2019 北京市海淀区高三一模数学（理科）考试逐题解析

2019.4

第一部分（选择题，共 40 分）

一、选择题（本部分共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分.请在每小题列出的四个选项中，选出最符合题目要求的一项.）

1．已知集合 $P=\{x\,|\,0<x<4\}$，且 $M\subseteq P$，则 M 可以是

A. $\{1,2\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{-1,2\}$　　D. $\{0,5\}$

【答案】A

【解析】$\because M\subseteq P$，$\therefore M=\{1,2\}$，故选 A.

2．若角 α 的终边在第二象限，则下列三角函数值中大于零的是

A. $\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})$　　B. $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})$　　C. $\sin(\pi+\alpha)$　　D. $\cos(\pi+\alpha)$

【答案】D

【解析】$\because$ 角 α 的终边在第二象限，

$\therefore (\alpha+\frac{\pi}{2})$ 在第三象限，$\therefore \sin(\alpha+\frac{\pi}{2})<0$，$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})<0$；

$\because (\alpha+\pi)$ 在第四象限，$\therefore \sin(\alpha+\pi)<0$，$\cos(\alpha+\pi)>0$，故选 D.

3．已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $4a_3=3a_2$，则 $\{a_n\}$ 中一定为零的项是

A. a_6　　B. a_8　　C. a_{10}　　D. a_{12}

【答案】A

【解析】$\because \{a_n\}$ 是等差数列，且 $4a_3=3a_2$，

$\therefore 4(a_1+2d)=3(a_1+d)$，$a_1=-5d$，$a_6=a_1+5d=0$，故选 A.

4. 已知 $x>y$，则下列各式中一定成立的是

A. $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$

B. $x+\frac{1}{y}>2$

C. $(\frac{1}{2})^x>(\frac{1}{2})^y$

D. $2^x+2^{-y}>2$

【答案】D

【解析】

对于选项A: $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$错，当 $x>0,y<0$ 时不符，

对于选项B: $x+\frac{1}{y}>2$错，当 $x=0,y=-1$时不符，

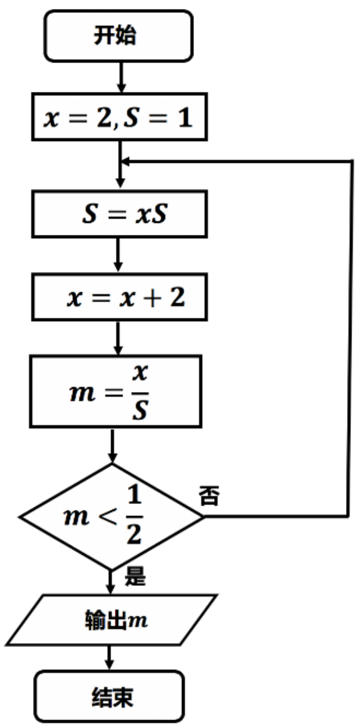
对于选项C: $(\frac{1}{2})^x>(\frac{1}{2})^y$错，$y=(\frac{1}{2})^x$为单调减函数，故$(\frac{1}{2})^x<(\frac{1}{2})^y$，

对于选项D: $2^x+2^{-y}>2$正确，$2^x+2^{-y}\ge 2\sqrt{2^{x-y}}$当且仅当$x=-y$时等号成立，

由 $x>y$ 得，$2^{x-y}>1$

$\therefore 2\sqrt{2^{x-y}}>2$正确，故选 D.

5. 执行如图所示的程序框图，输出的m值为



A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{5}{16}$

D. $\frac{1}{3}$

【答案】B

【解析】$S=1$， $x=2$

第一步， $S=2,x=4,m=2$，

第二步， $S=8,x=6,m=\frac{3}{4}$，

第三步， $S=48,x=8,m=\frac{1}{6}$， 输出， 故选 B.

6．已知复数 $z=a+i(a\in R)$，则下面结论正确的是

A．$\bar{z}=-a+i$

B．$|z|\geq 1$

C．z 一定不是纯虚数

D．在复平面上，z 对应的点可能在第三象限

【答案】B

【解析】

对于选项 A: $\bar{z}=a-i$，错误，

对于选项 B: $|z|=\sqrt{a^2+1}\geq 1$ 正确，

对于选项 C: 当 $a=0$ 时， z 为纯虚数，错误

对于选项 D: 虚部为1，故复平面上 z 对应的点必不在第三象限，

综上，故选 B.

7．椭圆C_1:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$与双曲线C_2:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率之积为1，则双曲线$C_2$的两条渐近线的倾斜角分别为

A．$\frac{\pi}{6}$，$-\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$　　D．$\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$

【答案】C

【解析】设椭圆离心率为e_1，双曲线离心率为e_2，渐近线的倾斜角为θ_1和θ_2，

在椭圆中：$e_1=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在双曲线中：$e_2=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore {e_2}^2=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{3}$，$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\theta_1$，$\theta_1=\frac{\pi}{6}$，$-\frac{b}{a}=-\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\theta_2$，$\theta_2=\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore$渐近线的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{5\pi}{6}$，故选 C.

8．某校实行选科走班制度，张毅同学的选择是物理、生物、政治这三科，且物理在A层班级，生物在B层班级．该校周一上午课程安排如下表所示，张毅选择三个科目的课各上一节，另外一节上自习，则他不同的选课方法有

第一节	第二节	第三节	第四节
地理B层2班	化学A层3班	地理A层1班	化学A层4班
生物A层1班	化学B层2班	生物B层2班	历史B层1班
物理A层1班	生物A层3班	物理A层2班	生物A层4班
物理B层2班	生物B层1班	物理B层1班	物理A层4班
政治1班	物理A层3班	政治2班	政治3班

A．8种　　B．10种　　C．12种　　D．14种

【答案】B

【解析】张毅不同的选课方法共有 10 种，具体如下：

（1）生物 B 层 1 班，政治 1 班，物理 A 层 2 班，

（2）生物 B 层 1 班，政治 1 班，物理 A 层 4 班，

（3）生物 B 层 1 班，政治 2 班，物理 A 层 1 班，

（4）生物 B 层 1 班，政治 2 班，物理 A 层 4 班，

（5）生物 B 层 1 班，政治 3 班，物理 A 层 1 班，

（6）生物 B 层 1 班，政治 3 班，物理 A 层 2 班，

（7）生物 B 层 2 班，政治 1 班，物理 A 层 3 班，

（8）生物 B 层 2 班，政治 1 班，物理 A 层 4 班，

（9）生物 B 层 2 班，政治 3 班，物理 A 层 1 班，

（10）生物 B 层 2 班，政治 3 班，物理 A 层 3 班，故选 B.

第二部分（非选择题，共 110 分）

二、填空题（共 6 小题，共 30 分）

9．已知 a，4，c 成等比数列，且 $a>0$，则 $\log_2 a+\log_2 c=$ ____________.

【答案】4

【解析】$\because a$，4，c 为等比数列，

$\therefore 4^2=16=ac$，且 $a>0$，$c>0$，

$\therefore \log_2 a+\log_2 c=\log_2 ac=\log_2 16=4$.

10．在$\triangle ABC$中，$a=4$，$b=5$，$\cos C=\dfrac{1}{8}$，则$c=$__________，$S_{\triangle ABC}=$__________.

【答案】6，$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

【解析】$\because c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，$\therefore c=6$，

$\because \cos C=\dfrac{1}{8}$，在$\triangle ABC$中，$C\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 5\times\dfrac{3\sqrt{7}}{8}=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

11．已知向量$\vec{a}=(1,-2)$，同时满足条件①$\vec{a}//\vec{b}$，②$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|$的一个向量$\vec{b}$的坐标为__________.

【答案】$(-1,2)$（答案不唯一）

【解析】设$\vec{b}=(x,y)$，$\because \vec{a}//\vec{b}$，故$y=-2x$，

$\because \vec{a}+\vec{b}=(x+1,y-2)$，故$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$，

$\because |\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|$，$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$\therefore \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}<\sqrt{5}$，$\therefore (x+1)^2+(y-2)^2<5$，

$\therefore (x+1)^2+(-2x-2)^2=5(x+1)^2<5$，即$(x+1)^2<1$，

$\therefore -2<x<0$，取$x=-1$，则$y=2$，$\therefore \vec{b}=(-1,2)$.（答案不唯一）

12．在极坐标系中，若圆$\rho=2a\cos\theta$关于直线$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+1=0$对称，则$a=$________.

【答案】-1

【解析】$\because \rho=2a\cos\theta$，

$\therefore \rho^2=2a\rho\cos\theta$，即$x^2+y^2=2ax$，$\therefore (x-a)^2+y^2=a^2$，

$\because \rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+1=0$，$\therefore$直线方程为$x+\sqrt{3}y+1=0$，

$\because$圆$(x-a)^2+y^2=a^2$关于直线$x+\sqrt{3}y+1=0$对称，

$\therefore$圆心$(a,0)$在直线上，即$a+1=0$，$\therefore a=-1$.

13．设关于 x,y 的不等式组 $\begin{cases} x\ge 0, \\ y\ge 0, \\ y\ge kx+1 \end{cases}$ 表示的平面区域为Ω，记区域Ω上的点与点 $A(0,-1)$ 距离的最小值为$d(k)$，则

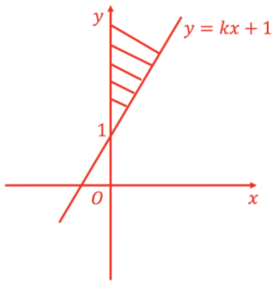
（Ⅰ）当$k=1$时，$d(1)=$__________；

（Ⅱ）若$d(k)\ge\sqrt{2}$，则k的取值范围是__________.

【答案】（Ⅰ）2；（Ⅱ）$k\in[-1,+\infty)$

【解析】（Ⅰ）当$k=1$时，

Ω内点$(0,1)$到A点距离最小，$d(1)=2$.

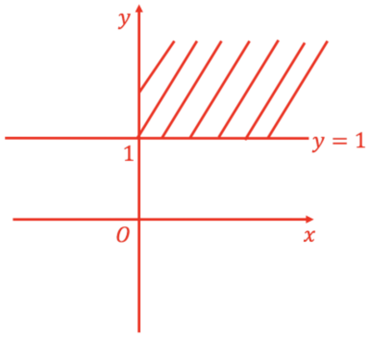


（Ⅱ）直线$y=kx+1$恒过$B(0,1)$，

当$k>0$时，不等式组所表示的区域如图所示，

此时，$d(k)=|AB|=2\ge\sqrt{2}$，符合题意；

当$k=0$时，易知$d(k)=|AB|=2\ge\sqrt{2}$，符合题意；



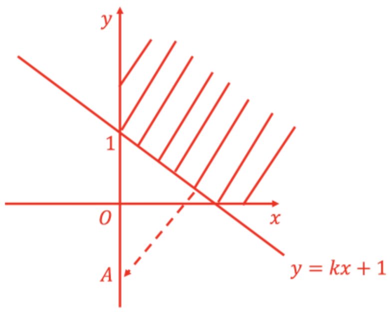
当$-1\le k<0$时，不等式组所表示的区域如图所示，

此时，$d(k)$为点A到直线$y=kx+1$的距离，

即$d(k)=\dfrac{|0+1+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，

令$d(k)\ge\sqrt{2}$，

解得$-1\le k<0$；



当$k<-1$时，直线$y=kx+1$与x轴的交点为$C(-\dfrac{1}{k},0)$，

$d(k)$为点A到点C的距离，$d(k)=|AC|=\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}$，

$\because k<-1$，$\therefore d(k)=\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+1}<\sqrt{2}$，不符合题意；

综上可得：$k\in[-1,+\infty)$.

14．已知函数 $f(x)=x$，$g(x)=ax^2-x$，其中 $a>0$．若 $\forall x_1\in[1,2]$，$\exists x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)f(x_2)=g(x_1)g(x_2)$ 成立，则 $a=$__________.

【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】由题意可知 $x_1x_2=(ax_1^2-x_1)(ax_2^2-x_2)$，$\therefore ax_1x_2(ax_1x_2-x_1-x_2)=0$，$\therefore ax_1x_2=x_1+x_2$，

$\therefore a=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}$，$\therefore a-\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1}$，$\frac{1}{x_1}\in[\frac{1}{2},1]=M$，$\therefore a-\frac{1}{x_2}\in[a-1,a-\frac{1}{2}]=N$，

$\because \forall x_1\in[1,2]$，$\exists x_2\in[1,2]$ 使原式成立，即 $M\subseteq N$，

$\therefore \begin{cases}\frac{1}{2}\ge a-1\\ 1\le a-\frac{1}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{3}{2}\le a\le\frac{3}{2}$，$\therefore a=\frac{3}{2}$.

三、解答题（共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x+a$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

（I）求 a 的值；

（II）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

【解析】

（I）$f(x)=2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x)\cos x+a=(2\cos^2 x+2\sin x\cos x)+a$

$=\cos 2x+1+\sin 2x+a=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1+a$

$\because f(x)_{\max}=\sqrt{2}+1+a=\sqrt{2}$, $\therefore a=-1$.

（II）正弦函数单调递增区间 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $k\pi-\frac{3}{8}\pi\le x\le k\pi+\frac{1}{8}\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\therefore f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi-\frac{3}{8}\pi,k\pi+\frac{1}{8}\pi](k\in\mathbf{Z})$.

16.（本小题满分 13 分）

据《人民网》报道，“美国国家航空航天局（NASA）发文称，相比 20 年前世界变得更绿色了，卫星资料显示中国和印度的行动主导了地球变绿.”据统计，中国新增绿化面积的42%来自于植树造林.下表是中国十个地区在2017年植树造林的相关数据.（造林总面积为人工造林、飞播造林、新封山育林、退化林修复、人工更新的面积之和）单位：公顷.

地区	造林总面积	造林方式				
		人工造林	飞播造林	新封山育林	退化林修复	人工更新
内蒙	618484	311052	74094	136006	90382	6950
河北	583361	345625	33333	135107	65653	3643
河南	149002	97647	13429	22417	15376	133
重庆	226333	100600		62400	63333	
陕西	297642	184108	33602	63865	16067	
甘肃	325580	260144		57438	7998	
新疆	263903	118105	6264	126647	10796	2091
青海	178414	16051		159734	2629	
宁夏	91531	58960		22938	8298	1335
北京	19064	10012		4000	3999	1053

（I）请根据上述数据分别写出在这十个地区中人工造林面积与造林总面积的比值最大和最小的地区；

（II）在这十个地区中，任选一个地区，求该地区人工造林面积占造林总面积的比值超过 50%的概率是多少？

（III）在这十个地区中，从新封山育林面积超过五万公顷的地区中，任选两个地区，记 X 为这两个地区中退化林修复面积超过六万公顷的地区的个数，求 X 的分布列及数学期望.

【解析】（I）由表格可知：

这十个地区中人工造林面积与造林总面积的比值最大的地区是：甘肃；

比值最小的地区是：青海.

（II）由表格可知：

人工造林面积占造林总面积的比值超过 50%的地区有：内蒙、河北、河南、陕西、甘肃、宁夏、北京，这 7 个地区. 所以，从这十个地区中任选一个地区的人工造林面积占造林总面积的比值超过 50%的概率为：$\frac{7}{10}=0.7$.

（III）由表格可知：新封山育林面积超过五万公顷的地区包括除河南、宁夏、北京以外的七个地区，其中退化林修复面积超过六万公顷的地区有：内蒙、河北、重庆共三个地区，据题 X 的可能取值为：$0,1,2$.

$P(X=0)=\frac{C_4^2}{C_7^2}=\frac{12}{42}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_7^2}=\frac{24}{42}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_7^2}=\frac{6}{42}$.

X 的分布列如下

X	0	1	2
P	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{6}{42}$

数学期望：$E(X)=0\times\frac{12}{42}+1\times\frac{24}{42}+2\times\frac{6}{42}=\frac{6}{7}$.

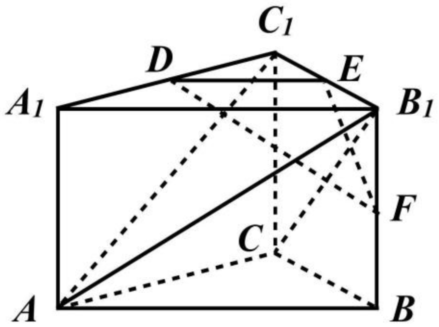
17.（本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=BC=CC_1=2$，点 D，E，F 分别为棱 A_1C_1，B_1C_1，BB_1 的中点.

（Ⅰ）求证：AC_1 // 平面 DEF；

（Ⅱ）求证：平面 $ACB_1\perp$ 平面 DEF；

（Ⅲ）在线段 AA_1 上是否存在一点 P，使得直线 DP 与平面 ACB_1 所成的角为 30°？如果存在，求出线段 AP 的长；如果不存在，说明理由.



【解析】

（Ⅰ）连接 BC_1，

$\because E$，F 分别为棱 B_1C_1，BB_1 的中点，$\therefore EF$ // BC_1，

又 $\because EF\subset$ 平面 DEF，$BC_1\not\subset$ 平面 DEF，$\therefore BC_1$ // 平面 DEF.

同理可证 A_1B_1 // 平面 DEF，

又 $\because$ 在直棱柱中 A_1B_1 // AB，$\therefore AB$ // 平面 DEF，

又 $\because$ $AB\cap BC_1=B$，$AB\subset$ 平面 ABC_1，$BC_1\subset$ 平面 ABC_1，

$\therefore$ 平面 ABC_1 // 平面 DEF，又 $\because AC_1\subset$ 平面 ABC_1，

$\therefore AC_1$ // 平面 DEF.

（II）$\because$ 在平行四边形 BB_1C_1C 中，$BC=CC_1$，

$\therefore$ 平行四边形 BB_1C_1C 为菱形，$\therefore BC_1\perp B_1C$.

又由（I）知 EF // BC_1，$\therefore EF\perp B_1C$，

又 $\because CC_1\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，$\therefore AC\perp CC_1$，

又 $\because AC\perp BC$，$BC\cap CC_1=C$，$BC\subset$ 平面 BB_1C_1C，$CC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，

$\therefore AC\perp$ 平面 BB_1C_1C，

又 $EF\subset$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore EF\perp AC$，

又$\because AC\cap B_1C=C$，$AC\subset$平面ACB_1， $B_1C\subset$平面ACB_1，

$\therefore EF\perp$平面ACB_1，

又$\because EF\subset$平面DEF，$\therefore$平面$ACB_1\perp$平面DEF．

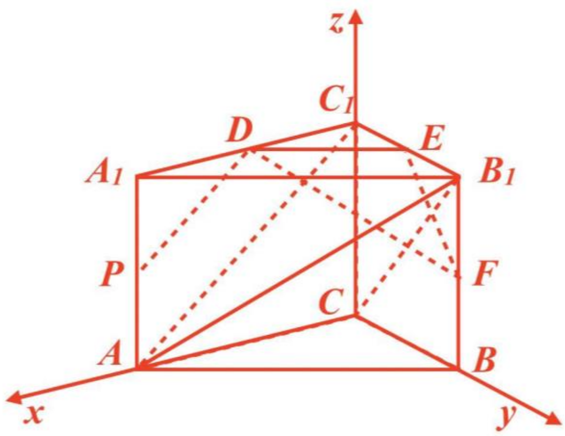
（III）在线段AA_1上存在一点P， 使直线DP与平面ACB_1成角$30°$，

由（II）知， $CC_1\perp$平面ABC， $AC\subset$平面ABC， $BC\subset$平面ABC，

$\therefore CC_1\perp AC$， $CC_1\perp BC$，

又$\because BC\perp AC$，

$\therefore$如图建立空间直角坐标系， C为原点，



易知：$C(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$B_1(0,2,2)$，$D(1,0,2)$，

设$P(2,0,t)(0\le t\le 2)$，

$\therefore \overrightarrow{DP}=(1,0,t-2)$， $\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$， $\overrightarrow{CB_1}=(0,2,2)$，

设平面ACB_1的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2y+2z=0\\ 2x=0\end{cases}$， $\therefore x=0,y=-z$，

设$y=1$， 则$\vec{n}=(0,1,-1)$，

且$|\vec{n}|=\sqrt{2}$， $|\overrightarrow{DP}|=\sqrt{1^2+(t-2)^2}$， $\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=2-t$，

$\therefore|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{DP}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{DP}|}=\dfrac{|2-t|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+(t-2)^2}}=\sin30°=\dfrac{1}{2}$，

化简得$t^2-4t+3=0$， $\therefore t=1$或$t=3$，

又$\because 0\le t\le 2$， $\therefore t=1$符合题意，

$\therefore$假设成立，

$\therefore$线段AA_1上存在一点P， $AP=1$， 使得直线DP与平面ACB_1成角$30°$．

18.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x\ln(x+1)-ax^2$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a<0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值；

（Ⅲ）请直接写出函数 $f(x)$ 的零点个数.

【解析】

（Ⅰ）$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-2ax(x>-1)$,

$k=f'(0)=0$，$f(0)=0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$.

（Ⅱ）令 $g(x)=f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-2ax(x>-1)$，$g'(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}-2a$,

因为 $a<0$，$x>-1$. 所以 $g'(x)>0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增, 即 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 单调递增.

因为 $f'(0)=0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 存在唯一的零点 0.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 变化情况如下:

x	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小	↗

所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 存在极小值为 $f(0)=0$.

（Ⅲ）当 $a\le 0$ 或 $a=1$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点.

当 $0<a<1$ 或 $a>1$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点.

19.（本小题满分 13 分）

已知抛物线$G: y^2=2px$，其中$p>0$．点$M(2,0)$在G的焦点F的右侧，且M到G的准线的距离是M与F距离的3倍．经过点M的直线与抛物线G交于不同的A，B两点，直线OA与直线$x=-2$交于点P，经过点B且与直线OA垂直的直线l交x轴于点Q．

（Ⅰ）求抛物线的方程和F的坐标；

（Ⅱ）判断直线PQ与直线AB的位置关系，并说明理由．

【解析】

（Ⅰ）焦点$F(\frac{p}{2},0)$，准线$x=-\frac{p}{2}$，由题意得$2+\frac{p}{2}=3(2-\frac{p}{2})$，$\therefore p=2$，

$\therefore$抛物线的方程为$y^2=4x$，焦点F的坐标为$(1,0)$．

（Ⅱ）①当AB斜率不存在时，AB方程为$x=2$，

此时$A(2,2\sqrt{2})$，$B(2,-2\sqrt{2})$，$Q(x_Q,0)$，$P(-2,-2\sqrt{2})$，

$\therefore k_{OA}=\sqrt{2}$，$\therefore k_{BQ}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{x_Q-2}$，

$\therefore x_Q=-2$，即$Q(-2,0)$，$\therefore PQ // AB$．

②当AB斜率存在时，设AB方程为$y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases} y^2=4x \\ y=k(x-2) \end{cases}$得$k^2x^2-4(k^2+1)x+4k^2=0$，且$k\neq 0$，此时$\Delta>0$，

$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{4(k^2+1)}{k^2} \\ x_1x_2=4 \end{cases}$，$y_1y_2=-4\sqrt{x_1x_2}=-8$，

由$\overrightarrow{OA} // \overrightarrow{OP}$得$x_1y_p=-2y_1$，$\therefore y_p=\frac{-2y_1}{x_1}$，

由$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{OA}=0$得$\left(x_Q-x_2\right)x_1-y_1y_2=0$，$\therefore x_Q=\frac{-8}{x_1}+x_2$，

$$\therefore k_{PQ}=\frac{\frac{2y_1}{x_1}}{\frac{-8}{x_1}+x_2+2}=\frac{2y_1}{2x_1-4}=\frac{2k(x_1-2)}{2(x_1-2)}=k，\therefore PQ // AB．$$

20.（本小题满分 13 分）

首项为0的无穷数列$\{a_n\}$同时满足下面两个条件：

①$|a_{n+1}-a_n|=n$；②$a_n\le\frac{n-1}{2}$.

（Ⅰ）请直接写出a_4的所有可能值；

（Ⅱ）记$b_n=a_{2n}$，若$b_n<b_{n+1}$，对任意$n\in\mathbf{N}^*$成立，求$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅲ）对于给定的正整数k，求$a_1+a_2+\cdots+a_k$的最大值.

【解析】

（Ⅰ）a_4所有可能取值为-2，0，-6.

（Ⅱ）$a_{2n}=n-2$，

当$n=1$时，$a_2=-1$成立，当$n=2$时，$a_4=0$成立，

假设，当$n=k$时，$a_{2k}=k-2$成立$(k\ge2)$，则$|a_{2k+1}-a_{2k}|=2k$，$\therefore a_{2k+1}=-k-2$.

$\therefore|a_{2k+2}-a_{2k+1}|=2k+1$，且$a_{2k+2}>a_{2k}$，$\therefore a_{2k+1}=k-1$，即$a_{2(k+1)}=(k+1)-2$，

$\therefore n=k+1$时成立，$\therefore a_{2n}=n-2$，$\therefore b_n=n-2$.

（Ⅲ）$\because a_{2n-1}\le\frac{(2n-1)-1}{2}=n-1,(n\ge1)$，

$\therefore$当$a_{2n-1}=n-1$时，$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2n-1$，$\therefore a_{2n}=-n$，$\therefore a_{2n-1}+a_{2n}=-1$，

当$a_{2n-1}=t,A\in[0,n-1]$时，

$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2n-1$，$\therefore a_{2n}=t-2n+1$，$\therefore a_{2n-1}+a_{2n}=2[t-(n-1)]-1<-1$，

当$a_{2n-1}<\frac{1}{e},t<0$时，

a_{2n}最大为正数，由（Ⅱ）中已知，当为偶数项时均为正数，$a_{2n}=n-2$，

$\therefore|a_{2n}-a_{2n-1}|=2n-1$，$\therefore a_{2n-1}=-n-1$，

$\therefore a_{2n}+a_{2n-1}=-3<-1$，

$\therefore$只有当$a_{2n-1}=n-1$时，此时$a_{2n-1}+a_{2n}$最大值为-1，

$\therefore$当k为偶数时：$a_1+a_2+\cdots+a_k=-1\cdot\frac{k}{2}=-\frac{k}{2}$，

$\therefore$当k为奇数时：$a_1+a_2+\cdots+a_k=-1\cdot\frac{k-1}{2}+\frac{k-1}{2}=0$.