2005 年全国硕士研究生入学统一考试 水木艾迪考研辅导班突破百分训练营

数学(　　)试卷（结业模拟考试） 2005-1-8

身份证号 姓名 电话 成绩

数学一答题号及分值：

1、3、7、9、15，17	20、22、26、27、28、29、31、32	39 12 分	43 12 分	45 12 分	47 12 分	49 10 分	52 8 分	54 10 分	55 9 分	56 9 分	成绩

数学二答题号及分值：

2、6、10、12，14， 16	20、21、22、23、24、25（2），29、30	37 9 分	38 9 分	40 9 分	41 10 分	42 12 分	45 12 分	50 12 分	52 13 分	53 8 分	成绩

数学三答题号及分值：

4、6、11、15、18，19	20，21、22、23、25（1）、28、29、33	39 9 分	40 8 分	44 9 分	47 8 分	51 8 分	52 13 分	54 13 分	57 13 分	58 13 分	成绩

数学四答题号及分值：

5、8，13，15 16、18	20、21、22、23、24、29、34，35	36 8 分	44 8 分	46 9 分	47 9 分	48 8 分	52 13 分	53 13 分	59 13 分	60 13 分	成绩

特别说明：

（1）本套题目为争取 120-148 分成绩的能力测试，从整体上说，本套试题的难度与国家考试题目大体相当。

（2）作为练习，在模拟考试之后，可尽量多选做其他试卷的题目。

数学一可选做的题目为：36，37，38，39，40，41，42，43，44，45，46，47，48，49，50，51。

数学二可选做的题目为：36，37，38，40，41，42，43，44，45，46，47，48，50，51。

数学三可选做的题目为：36，37，38，39，40，41，42，43，44，45，46，47，48，51。

数学四可选做的题目为：36，37，38，40，41，42，43，44，45，46，47，48。

微积分：1-14，20-27，36-51。

线性代数：15—16，28—30，52—54

概率统计：17—19，31—35，55—60

微积分题目的分配如下

36（4），37（2），38（2），39（1，3），40（2，3），41（2），42（2），43（1），44（3，4），45（1，2），46（4），47（1，3，4），48（4），49（1），50（2），51（3），

2005 年全国硕士研究生入学统一考试　　水木艾迪考研辅导班突破百分训练营

数学(　　)试卷（结业模拟考试）2005-1-8

一 **填空题**（本题含 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分，把答案填在题中横线上）

1．　已知 $f(0)=0$，　$f'(0)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{f(x)}}=$______________.

答案：$e^{-\frac{2}{3}}$。

2．若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足等式 $f(x)=\dfrac{1+\int_0^x f(t)dt}{2x+1}$，则 $f(x)=$_____________。

答案：$\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$。（2，4）

3．由 $e^z=xy+yz+zx$ 确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 存在的充分条件是______________，曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1,0)$ 处的为切平面方程为____________________，$z=f(x,y)$ 在点 $(1,1,0)$ 处的梯度为______________________。

答案：$x+y\neq e^z$，切平面方程：$x+y+z=2$，$-(i+j)$。

解：$F(x,y,z)=e^z-(xy+yz+zx)$，隐函数 $z=f(x,y)$ 存在的充分条件是

$$F_z(x,y,z)=e^z-x-y\neq 0。$$

$F_x(1,1,0)=(-y-z)_{(1,1,0)}=-1$，

$F_y(1,1,0)=(-x-z)_{(1,1,0)}=-1$，$F_z(1,1,0)=(e^z-x-y)_{(1,1,0)}=-1$，

切平面为：$(x-1)+(y-1)+z=0$，即 $x+y+z=2$。

梯度 $gradz(1,1)=gradf(x,y)_{(1,1)}$

$$=(\frac{\partial z}{\partial x}i+\frac{\partial z}{\partial x}j)_{(1,1,0)}=(-\frac{F_x}{F_z}i-\frac{F_y}{F_z}j)_{(1,1,0)}=-(i+j)。$$

4．差分方程 $x_{k+2}-x_{k+1}-6x_k=2$ 的通解为______________________ 。

答案：$x_k=C_1 3^k+C_2(-2)^k-\dfrac{1}{3}$。

5．**极限** $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt=$_______________。答案：0。

［解］　利用函数的单调性与积分的保序性（或比较性质）

$$0 \le \left|\int_x^{2x} \frac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt\right| \le \int_x^{2x}\left|\frac{(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{1-e^{1/x}}\right|dt$$

$$=\int_x^{2x}\frac{(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{e^{1/x}-1}dt=\frac{x(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{e^{1/x}-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+e^{-x}}-1)\ln 2x}{e^{1/x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\frac{1}{2}e^{-x})\ln 2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln 2x}{2e^x}=0，$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt=0$。

6. 若 $z=\int_x^y e^{-(x^2+y^2+u^2)}du$，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right|_{(0,1)}=$________ 。

答案：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-(x^2+y^2)}\int_x^y e^{-u^2}du\right)$$

$$=-2xe^{-(x^2+y^2)}\int_x^y e^{-u^2}du-e^{-(x^2+y^2)}\cdot e^{-x^2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0，1)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-e^{-y^2}\right)=2ye^{-y^2}\Big|_1=2e^{-1}。$$

7. 微分方程 $y'''+4y''-21y'=0$ 的一般解为 ______________________。

答案：$\boldsymbol{y=C_1+C_2e^{-7x}+C_3e^{3x}}$。

8. 微分方程 $\begin{cases} y'-\frac{1}{x}y=x\sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$ 的解为____________ 。

答案：$y=-x\cos x$。

9. 设 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体。则 $\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z)dv=$________。

答案：$\frac{256\pi}{3}$。旋转成曲面方程为 $x^2+y^2=2z$，用柱坐标表示为 $r^2=2z$。

$$\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2+z)dv=\iiint\limits_\Omega(r^2+z)dv=\int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)rdr=\frac{256}{3}\pi$$

10. 函数 $f(x)=\frac{2x^2+e^{-x}}{x+1}$ 的斜渐近线为________。（2）

答案： $y=2x-2$。（2）

11．级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{8^{n+1}n\ln^3 n}$ 的收敛域为________________。答案：$|x|\le 2$。（3）

12．定积分 $\int_{-2}^{1}[x\sqrt{|x|}+\sqrt{8+2x-x^2}]dx=$__________________。

答案：$\frac{9}{4}\pi-\frac{2}{5}(4\sqrt{2}-1)$。

$\int_{-2}^{1}[x\sqrt{|x|}+\sqrt{9-(x-1)^2}]dx=-\int_{-2}^{0}x^{3/2}dx+\int_{0}^{1}x^{3/2}dx+\int_{-2}^{1}\sqrt{9-(x-1)^2}]dx$。

13．若 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 确定，则在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程是 ________，

$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/4}=$________________.

答案：$\frac{dy}{dx}=-\tan t$；切线方程 $x+y=\sqrt{2}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\pi/4}=\frac{1}{3}\sec^4 t\csc t\Big|_{t=\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{12}$。

14．设 A 是一个装满水的半球形水池，半径为 R，若用水泵将 A 中的水全部泵出，则克服重力所作的功为__________________。

解： 取半球的球心为坐标原点，竖直向下的直线为 x 轴，则克服重力所做的功为

$$W=\int_0^R\pi(R^2-x^2)xdx=\pi[\frac{1}{2}R^2x^2-\frac{1}{4}x^4]\Big|_0^R=\frac{1}{4}\pi R^4。$$

15．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&a&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$，其中 a 为常数，已知存在 3 阶非零矩阵 B 满足 $AB=0$，则矩阵 A 的秩 $r(A)=$________.

答案：2

16．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&-2\end{pmatrix}$，则矩阵 $(A^*-2E)(A+E)^{-1}=$____________.（其中 E 是 3 阶单位矩阵)

答案：$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

17. 设总体 X 服从正态分布 $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma^2)$, 且两个总体独立. 从总体 X 和 Y 分别抽取容量是 n_1 和 n_2 的简单随机样本, S_1^2 和 S_2^2 分别是它们的样本方差，则

$D(S_1^2+S_2^2)=$ ________ .【 $\dfrac{2(n_1+n_2-2)}{(n_1-1)(n_2-1)}\sigma^4$.】

18．设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点(0,1), (1,0), (-1,0)为顶点的三角形区域上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & 若 2Y\ge|X|,\\ -1, & 其他.\end{cases}$$

则其数学期望 $\mathrm{E}U=$______, 方差 $\mathrm{D}U=$________ .答案：2/3， 5/9 。

19. 设总体 X 服从正态分布 $\mathrm{N}(\mu_1,\sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $\mathrm{N}(\mu_2,\sigma^2)$, 且两个总体独立. 从总体 X 和 Y 分别抽取容量是 n_1 和 n_2 的简单随机样本, S_1^2 和 S_2^2 分别是它们的样本方差，则

$D(S_1^2+S_2^2)=$ ________ .答案：$\dfrac{2(n_1+n_2-2)}{(n_1-1)(n_2-1)}\sigma^4$.

二、**选择题**（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

20．若 $f(x)\in C^3[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'''(x)=0$，则

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$　　(B) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)\ne 0$

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\ne 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$　　(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)\ne 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)\ne 0$

解 答案；A。（泰勒公式）
当 $x>1$ 时，

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi),\quad \xi\in(x,x+1),$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\eta),\quad \eta\in(x-1,x),$$

两式相减，并令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，

两式相加，并令 $x\to+\infty$ 得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x)=0$。

[注] 事实上，任意两点 $x+a, x+b$ 的值在点 x 展开都能得到结论。

21． 设 $z=h(x,y)$ 由方程 $e^{xyz}=x+y+z$ 确定，则 $h(x,y)$ 在点 $P_0(0,1)$ 的两个偏导数

$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial x}$和$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial y}$[　]

（A）　分别等于0和-1。　　　（B）　分别等于　-1和0。
（C）　都等于0。　　　（D）　都等于-1。

答：D。

$e^{xyz}=(x+y+z)$，$e^0=1+z_0$，$z_0=0$，

对x取偏导数：$e^{xyz}(yz+xyz_x)=1+z_x$，

将$p(0,1,0)$代入计算得到：$\dfrac{\partial h(0,1)}{\partial x}=z_x(p)=-1$。

22．　设$f(x)$在$x=0$某邻域内有二阶导数，且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1-\cos x}=100$，则（　）。

(A)　$f''(0)\neq 0$，且点$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

(B)　$f''(0)=0$点$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

(C)　$f'(0)=0$，　$f(0)$是$f(x)$的极小值　(D)　$f'(0)=0$，　$f(0)$是$f(x)$的极大值

答案：B。

23．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)$, $f'_+(a)>0$，则下列命题错误的为（　）。

(A)　存在$\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)<0$　(B)　存在$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$

(C)　存在$x_1\in(a,b)$，使得$f(x_1)>f(b)$

(D)　存在唯一的$x_0\in(a,b)$，使得$f'(x_0)=0$

答案：D。

解　（单调性，或微分中值定理）

(A)正确（方法一　）反证法。若$f''(x)\geq 0$对任意的$x\in(a,b)$都成立，则$f'(x)$单增，故

$$f'(x)\geq f'_+(a)>0,$$

所以$f(x)$严格单增，这与$f(a)=f(b)$矛盾。从而存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$f''(\xi)<0。$$

（方法二）　因为$f'_+(a)>0$，所以存在$c\in(a,b)$，使得

$$f(c)>f(a)=f(b)。$$

根据微分中值定理，存在 $x_1 \in (a,c)$， $x_2 \in (c,b)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}>0,\ f'(x_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}<0,$$

从而存在 $\xi \in (x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f''(\xi)=\dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}<0$。(A)正确。

且存在 $x_0 \in (x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$。因此(B)正确。

(C)正确是因为 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=A>0$，由极限的保序性，存在 $\delta>0$，

对任意的 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 有 $f(x)-f(a)=A(x-a)>0$，即存在 $x_1\in(a,b)$，使得

$f(x_1)>f(a)=f(b)$。

注意：函数在一点导数的正负号不能得出 $(x_0-\delta,x_0)$ 或 $(x_0,x_0+\delta)$

内的增减性结论，只能得出函数值的局部比较性质！

24．设 $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx}$，则 $\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx}=$（　　　）。

(A) $\dfrac{\pi}{4+\pi}$　　(B) $\dfrac{\pi}{\pi-4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{4-\pi}$　　(D) $\dfrac{1}{4-\pi}$

[解] 答案：(C)

$I=\int_0^1 f(x)dx$，对已知等式两边取积分

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx+I\cdot\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=I,$$

由 $(1-\dfrac{\pi}{4})I=\dfrac{\pi}{4}$，解出 $I=\dfrac{\pi}{4-\pi}$。

25（1）．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-\cos\dfrac{1}{n}+\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n\lambda}{n}\right)\right]$（　　）。

（A） 条件收敛　　　　（B）绝对收敛

（C） 发散　　　　　　（D）收敛性与参数 λ 有关

答案：A。$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n\lambda}{n}\right)$ 条件收敛，且与参数 λ 无，由运算法则

得到该级数条件收敛。

25（2）极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\dfrac{(\sqrt{1+e^{-t}}-1)\ln t}{1-e^{1/t}}dt=$（　　）.

（A）-1　(B)0　(C)1　(D)　$-\dfrac{1}{2}$ ________________。答案：(B)。

参见第 5 题解答。

26．设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2 & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$，将 $f(x)$ 展成周期 $T=2$ 的余弦级数，则

$S(-\dfrac{5}{2})$ 为（　　）。答案：C 。

(A) 0　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $\dfrac{3}{8}$　　(D) 1

[解] 奇延拓 $F(x)=\begin{cases}2+2x, & -1<x<-\frac{1}{2}\\ -x^2, & -\frac{1}{2}\le x<0\\ -x^2, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$，（或用画图方法！）

注意周期 $T=2$，由迪里克雷定理计算如下：

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}[F(-\frac{1}{2}^-)+F(-\frac{1}{2}^+)]=\frac{1}{2}[1-\frac{1}{4}]=\frac{3}{8}$$

27．设 s 为 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则 $\displaystyle\oiint_s \frac{2dzdy}{x\cos^2 x}+\frac{dxdz}{\cos^2 y}-\frac{dydx}{z\cos^2 z}=$（　　）。

(A) $4\pi\tan 1$.　(B) $3\pi\tan 1$.　(C) $2\pi\tan 1$.　(D) $\pi\tan 1$.

答案：A。由对称性，可将原式转化为：原式 $=\displaystyle\oiint_S \frac{dxdy}{z\cos^2 z}+\frac{dxdy}{\cos^2 z}$

$$=\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}-\iint_D \frac{dxdy}{-\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$+\iint_D \frac{dxdy}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}-\iint_D \frac{dxdy}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$ （其中 D：$x^2+y^2\le 1$）

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}\overset{令\sqrt{1-\rho^2}=u}{=\!=\!=}4\pi\int_0^1\frac{du}{\cos^2 u}=4\pi\tan 1.$$

28．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

（1）A 与 B 相似且合同；（2）A 与 B 与 C 相似；（3）A 与 B 与 C 合同，则（　）

(A)　（1）（2）正确，（3）不正确；　(B)　（1）（3）正确（2）不正确

(C)　（1）（2）（3）都正确；　　　(D)　（1）正确（2）（3）不正确

答案：(B)

29．已知 4 元非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases}$$

的通解为 $x=(1,-1,0,1)^T+k(2,-1,1,0)^T$，其中 k 为任意常数.

记 $\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},a_{3i},a_{4i})^T$， $i=1,2,3,4,5$，则以下选项中错误的是（　）

（A） α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性表示　　（B） α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示

（C） α_3 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$ 线性表示　　（D） α_3 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表示

答案：（B）。

30．设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{pmatrix}$， $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

（1） A 与 B 相似且等价；（2） A 与 B 与 C 相似；（3） A 与 B 与 C 等价，则（　）

（A）（1）（2）正确，（3）不正确；　(B)（1）（3）正确（2）不正确

(C)（1）（2）（3）都正确；　(D)（1）正确（2）（3）不正确

答案：(B)。

31．设三个事件 A_i， $i=1,2,3$ 两两独立，令随机变量 X_i

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如果 } A_i \text{ 发生} \\ -1 & \text{反之}\end{cases},\quad i=1,2,3$$

则 一定有(　　　)

(A) A_i， $i=1,2,3$ 相互独立；　(B) A_1A_2 与 A_3 独立；

(C) X_1+X_2 与 X_3 相互独立；　(D) $3e^{X_1}$ 与 $-X_3$ 相互独立.　【 D 】

32．设总体 X 二阶矩存在, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是其简单样本，n>1, 样本均值为 $\overline{X}$.

则对 X 期望估计时, （　　　）.

(A) $(X_1+\overline{X})/2$ 不是无偏, 但它比 $\overline{X}$ 更有效.

(B) $(X_1+\overline{X})/2$ 比 $\overline{X}$ 更有效.

(C) 利用切贝雪夫定理，$(X_1+\overline{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是一致估计.

(D) $\overline{X}$ 比 $(X_1+\overline{X})/2$ 更有效.　【 D 】

33．设三个事件 A_i， $i=1,2,3$ 两两独立，令随机变量 X_i

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如果 } A_i \text{ 发生} \\ -1 & \text{反之}\end{cases},\quad i=1,2,3$$

则 一定有(　　　)

(A) A_i， $i=1,2,3$ 相互独立；　(B) A_1A_2 与 A_3 独立；

(C) X_1+X_2 与 X_3 相互独立；　(D) $3e^{X_1}$ 与 $-X_3$ 相互独立.　D .

34． 设三个事件 A_i， $i=1,2,3$ 两两独立，令随机变量 X_i

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{如果 } A_i \text{ 发生}\\ -1 & \text{反之}\end{cases},\quad i=1,2,3$$

则 一定有(　　　)

(A) A_i， $i=1,2,3$ 相互独立;　　　(B) A_1A_2 与 A_3 独立;

(C) X_1+X_2 与 X_3 相互独立;　　(D) $3X_1$ 与 $-X_3$ 相互独立

35． 设随机变量 X 的任一线性函数 $Y=aX+b,\ a\neq 0$. 则下面命题不成立的是（　　）.

(A) 如果 X 是连续型随机变量，则 Y 也是连续型随机变量;

(B) 如果 X 是泊松分布，则 Y 也是泊松分布;

(C) 如果 X 是均匀分布，则 Y 也是均匀分布;

(D) 如果 X 是正态分布，则 Y 也是正态分布;

答案：B

三，解答题，

36．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}(e^{\frac{\pi}{n}}-1)$。答案：$\dfrac{\pi}{e}$。

［解］运用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f(a+\dfrac{b-a}{n}k)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$。

首先有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}(e^{\frac{\pi}{n}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\sqrt[n]{n!}$，记 $y_n=\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$，则

$$\ln y_n=\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k-\ln n$$

$$=\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ln k-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n},$$

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k}{n}$ 等于广义积分 $\int_0^1\ln xdx$，

相应于将区间 $[0,1]$ 分割成 $[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}]\ (k=1,2,\cdots,n)$ 的积分和的极限，

且 $f(\xi_k)=\ln\dfrac{k}{n}$。注意到广义积分 $\int_0^1\ln xdx$ 为第二类广义积分，

并且收敛，于是

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}=\int_0^1\ln xdx$$

$$=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}(e^{\frac{\pi}{n}}-1)=\dfrac{\pi}{e}$。

37．设 $y(x)=\arctan\sqrt{x^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{x}$， 求 $y'(x)$。

解 由于 $[\arctan\sqrt{x^2-1}]'=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$，

$$[\arcsin\frac{1}{x}]'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}},$$

所以 $y'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x-|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}0, & x>1\\ \dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2-1}}, & x<-1\end{cases}$。

38．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导 $f(0)=1$，其反函数为 $g(x)$， 且满足与

$\int_x^{x+f(x)}g(t-x)dt=(2x+1)f(x)$，(1) 求 $\int_0^1 g(t)dt$；(2) 求 $\boldsymbol{f(x)}$.

[解] (1) $\int_0^1 g(x)dx=1$。

(2) 对变限积分令 $\boldsymbol{t-x=u,\quad dt=du}$，则有

$$\int_x^{x+f(x)}g(t-x)dt=\int_0^{f(x)}g(u)du=(2x+1)f(x),$$

关于 $\boldsymbol{x}$ 求导数，注意到 $g(f(x))=x$，得到

$$xf'(x)=(2x+1)f'(x)+2f(x),$$

$(x+1)f'(x)+2f(x)=0$，因 $x\neq -1$，则有

$f'(x)=-\dfrac{2f(x)}{1+x}$，积分得到 $f(x)=\dfrac{C}{(1+x)^2}$，

又 $f(0)=1$，解出 $C=1$，于是 $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

39．求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n[(n-2)!+n]}{(n-1)!}$ 的和。

[解] 易见 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n[(n-2)!+n]}{(n-1)!}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-1}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n-1+1)}{(n-1)!}$，

对 $x\in(-1,1]$，$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$，特别有

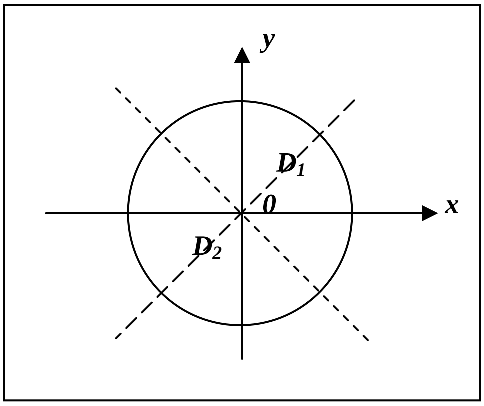
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2;$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1+1)}{(n-1)!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}$$

$$=e^{-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}=e^{-1}-(e^{-1}-1)=1$$

因此 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n[(n-2)!+n]}{(n-1)!}=1+\ln 2$。

40．计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy$，答案：（$\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$）。



解1：令 $D_1=\left\{(\rho,\varphi)\middle|-\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4},0\le\rho\le 1\right\}$；

$$D_2=\left\{(\rho,\varphi)\middle|\frac{3\pi}{4}\le\varphi\le\frac{7\pi}{4},0\le\rho\le 1\right\};$$

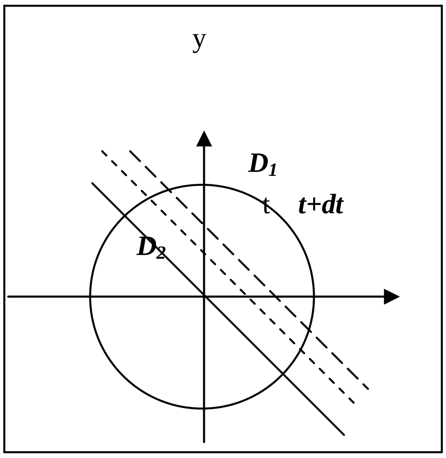
$$D_3=\left\{(\rho,\varphi)\middle|-\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4},0\le\rho\le 1\right\}$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D=D_1\cup D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-0$$

$$=4\iint\limits_{D_3}x\,dxdy=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^2d\rho=\frac{4}{3}\sqrt{2}.。$$



解2：$d\sigma=2\sqrt{1-\dfrac{t^2}{2}}\dfrac{dt}{\sqrt{2}}$· $t=x+y$，$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|x+y|dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy-\iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}t\cdot\left(2\sqrt{1-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}\right)=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}2t\sqrt{2-t^2}\,dx=-\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2-t^2}\,d\left(2-t^2\right)=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

41．一个容器的内表面侧面由曲线 $x=\sqrt{2+y^2}\ (0\le x\le 2)$ 绕 x 轴旋转而成，外表面由曲线 $x=\sqrt{2+y^2}$ 在点 $(2,\sqrt{2})$ 的切线位于点 $(2,\sqrt{2})$ 与 x 轴焦点之间的部分绕 x 轴旋转而成，此容器材质的密度为 μ，求此容器自身的质量 M 及其内表面的面积 S。

解 $y'(2)=\sqrt{2}$，切线为 $y=\sqrt{2}+\sqrt{2}(x-2)$，与 x 轴交点为 $(1,0)$

切线旋转后的体积为 $V_1=\dfrac{2\pi}{3}$，

曲线旋转成的体积为$V_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\pi y^2dx=\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-2)dx=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$

此容器自身的质量$M=\mu(V_1-V_2)=\mu\frac{3}{4}\pi\left(3-\sqrt{2}\right)$

内表面积为$S=\int_{\sqrt{2}}^{2}2\pi\sqrt{x^2-2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\right)^2}dx=2\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}\sqrt{2(x^2-1)}dx$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2}$$

$$=\left(2\sqrt{6}-2+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+2}\right)\pi$$

42．在半径为R的球内作内接正圆锥，试求其最大体积.

解　内接正圆锥的底面半径为$R\cos\alpha$，高为$R(1+\sin\alpha)$，其中$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。

内接正圆锥的体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cos^2\alpha R(1+\sin\alpha)=\frac{1}{3}\pi R^3\cos^2\alpha(1+\sin\alpha),$$

由　$\frac{dV}{d\alpha}=0$得　$\sin\alpha=\frac{1}{3}$。故当内接正圆锥的底面直径为$\frac{4\sqrt{2}}{3}R$，高为$\frac{4}{3}R$时，其体积最大，

最大体积为$\frac{32}{81}\pi R^3$。

43．求解二阶微分方程的定解问题$\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\dfrac{dy}{dx})^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$。

［解］令$u=\frac{dy}{dx}$，　$\frac{d^2y}{dx^2}=uu'$，原方程化为

$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u$，　　$u=0$，　$y=C$不复合初值条件，舍去。

$u\neq0$时，得到　$u'+u\tan y=\frac{1}{\cos y}$，

解为　$u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，　　　由　$y(-1)=\frac{\pi}{6},y'(-1)=\frac{1}{2}$，得$C_1=0$。

再解方程　$\frac{dy}{dx}=\sin y$得到　$\ln\left|\csc y-\cot y\right|=t+C_2$，由$y(-1)=\frac{\pi}{6}$得出

$C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$，定解问题之解为$\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}$。

44．若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有二阶连续导数，证明对任意的$a<c<b$,都存在$\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

解　（泰勒公式，介值定理，或罗尔定理）

法一　因为

$$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(x_1)(a-c)^2,$$
$$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}f''(x_2)(b-c)^2.$$

所以 $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$

$$=f(c)\left(\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right)$$
$$+f'(c)\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{b-a}f''(x_1)+\frac{b-c}{b-a}f''(x_2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

注　用到了二阶导函数 $f''(x)$ 的介值性质.

法二　记 $\dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\dfrac{1}{2}K$，

则 $f(a)(b-c)+f(b)(c-a)+f(c)(a-b)-\dfrac{1}{2}K(a-b)(b-c)(a-c)=0$.

令 $F(x)=f(a)(x-c)+f(x)(c-a)+f(c)(a-x)-\dfrac{1}{2}K(a-x)(x-c)(a-c)$，

则　$F(a)=F(b)=F(c)=0$，

所以,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F''(\xi)=0$,即 $f''(\xi)(c-a)+K(a-c)=0$.

故　$K=f''(\xi)$。

45．设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导。数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足条件：

$$a<x_n<x_0<y_n<b,\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=x_0。$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$。

解　（泰勒公式，无穷小的运算，或导数概念，极限与无穷小的关系）

由 $f(x)$ 在 x_0 处的可微性，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$ 于是

$$f(x_n)=f(x_0)+f'(x_0)(x_n-x_0)+o(x_n-x_0),$$

$$f(y_n)=f(x_0)+f'(x_0)(y_n-x_0)+o(y_n-x_0).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f'(x_0)+\dfrac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}-\dfrac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right].$

由因为 $a<x_n<x_0<y_n<b$, 所以得到：

$$0\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\le\left|\frac{o(y_n-x_0)}{y_n-x_0}\right|,\ 0\le\left|\frac{o(x_n-x_0)}{y_n-x_n}\right|\le\left|x\frac{o(x_n-x_0)}{x_n-x_0}\right|,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=f'(x_0)$。

46．计算广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$。

解 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{e^{-x}dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

$$=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{e^{-2x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{d(1-e^{-2x})}{2\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}[\sqrt{1-e^{-2A}}-\sqrt{1-e^{-2}}]$$

$$=1-\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}。$$

47．某公司的一个研发部门研发甲已两类高科技产品，甲类产品可有 x 个品种选择，已类产品可有 y 个品种选择，限于研发能力，甲已两类产品的品种需满足 $x+y\le 9$，若每季度研发甲已两类产品对该公司产生的效益函数为 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$（百万元），问：该研发部门每个季度应如何制定研发策略使其效益最大？该研发部门每个季度潜在的最大风险（亏损最大）是什么？

解 求解 $f(x,y)=4+2x+2y-x^2-y^2$

在闭区域 $D=\{(x,y)\in R^2\ |0\le x\le 9,0\le y\le 9-x\}$上的最大值最小值问题。

（1） $f'_x=2-2x$， $f'_y=2-2y$，驻点为 $p_0(1,1)$， $x_0=1$， $y_0=1$， $f(1,1)=6$。

（2）在边界 $y=0,0\le x\le 9$ 上， $f(x,y)=4+2x-x^2$，

令 $f'_x = 2-2x = 0$ 得 $x_0 = 1$， $f(1,0) = 5$。

（3）由对称性，在边界 $x=0, 0\le y\le 9$ 上 $f(0,1)=5$。

（4）在边界 $0\le x\le 9, y=9-x$ 上，

$f(x,y) = 4+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2 = -59+18x-2x^2$，

令 $f'(x,9-x) = 18-4x = 0$ 得到 $x_2 = \dfrac{9}{2} = y_2$， $f(\dfrac{9}{2},\dfrac{9}{2}) = -\dfrac{37}{2}$，

（5）考虑端点： $f(0,0)=4$， $f(0,9)=f(9,0)=-59$。

答案： $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 6$（百万元）， $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -59$（百万元）。

最佳策略是每季度甲已两类产品各研发一个品种，获利为 600 万元。最大的风险是单一产品研发，导致亏损 5900 万元。

48．求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (t-[t])dt}{x}$，其中 $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数。

解 考虑充分大的 x： $n<x<n+1$ 时有

$$\int_0^x (t-[t])dt = \int_0^1 (t-[t])dt + \int_1^2 (t-[t])dt + \cdots \int_{n-1}^n (t-[t])dt + \int_n^x (t-[t])dt$$

$$= \int_n^x (t-[t])dt + \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (t-[t])dt$$

令 $u = t-(k+1)$， $du = dt$，则有

$$\int_{k-1}^k (t-[t])dt = \int_0^1 [u-k+1-(k-1)]du = \int_0^1 udu = \frac{1}{2},$$

而 $\int_n^x (t-[t])dt = \int_0^{x-n} udu < \int_0^1 udu = \dfrac{1}{2}$，因此

$\dfrac{n}{2} < \int_0^x (t-[t])dt < \dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2}$，于是 $\dfrac{n}{2(n+1)} < \dfrac{\int_0^x (t-[t])dt}{x} < \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{2})$，

由夹逼定理得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (t-[t])dt}{x} = \dfrac{1}{2}$。

49．已知积分 $\int_L (x+xy\sin x)dx + \dfrac{f(x)}{x}dy$ 与路径无关， $f(x)$ 为可微函数, 且 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

(1) 求 $f(x)$；

(2) 对(1)中求得的 $f(x)$，求函数 $u=u(x,y)$ 使得 $du = (x+xy\sin x)dx + \dfrac{f(x)}{x}dy$；

(3) 对(1)中求得的 $f(x)$，求上述积分, 其中积分路径为从 $A(\pi,1)$ 到 $B(2\pi,0)$ 的任意路径。

解: (1)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x+xy\sin x)$$

$$x\sin x=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2},\quad f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=x^2\sin x$$

这是一阶线性微分方程. 通解为 $f(x)=x(\sin x-x\cos x+C)$, 由初始条件得

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $C=-1$, 于是 $f(x)=x(\sin x-x\cos x-1)$.

(2) 解法一: $(x+xy\sin x)dx+\frac{f(x)}{x}dy=(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=x+xy\sin x,\quad u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x\cos x+\sin x+\varphi'(y)=\sin x-x\cos x-1$$

$\varphi'(y)=-1,\quad \varphi(y)=-y+C$

$u=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$

其中 C 为任意常数.

$$u=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+xy\sin x)dx+(\sin x-x\cos x-1)dy+C$$

解法二: $=\int_0^x xdx+\int_0^y(\sin x-x\cos x-1)dy+C$

$=\frac{x^2}{2}-xy\cos x+y\sin x-y+C$

(3) 解法一: 积分与路径无关, 由 A 到 B 取平行与坐标轴的两条路径,

$$I=\int_1^0(-\pi\cos\pi-1)dy+\int_\pi^{2\pi}xdx=(1-\pi)+\frac{3\pi^2}{2}$$

解法二: $I=u(x,y)\big|_A^B=u(B)-u(A)=(1-\pi)+\frac{3\pi^2}{2}$。

或：设函数 $f(x)$ 有连续导数, $f(\pi)=1$, 若使曲线积分 $\int_L[\sin x-f(x)]\frac{y}{x}dx+f(x)dy$ 在右半平面 $\{(x,y)\mid x>0\}$ 与路线无关。试求 $f(x)$.答案: $f(x)=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$

50. 设有半径为 R，质量为 m 的圆柱形浮筒垂直放置水中，在重力和浮力的作用下处于平衡状态(浮筒密度小于 1, 水足够深)，重力加速度为 g，现把浮筒向下压至顶部与水平面重合突然放开，已知阻力与浮筒运动速度成正比，比例常数为 $2k>0$。

（1）列出浮筒运动满足的微分方程;

（2）k 满足什么条件时浮筒在水中作上下减幅振动，并求出此时方程的通解。

解：取平衡位置为 x 坐标轴原点, 则位移 x 与浮力/重力合力(恢复力)方向相反,

由牛顿定律列出方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\pi R^2gx-2k\frac{dx}{dt},$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\pi R^2gx=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4\pi R^2mg}}{2m}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-\pi R^2mg}}{m}$$

当 $k<\sqrt{\pi mg}\,R$ 时方程有衰减震荡解, 一般解为

$$x(t)=e^{-\frac{k}{m}t}(C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t})\ ,$$

其中　$\omega=\dfrac{\sqrt{\pi mgR^2-k^2}}{m}$，　或

$$x(t)=e^{-\frac{k}{m}t}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)\to 0\quad (t\to+\infty)$$

51．求定解问题 $\begin{cases} y''+4y'+4y=\cos 2x \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$ 的解。

解 齐次方程的通解： $\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{-2x}$。

设非齐次方程的一个特解： $y^*=a\cos 2x+b\sin 2x$。

求导并代入原方程　$8b\cos 2x-8a\sin 2x=\cos 2x$

比较系数　$b=\dfrac{1}{8}$，　$a=0$，　所以 $y^*=\dfrac{1}{8}\sin 2x$。

非齐次方程的通解　$Y=\bar{y}+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{8}\sin 2x$

把初始条件 $y(0)=0$ 代入 Y 中，得 $C_1=0$，

把初始条件 $y'(0)=0$ 代入 Y' 中，得 $C_2=-\dfrac{1}{4}$，

于是　$Y=-\dfrac{x}{4}e^{-2x}+\dfrac{1}{8}\sin 2x$。

52．当参数 p,t 为何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-6x_2+x_3+4x_4=-2 \\ 3x_1+px_2+2x_3+7x_4=-2 \\ x_1-6x_2-x_3-x_4=t \end{cases}$$

有解，无解？有解时，求通解.

数学： 1， 2， 3， 4

答案：$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & p & 2 & 7 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & -1 & t \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & p+6 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -4 & t \end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & p+8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+4 \end{pmatrix}$$

若 $t\neq -4$，方程组无解.

设 $t=4$，若 $p\neq -8$，则

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&5&2\\0&-2&-1&-2&-2\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2\\0&1&0&0&0\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

通解为：$x=(-2,0,2,0)^T+k(-1,0,-2,1)^T$，$k$ 为任意常数.

若 $t=4, p=-8$，则 $\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&5&2\\0&1&\frac{1}{2}&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

通解为：$x=(2,1,0,0)^T+k_1\left(-2,-\frac{1}{2},1,0\right)^T+k_2(-5,-1,0,1)^T$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

53．设 $A=\begin{pmatrix}1&2a&-4a\\0&9&-20\\0&4&-9\end{pmatrix}$，试讨论 a 取什么值时，矩阵 A 与对角矩阵相似，并求出可逆

矩阵 P 和对角矩阵 D，使得 $P^{-1}AP=D$.

数学 2， 4

答案：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2a&4a\\0&\lambda-9&20\\0&-4&\lambda+9\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

A 的特征值为：$1,1,-1$.

1 是 A 的 2 重特征值，只要有属于 1 的两个线性无关的特征向量，A 就可对角化.

$E-A=\begin{pmatrix}0&-2a&4a\\0&-8&20\\0&-4&10\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&a&-2a\\0&2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$，当且仅当 $a=0$ 时，$r(E-A)=1$，A 有属于 1 的两个线性无关的特征向量，A 可对角化.

$(E-A)x=0$，$E-A\rightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$

求得属于 1 的特征向量为：$\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(0,5,2)^T$.

$(-E-A)x=0$，$-E-A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-10&20\\0&-4&8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$，

求得属于 -1 的特征向量为：$\alpha_3=(0,2,1)^T$.

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&2\\0&2&1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=D$.

54. 设 3 元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$，$(a>0)$. 已知 1 是二次型矩阵 A 的一个特征值，(1) 求 a；(2) 求在条件 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 下，$f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值与最大值点.

数学 1， 3

答案：(1) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，$|E-A|=\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-2&-a\\0&-a&-2\end{vmatrix}=0$，解得 $a=2$.

(2) 显然，2 也是 A 的一个特征值，由特征值的和等于矩阵的迹，$1+2+\lambda=2+3+3$，解得 $\lambda=5$，

属于 1 的特征向量：$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}x=0$，$\alpha_1=(0,1,-1)^T$；

属于 2 的特征向量：$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}x=0$，$\alpha_2=(1,0,0)^T$；

属于 5 的特征向量：$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}x=0$，$\alpha_3=(0,1,1)^T$.

由于不同特征值的特征向量是正交的，再单位化：

$\gamma_1=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)^T$，$\gamma_2=(1,0,0)^T$，$\gamma_3=\left(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)^T$.

令 $Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$，$Q$ 是正交矩阵，则有 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&5\end{pmatrix}$.

作正交线性替换 $x=Qy$，有

$$f=x^TAx=y^TQ^TAQy=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2\le5(y_1^2+y_2^2+y_3^2)=5y^Ty.$$

又 $x^Tx=y^TQ^TQY=y^Ty=1$，于是 $f\le5$，f 的最大值为 5.

当 $y=(0,0,1)^T$，由 $x=Qy=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

即 $x=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ 时，f 取得最大值 5.

55．（本题满分 9 分）3 个袋子各装 $r+b$ 只球，其中红球 r 只．今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 袋子，再从第 2 袋再随机取一球，放入第 3 袋子并从中随机取一球．令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球,}\\ -1, & \text{反之.}\end{cases}\qquad k=1,2,3.$$

则 (I) 试求 X_3 的分布;

(II) 设 $r=b$，求 X_1 和 X_2 的相关系数ρ.

解　记两设备寿命分别为 X 和 Y、系统寿命为 U.

串联系统 $U=\min\{X,Y\}$．故 $f_U(u)=2\lambda\exp\{-\lambda u\}\exp\{-\lambda u\}==2\lambda\exp\{-2\lambda u\}$，$u>0$.

所求概率 $F_U(t)=1-\exp\{-2\lambda t\}$，$t>0$. $EU=1/(2\lambda)$.

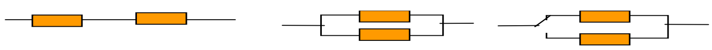
并联系统 $U=\max\{X,Y\}$．故 $f_U(u)=2\lambda\exp\{-\lambda u\}[1-\exp\{-\lambda u\}]$，$u>0$.

所求概率 $F_U(t)=[1-(1-\exp\{-\lambda t\}]^2$, $EU=2/\lambda-1/(2\lambda)=3/(2\lambda)$.

备用系统 $U=X+Y$．由Γ-分布参数可加性或者可利用独立和的密度公式计算卷积，知 $U\sim\Gamma(2,\lambda)$，

所求概率 $F_U(t)=\int_0^t\lambda^2 se^{-\lambda s}ds$, $t>0$.　$EU=2/\lambda$.

56．（本题满分 9）用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用（即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备）系统．如此类设备的寿命为参数是λ的指数分布，试求三个系统在时刻 t（>0）前失效的概率和三个系统的平均失效时间.



解 (I) 本题　概率公式和归纳法证

得).

$$X_3\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ b/(r+b) & r/(r+b)\end{pmatrix}.$$

(II).　$P(X_1=1|X_2=-1)=P(X_1=1,X_2=-1)/P(X_2=-1)$

$$=\frac{P(X_1=1)P(X_2=-1|X_1=1)}{P(X_2=-1)}=\frac{r}{r+b}\frac{b}{r+b+1}\left[\frac{b}{r+b}\right]^{-1}=\frac{r}{r+b+1}$$

(III) 注意 $EX_k^2=1$,　$k=1,2$，而 $r=b$ 时 $EX_k=0$,　$k=1,2$．由全概率公式及一般乘法公式,

$$P(X_1X_2=1)=P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=-1,X_2=-1)$$
$$=P(R_1)P(R_2\mid R_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)$$
$$=\frac{r(r+1)+b(b+1)}{(r+b)(r+b+1)}\overset{r=b}{=\!=\!=}\frac{r+1}{2r+1},$$
$$\operatorname{cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)=P(X_1X_2=1)-P(X_1X_2=-1)=2P(X_1X_2=1)-1$$
$$=\frac{2(r+1)-2r-1}{2r+1}=\frac{1}{2r+1}.$$
$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{EX_1^2}=\operatorname{cov}(X_1,X_2)=\frac{1}{2r+1}.$$

57. 3 个袋子各装 $r+b$ 只球，其中红球 r 只. 今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 袋子，再从第 2 袋再随机取一球，放入第 3 袋子并从中随机取一球. 令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球},\\ -1, & \text{反之}.\end{cases}\qquad k=1,2,3.$$

(I) 试求 X_3 的分布;

(II) 求 $P(X_1=1|\,X_2=-1)$

(III) 设 $r=b$，求 X_1 和 X_2 的相关系数ρ.

解 (I) 本题是 c=1 的 Polya 模型，故 $P(X_4=1)=P(X_1=1)=\dfrac{r}{r+b}$ (也可用全概率公式和归纳法证得).

$$X_3\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ b/(r+b) & r/(r+b)\end{pmatrix}.$$

(II). $P(X_1=1|\,X_2=-1)$ ＝$P(X_1=1,X_2=-1)/P(X_2=-1)$

$$=\frac{P(X_1=1)\,P(X_2=-1\mid X_1=1)}{P(X_2=-1)}=\frac{r}{r+b}\,\frac{b}{r+b+1}\Big[\frac{b}{r+b}\Big]^{-1}=\frac{r}{r+b+1}$$

(III) 注意 $EX_k^2=1,\quad k=1,2$，而 $r=b$ 时 $EX_k=0,\quad k=1,2$. 由全概率公式及一般乘法公式，

$$P(X_1X_2=1)=P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=-1,X_2=-1)$$
$$=P(R_1)P(R_2\mid R_1)+P(B_1)P(B_2\mid B_1)=\frac{r(r+1)+b(b+1)}{(r+b)(r+b+1)}\overset{r=b}{=\!=\!=}\frac{r+1}{2r+1},$$
$$\operatorname{cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)=P(X_1X_2=1)-P(X_1X_2=-1)=2P(X_1X_2=1)-1$$
$$=\frac{2(r+1)-2r-1}{2r+1}=\frac{1}{2r+1}.$$
$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{EX_1^2}=\operatorname{cov}(X_1,X_2)=\frac{1}{2r+1}.$$

58. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 取自正态母体 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，

(I) 证明：$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i-\mu|$ 是 σ 的无偏估计。

(II) $\left(\hat{\sigma}\right)^2$ 是否 σ^2 的无偏估计？如果是，对 σ^2 作估计时，它与样本方差 S^2 哪个更为有效？

对上述两个问题说明理由。

解 (I) 证明：$E\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot nE|X_1-\mu|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma\ E\left|\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sigma$，

是σ的无偏估计，其中第3个等号成立，因为

$$Z:=\frac{X_1-\mu}{\sigma}\sim N(0,1),$$

$$E|Z|=\int_{-\infty}^{\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}z\cdot e^{-z^2/2}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

（II）

$$E(\hat{\sigma})^2=\frac{\pi}{2n^2}\cdot E\left[(\sum_{i=1}^{n}|X_i-\mu|)(\sum_{j=1}^{n}|X_j-\mu|)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2n^2}\cdot\sigma^2E\sum_{i,j=1}^{n}|Z_i||Z_j|=\frac{\pi\sigma^2}{2n}[n+n(n-1)E|Z_1|\cdot E|Z_2|]$$

$$=\frac{\pi\sigma^2}{2n}[1+(n-1)\frac{2}{\pi}]=\frac{2n+\pi-2}{2n}\sigma^2\neq\sigma^2$$

不是σ^2的无偏估计。因此对σ^2作估计时，它与样本方差S^2不能比较有效性。

59. 3个袋子各装$r+b$只球，其中红球r只. 今从第1个袋子随机取一球，放入第2袋子，再从第2袋再随机取一球，放入第3袋子并从中随机取一球. 令

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{当第}k\text{次取出红球},\\ -1, & \text{反之}.\end{cases}\qquad k=1,2,3.$$

(I) 试求X_3的分布;

(II) 求$P(X_1=1|X_2=-1)$

(III) 设 $r=b$，求X_1和X_2的相关系数ρ.

解 (I)

本题是c=1的Polya模型，故 $P(X_4=1)=P(X_1=1)=\frac{r}{r+b}$(也可用全概率公式和归纳法证得).

$$X_3\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ b/(r+b) & r/(r+b)\end{pmatrix}.$$

(II). $P(X_1=1|X_2=-1)\ =P(X_1=1, X_2=-1)/P(X_2=-1)$

$$=\frac{P(X_1=1)P(X_2=-1|X_1=1)}{P(X_2=-1)}=\frac{r}{r+b}\frac{b}{r+b+1}[\frac{b}{r+b}]^{-1}=\frac{r}{r+b+1}$$

(III) 注意$EX_k^2=1,\quad k=1,2$，而$r=b$时$EX_k=0,\quad k=1,2$. 由全概率公式及一般乘法公式,

$$P(X_1X_2=1)=P(X_1=1,X_2=1)+P(X_1=-1,X_2=-1)$$

$$=P(R_1)P(R_2|R_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)$$

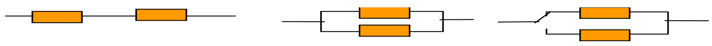
$$=\frac{r(r+1)+b(b+1)}{(r+b)(r+b+1)}\overset{r=b}{=\!=\!=}\frac{r+1}{2r+1},$$

$$\text{cov}(X_1,X_2)=E(X_1X_2)=P(X_1X_2=1)-P(X_1X_2=-1)=2P(X_1X_2=1)-1$$

$$=\frac{2(r+1)-2r-1}{2r+1}=\frac{1}{2r+1}.$$

$$\rho = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{EX_1^2} = \text{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2r+1}.$$

60．用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用（即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备）系统. 如此类设备的寿命为参数是λ的指数分布，试求三个系统在时刻 t（>0）前失效的概率和三个系统的平均失效时间.



解　记两设备寿命分别为 X 和 Y、系统寿命为 U.

串联系统 $U = \min\{X, Y\}$. 故　$f_U(u) = 2\lambda\exp\{-\lambda u\}\exp\{-\lambda u\}==2\lambda\exp\{-2\lambda u\}$，$u>0$.

所求概率 $F_U(t) = 1- \exp\{-2\lambda t\}$，$t>0$. $EU = 1/(2\lambda)$.

并联系统 $U = \max\{X, Y\}$. 故　$f_U(u) = 2\lambda\exp\{-\lambda u\}\,[1- \exp\{-\lambda u\}]$，$u>0$.

所求概率 $F_U(t) = [1- (1-\exp\{-\lambda t\}]^2$, $EU = 2/\lambda - 1/(2\lambda) = 3/(2\lambda)$.

备用系统 $U = X+Y$. 由Γ-分布参数可加性或者可利用独立和的密度公式计算卷积，知 $U \sim \Gamma(2,\lambda)$，

所求概率 $F_U(t) = \int_0^t \lambda^2 s e^{-\lambda s} ds$, $t>0$.　$EU = 2/\lambda$.