納皮爾算籌」或「納皮爾的骨頭」的計算器。另外他對小數點的推廣也有貢獻。

1590 年，納皮爾開始研究對數。1614 年和 1619 年，納皮爾分別出版了《奇妙的對數定理說明書》和《奇妙對數定律的構造》，引起了人們的廣泛興趣。



第一象限中的雙曲線 $y = \frac{c}{x}$

031 為甚麼以 e 為底的對數稱為自然對數？

當有了對數函數的底的概念後，歐拉發現被人們稱作自然對數底的數恰好就是常數 e。

在中學教科書中，除了常用對數 $\log x$ 外，還有**自然對數** $\ln x$，它表示以 e 為**底**的對數，這裏 $e = 2.718\ 281\ 828\cdots$為甚麼把以 e 為底的對數稱為自然對數呢？

在現代的教科書中，**對數函數**是按**指數函數**的**反函數**來定義的，但歷史上並非如此。對數是蘇格蘭數學家約翰•納皮爾於 1614 年首先提出來的。納皮爾發明的對數可把兩個數的乘法運算轉換成加法運算，從而大大簡化了當時天文、航海等科學領域中遇到的繁雜計算問題。一個滿足下列性質的函數，稱為一個對數函數：

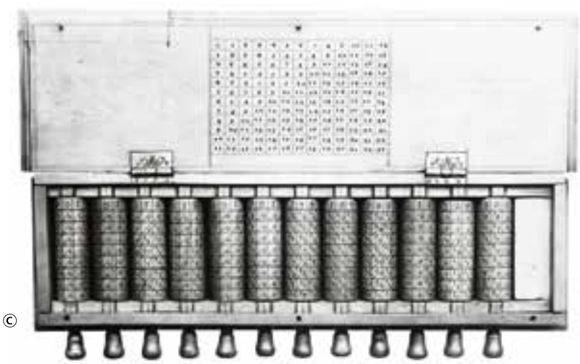
$$y = f(x)\text{，}(x > 0)\text{；}$$
$$f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)\text{，}f(1) = 0\text{。}$$

人們在尋求對數函數的過程中發現了下列一個事實：任意給定一個正的常數 c，並在第一象限中考慮**雙曲線** $y = \frac{c}{x}$，$(x > 0)$，如左圖所示。

設 s 為任意一個正數，並把圖中陰影部分的面積記為 $L_c(s)$。我們約定當 $s = 1$ 時，這個面積為 0；當 $s > 1$ 時，其面積為正；而當 $s < 1$ 時，其面積為負。在這種約定下，函數 $L_c(s)$ 就是一個對數函數。

現在，我們把 $c = 1$ 所對應的對數函數記為 $y = L(s)$。當時有人就把 $L(s)$ 稱作自然對數，這是因為它是對數函數 $L_c(s)$ 中最為簡單的對數函數，為了便於計算，還可用它去表示其他對數函數。實際上，早在納皮爾提出對數的第二年，有人就利用它編製出了對數表，並附錄在納皮爾的書中。但當時人們並不知道甚麼是常數 e，也沒有「對數函數的底」這個概念。

到了 18 世紀，歐拉把對數函數與指數函數聯繫起來，將對數函數看成指數函數的反函數，這時才有了對數函數的底這個概念。歐拉還發現，被人們稱作自然對數底的數恰好就是常數 e。（李忠）



1617 年納皮爾製作的計算裝置，由 1 個底座和幾根柱子組成，可把乘法運算轉換為加法運算，把除法運算轉換為減法運算

040 如何有效尋找質數？

可利用埃拉托色尼篩法。

埃拉托色尼

取一個正整數 x，如何才能找出不超過 x 的所有**質數**呢？有一種方法叫作**埃拉托色尼篩法**，又稱**愛氏篩**，其歷史可以上溯到古希臘時期。

埃拉托色尼篩法的步驟如下：

第一步，列出從 2 到 x 的所有整數，保留 2，劃去所有 2 的倍數。

第二步，在剩餘的數列中，緊跟着 2 的質數是 3；保留 3，劃去所有 3 的倍數。

第三步，在剩餘的數列中，緊跟着 3 的質數是 5；保留 5，劃去所有 5 的倍數。

如此下去，最後一步是，在倒數第二步的剩餘數列中，保留最接近且不超過 $\sqrt{x}$ 的那個質數，劃去這個質數的所有倍數。

這樣，剩下的數列就是不超過 x 的所有質數。以上做法是基於這樣的事實：若 a 不是質數，則 a 一定有不大於 $\sqrt{a}$ 的因子。

用埃拉托色尼篩法可以比較方便地編製質數表。要是碰到一個不很大的正整數 a（比如不超過 10 000），手頭剛好沒有質數表可查，如何快速地判定它是否是質數呢？事實上，只要拿不大於 $\sqrt{a}$ 的一切質數去試除 a 就可以了。（劉建亞）

微博士

自然中的篩法

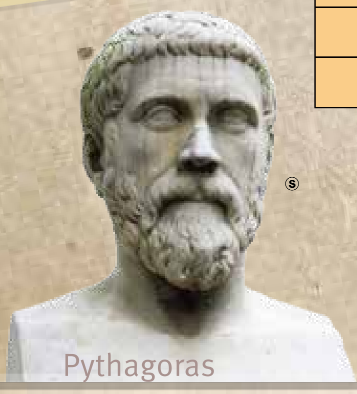
蟬是一種有趣的昆蟲。當它還是幼蟲的時候，在地下成長很多年，然後破土而出、交配、產卵。科學家發現，許多蟬在地下蟄伏的年數是質數，如 13 年、17 年，為甚麼呢？原來，這是為了生存、繁衍安全的需要，選擇質數使它避開很多天敵。比如，17 年周期蟬，可能會遇到 1 年周期和 17 年周期的天敵（包括同類）；而 18 年周期蟬就可能會遇到 1、2、3、6、9、18 年周期的天敵，顯然處境危險多了。這是巧妙的解釋！但是，難道蟬也懂數論嗎？當然不可能！唯一的解釋是，這是大自然進化的結果。可以想像，本來很可能有各種周期的蟬，經過億萬年的漫長歲月，那些合數周期的蟬由於遇到天敵過多，慢慢地就退出了歷史舞台。自然選擇無處不在，而在蟬的身上，自然選擇看上去就像是篩法——自然的篩法。

埃拉托色尼篩法

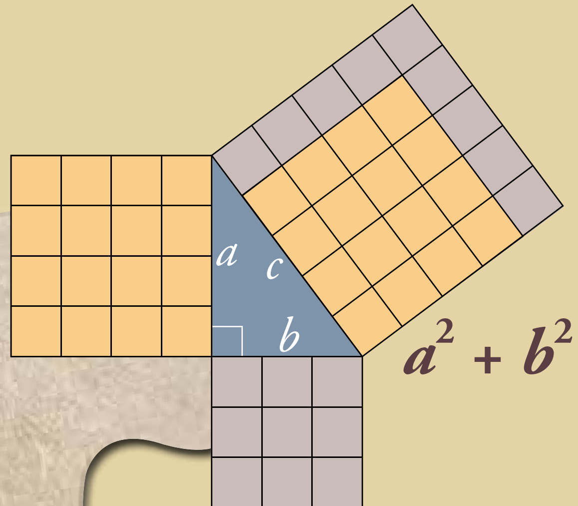
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59
61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85	87	89
91	93	95	97	99	101	103	105	107	109	111	113	115	117	119
121	123	125	127	129	131	133	135	137	139	141	143	145	147	149
151	153	155	157	159	161	163	165	167	169	171	173	175	177	179
181	183	185	187	189	191	193	195	197	199	201	203	205	207	209
211	213	215	217	219	221	223	225	227	229	231	233	235	237	239
241	243	245	247	249	251	253	255	257	259	261	263	265	267	269
271	273	275	277	279	281	283	285	287	289	291	293	295	297	299
301	303	305	307	309	311	313	315	317	319	321	323	325	327	329
331	333	335	337	339	341	343	345	347	349	351	353	355	357	359

ANCIENT GREEK MATHEMATICS

古希臘的數學智慧



Pythagoras

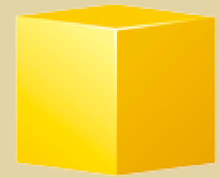


$$a^2 + b^2 = c^2$$

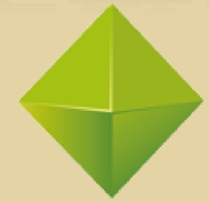
畢氏定理

畢達哥拉斯是古希臘最著名的數學家和哲學家之一。他是首位以幾何方法證明勾股定理（畢氏定理）的數學家。

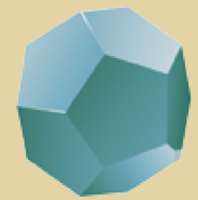
正四面體



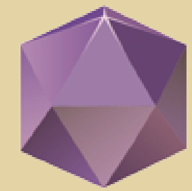
正六面體



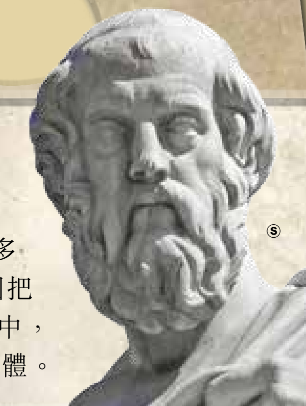
正八面體



正十二面體



正二十面體



Plato

正多面體

在古希臘，數學家已經發現以單一種正多邊形為面的正多面體只有 5 種。哲學家柏拉圖把這 5 種立體記錄在他的著作中，因此這些立體又稱為柏拉圖立體。

Euclid

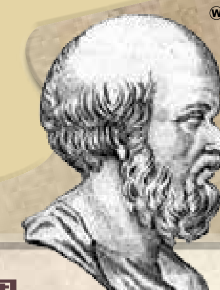

THE ELEMENTS OF GEOMETRIE of the most auncient Philosopher EVCLIDE of Megara.

Imprinted at London by Iohn Daye.

《幾何原本》書影

《幾何原本》

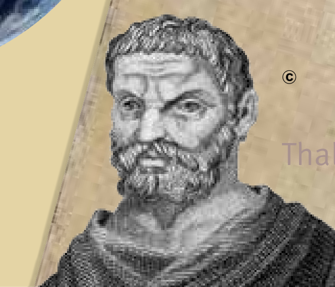
古希臘數學家歐幾里得被譽為「幾何學之父」，他把前人的數學知識總結和整理，有系統地結集成書，稱為《幾何原本》。書中包含了幾何及數論的一些公理、定理及幾何作圖的討論，是數學界的經典著作。



Eratosthenes

量度地球的圓周

古希臘數學家埃拉托色尼在約 2000 多年前利用兩座城市的距離及太陽光線的角度大小，估算出地球的圓周。他的另一個貢獻就是發明了愛氏篩——一個尋找質數的有效方法。



Thales

量度金字塔的高度

古希臘哲學家泰勒斯利用金字塔的影子長度及相似圖形的性質計算出金字塔的高度。