

## 2019 年北京市朝阳区高三期末数学（文科）逐题解析

一、选择题（共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{N} | 1 \leq x \leq 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ , 则  $A \cup B =$

(A)  $\{2, 3\}$

(B)  $\{2, 3, 4, 5\}$

(C)  $\{2\}$

(D)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

**【答案】D**

**【解析】** 本题考查集合运算.

由题意可得  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ,

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 故选 D.

2. 下列函数在其定义域内既是奇函数又是增函数的是

(A)  $y = \lg x$

(B)  $y = x^3$

(C)  $y = \sin x$

(D)  $y = x^{\frac{1}{2}}$

**【答案】B**

**【解析】** 本题考查函数的性质.

A:  $y = \lg x$  不是奇函数,

B:  $y = x^3$  既是奇函数又是增函数,

C:  $y = \sin x$  不是增函数,

D:  $y = x^{\frac{1}{2}}$  不是奇函数, 故选 B.

3. 设  $a$  是实数, 则 “ $a > 1$ ” 是 “ $\frac{1}{a} < 1$ ” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

**【答案】A**

【解析】本题考查简易逻辑用语。

充分性:当  $a > 1$  时,易得  $\frac{1}{a} < 1$

必要性: $\frac{1}{a} < 1$ ,则  $\frac{1}{a} - 1 < 0$ ,

即  $\frac{1-a}{a} < 0$ ,

$\therefore (1-a)a < 0$ ,

$\therefore a < 0$  或  $a > 1$ ,故选 A.

4. 执行如图所示的程序框图,若输入的

$S = 12$ ,则输出的  $S =$

- (A) 5                      (B) 6  
(C) -8                      (D) -18

【答案】C

【解析】本题考查程序流程图。

$S = 12 \rightarrow n = 1 \rightarrow S = 12 - 2 \times 1 = 10$

$\rightarrow n = 1 + 1 = 2 \rightarrow 10 + 2 = 12 \leq 0$ ,不成立,继

续下一轮,

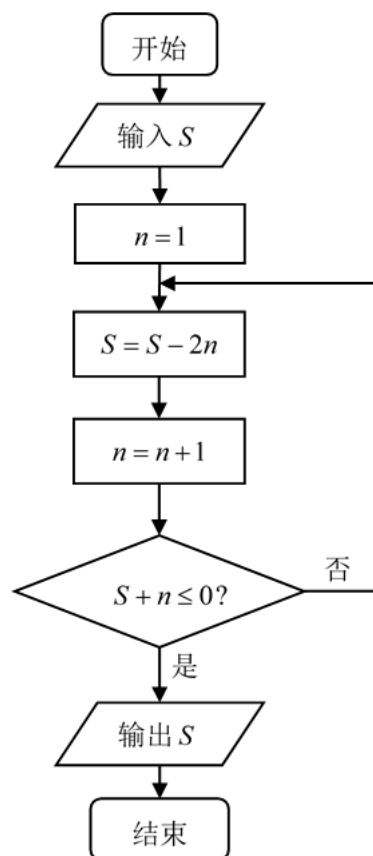
$S = 10 - 2 \times 2 = 6 \rightarrow n = 2 + 1 = 3$

$\rightarrow 6 + 3 = 9 \leq 0$ ,不成立,继续下一轮,

$S = 6 - 2 \times 3 = 0 \rightarrow n = 3 + 1 = 4 \rightarrow 0 + 4 = 4 \leq 0$ ,不成立,继续下一轮,

$S = 0 - 2 \times 4 = -8 \rightarrow n = 4 + 1 = 5 \rightarrow -8 + 5 = -3 \leq 0$ ,成立,输出  $S = -8$ ,故

选 C.



5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,过  $A(4,4), B(4,0), C(0,4)$  三点的圆被  $x$  轴截得的弦长为

(A) 2                      (B)  $2\sqrt{2}$                       (C) 4                      (D)  $4\sqrt{2}$

**【答案】C**

**【解析】** 本题考查直线与圆.

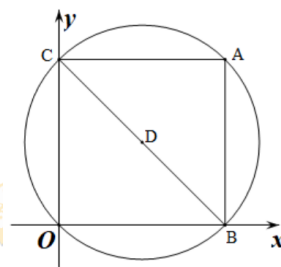
由图可得  $\triangle ABC$  为直角三角形,

$\therefore BC$  为直径,  $BC$  中点  $D(2,2)$  为圆心,

半径  $R = |AD| = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  圆  $D: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

$\therefore l = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 4$ , 故选 C.



6. 已知四边形的顶点  $A, B, C, D$  在边长为1的正方形网格中的位置如图

图所示, 则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} =$

(A) -18                      (B) -7                      (C) 7                      (D) 18

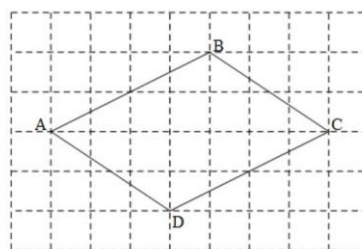
**【答案】C**

**【解析】** 本题考查平面向量.

设水平单位向量为  $\vec{e}_1$ , 竖直单位向量为  $\vec{e}_2$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 7\vec{e}_1, \overrightarrow{DB} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$

$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 7(\vec{e}_1)^2 + 7\vec{e}_1 \cdot 4\vec{e}_2 = 7$ , 故选 C.



7. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1 (a > 0)$  的一条渐近线方程为  $4x + 3y = 0$ ,

$F_1, F_2$  分别是双曲线  $C$  的左、右焦点, 点  $P$  在双曲线上, 且  $|PF_1| = 7$ , 则

$|PF_2| =$

(A) 1                      (B) 13                      (C) 17                      (D) 1或13

【答案】B

【解析】本题考查双曲线的性质.

由已知渐近线方程为 $4x+3y=0$

$$\therefore -\frac{b}{a} = -\frac{4}{3}, \therefore b=4, \therefore a=3, c=5,$$

$$\therefore \left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| = 2a = 6, \text{且已知} \left|PF_1\right| = 7$$

$$\therefore \left|PF_2\right| = 1 \text{ 或 } 13, \text{又} \therefore \left|PF_2\right| \geq c - a = 2$$

$$\therefore \left|PF_2\right| = 13, \text{故选 B.}$$

8. 从计算器屏幕上显示的数为0开始,小明进行了五步计算,每步都是加1或乘以2.那么不可能是计算结果的最小的数是

(A) 12

(B) 11

(C) 10

(D) 9

【答案】B

【解析】本题考查逻辑.

步数 计算 起始数	1	2	3	4	5	结果
0	+1	×2	+1	×2	×2	12
0	+1	+1	×2	+1	×2	10
0	+1	+1	×2	×2	+1	9

故A、C、D正确.

选项B:由数字11反向推回0.想最快得到0,遇到奇数减1,遇到偶数除2即可.所以至少有:

$$11-1=10, 10 \div 2 = 5, 5-1=4, 4 \div 2 = 2, 2 \div 2 = 1, 1-1=0.$$

共6步,故B错.

## 二、填空题（共6小题,每小题5分,共30分）

9. 设复数  $z$  满足  $(1-i)z = 2i$ , 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.【答案】  $\sqrt{2}$ 

【解析】 本题考查复数的四则运算及复数的模.

$$z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i-2}{2} = -1+i$$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

10. 已知数列  $\{a_n\}$  为等比数列,  $S_n$  为其前  $n$  项的和, 若  $a_1 a_2 a_3 = 64$ ,

$$a_5 = 32, \text{ 则 } q = \text{_____}; S_6 = \text{_____}.$$

【答案】 2, 126

【解析】 本题考查等比数列的定义及求和公式.

$$\therefore \begin{cases} a_1 a_2 a_3 = 64 \\ a_5 = 32 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_2^3 = 64 \\ a_2 q^3 = 32 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = 2^n \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2(1-2^6)}{1-2} = 126$$

11. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $A = 150^\circ$ ,  $\cos C = \frac{12}{13}$ ,  $BC = 13$ . 则  $AB =$  \_\_\_\_\_.

【答案】 10

【解析】 本题考查正弦定理.

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中 } \cos C = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \sin C = \frac{5}{13}$$

由正弦定理得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 即 } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

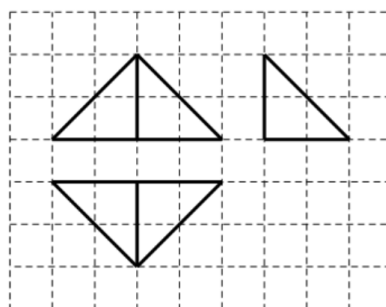
$$\therefore AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{13 \times \frac{5}{13}}{\frac{1}{2}} = 10$$

12. 如图,在边长为1的正方形网格中,粗实线表示一个三棱锥的三视图,则该三棱锥的表面积为\_\_\_\_\_.

【答案】  $8 + 4\sqrt{3}$

【解析】 本题考查三视图、表面积.

三视图还原如图所示

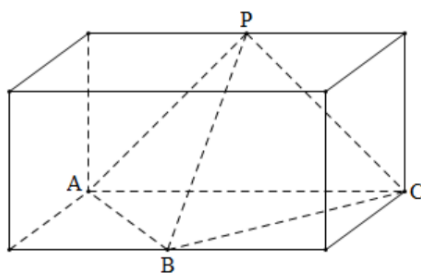


$$PB = PA = PC = AB = BC = 2\sqrt{2}, AC = 4$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4, S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}, S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

$$S_{\text{总}} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC} + S_{\triangle BCP} = 8 + 4\sqrt{3}$$



13. 对任意实数  $x$ , 都有  $\log_a(e^x + 3) \geq 1$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

**【答案】** (1,3]

**【解析】** 本题考查指数函数与对数函数.

$$\log_a(e^x + 3) \geq \log_a a$$

①当  $0 < a < 1$  时,

$$\therefore e^x + 3 \leq a \Rightarrow a > 3$$

不成立

②当  $a > 1$  时,

$$\therefore a \leq e^x + 3 \Rightarrow a \leq 3$$

$$\therefore a \in (1, 3], \text{成立}$$

综上  $a \in (1, 3]$

14. 2018年国际象棋奥林匹克团体赛中国男队、女队同时夺冠. 国际象棋中骑士的移动规则是沿着  $3 \times 2$  格或  $2 \times 3$  格的对角移动. 在历史上, 欧拉、泰勒、哈密尔顿等数学家研究了“骑士巡游”问题: 在  $8 \times 8 = 64$  格的黑白相间的国际象棋棋盘上移动骑士, 是否可以让骑士从某方格内出发不重复地走遍棋盘上的每一格?

图(一)给出了骑士的一种走法, 它从图上标1的方格内出发, 依次经过标2, 3, 4, 5, 6, ..., 到达标64的方格内, 不重复地走遍棋盘上的每一格, 又可从标64的方格内直接走回到标1的方格内. 如果骑士的出发点在左下角标50的方格内, 按照上述走法, \_\_\_\_\_ (填“能”或“不能”) 走回到标50的方格内.

若骑士限制在图（二）中的 $3 \times 4 = 12$ 格内按规则移动,存在唯一一种给方格标数字的方式,使得骑士从左上角标1的方格内出发,依次不重复经过2,3,4,5,6,...,到达右下角标12的方格内,分析图（二）中A处所标的数应为\_\_\_\_\_.

35	38	27	16	29	42	55	18
26	15	36	39	54	17	30	43
37	34	13	28	41	32	19	56
14	25	40	33	20	53	44	31
63	12	21	52	1	8	57	46
24	51	64	9	60	45	2	5
11	62	49	22	7	4	47	58
50	23	10	61	48	59	6	3

图（一）

1			
A			
3			12

图（二）

**【答案】**能;8

**【解析】**本题考查逻辑.

由图（一）知:

1~64可依次行走,64~1也可一步走.

故1~64为循环.

本题从50起:50→64→1→50.可依次行走,故可回到原点.



由图知:数字1,2,3,4是固定的,从5开始有两种情况.

1	4		6
	7	2	
3		5	8

矛盾,故不正确.

1	4	7	
6		2	
3		5	8

矛盾,故不正确.

1	4	7	
6		2	9
3	8	5	

矛盾,故不正确.

1	4	7	
		2	5
3	6		8

矛盾,故不正确.

1	4	7	10
8	11	2	5
3	6	9	12

正确,故  $A=8$ .

三、解答题 (共 6 小题,共 80 分,解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程)

15. (本小题满分 13 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和是  $S_n$ , 若  $a_{n+1} = a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ ,  $S_3 = 12$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

【解析】

$$(I) \because a_{n+1} = a_n + 1$$

$\therefore \{a_n\}$  是 1 为公差的等差数列

$$\because S_3 = 12$$

$$\therefore S_3 = 3a_2 = 12$$

$$\therefore a_2 = 4, \therefore a_1 = 3$$

$$\therefore a_n = n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$(II) b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{n}{3n+9} (n \in \mathbf{N}^*)$$

16. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = (2\cos^2 \frac{x}{2} - 1)\tan x + \cos x$ .

(I) 求  $f(x)$  的定义域及最小正周期;

(II) 若  $f(\alpha) = 1$ , 且  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ , 求  $\alpha$  的值.

【解析】

(I) 由题意知,  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$

$$f(x) = (2\cos^2 \frac{x}{2} - 1)\tan x + \cos x$$

$$= \cos x \tan x + \cos x$$

$$= \sin x + \cos x$$

$$= \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

所以  $f(x)$  的最小正周期为  $2\pi$ .

(II) 解法一: 由  $f(\alpha) = 1$  知,  $\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1$ , 则  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

解得  $\alpha = 2k\pi$  或  $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

又因为  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ , 且  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $\alpha = 0$ .

解法二: 由  $f(\alpha) = 1$  知,  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$ , 则  $\sin 2\alpha = 0$ ,

解得  $\alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ .

又因为  $\alpha \in (-\pi, \pi)$ , 且  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

所以  $\alpha = 0$

## 17. (本小题满分13分)

某日  $A, B, C$  三个城市18个销售点的小麦价格如下表:

销售点 序号	所属城市	小麦价格 (元/吨)	销售点 序号	所属城市	小麦价格 (元/吨)
1	A	2420	10	B	2500
2	C	2580	11	A	2460
3	C	2470	12	A	2460
4	C	2540	13	A	2500
5	A	2430	14	B	2500
6	C	2400	15	B	2450
7	A	2440	16	B	2460
8	B	2500	17	A	2460
9	A	2440	18	A	2540

- (I) 求  $B$  市5个销售点小麦价格的中位数;
- (II) 甲从  $B$  市的销售点中随机挑选一个购买1吨小麦,乙从  $C$  市的销售点中随机挑选一个购买1吨小麦,求甲花费的费用比乙高的概率;
- (III) 如果一个城市的销售点小麦价格方差越大,则称其价格差异性越大.请你对  $A, B, C$  三个城市按照小麦价格差异性从大到小进行排序(只写出结果).

## 【解析】

(I)  $B$  市一共有5个销售点,价格分别为:

2500, 2500, 2500, 2450, 2460

按照价格从低到高排列为: 2450, 2460, 2500, 2500, 2500

$B$  市 5 个销售点小麦价格的中位数为 2500.

(II) 记事件“甲的费用比乙高”为  $A$ .

$B$  市 5 个销售点按照价格从低到高排列为: 2450, 2460, 2500, 2500, 2500

$C$  市一共有 4 个销售点, 价格分别为: 2580, 2470, 2540, 2400

按照价格从低到高排列为: 2400, 2470, 2540, 2580

甲乙两个购买小麦分别花费的可能费用有如下组合:

(2450, 2400), (2460, 2400), (2500, 2400), (2500, 2400), (2500, 2400),

(2450, 2470), (2460, 2470), (2500, 2470), (2500, 2470), (2500, 2470),

(2450, 2540), (2460, 2540), (2500, 2540), (2500, 2540), (2500, 2540),

(2450, 2580), (2460, 2580), (2500, 2580), (2500, 2580), (2500, 2580),

一共有 20 组.

其中满足甲的费用高于乙的有如下组合:

(2450, 2400), (2460, 2400), (2500, 2400), (2500, 2400), (2500, 2400),

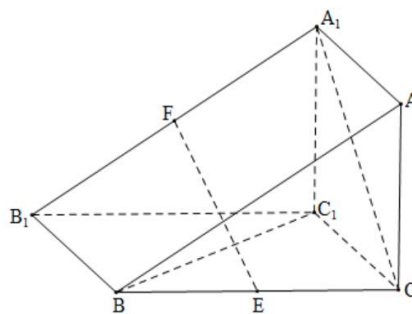
(2500, 2470), (2500, 2470), (2500, 2470) 一共有 8 组.

所以, 甲的费用比乙高的概率为:  $P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ .

(III) 三个城市按照价格差异性从大到小排列为:  $C, A, B$ .

18. (本小题满分 14 分)

如图, 三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的侧面  $BCC_1B_1$  是平行四边形,  $BC_1 \perp C_1C$ , 平面  $A_1C_1CA \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , 且  $E, F$  分别是  $BC, A_1B_1$  的中点.



(I) 求证:  $BC_1 \perp A_1C$ ;

(II) 求证:  $EF \parallel$  平面  $A_1C_1CA$ ;

(III) 在线段  $AB$  上是否存在点  $P$ , 使得  $BC_1 \perp$  平面  $EFP$ ? 若存在, 求出

$\frac{AP}{AB}$  的值; 若不存在, 请说明理由.

【解析】

(I) 因为  $BC_1 \perp C_1C$ , 又平面  $A_1C_1CA \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ,  
且平面  $A_1C_1CA \cap$  平面  $BCC_1B_1 = C_1C$

所以  $BC_1 \perp$  平面  $ACC_1A_1$ .

又因为  $A_1C \subset$  平面  $A_1C_1CA$ ,

所以  $BC_1 \perp A_1C$ .

(II) 取  $A_1C_1$  中点  $G$ , 连  $FG$ , 连  $GC$ .

在  $\triangle A_1B_1C_1$  中,  $F, G$  分别是  $A_1B_1, A_1C_1$  中点,

则  $FG \parallel B_1C_1, FG = \frac{1}{2} B_1C_1$ .

在平行四边形  $BCC_1B_1$  中,  $E$  是  $BC$  的中点,

则  $EC \parallel B_1C_1, EC = \frac{1}{2} B_1C_1$ .

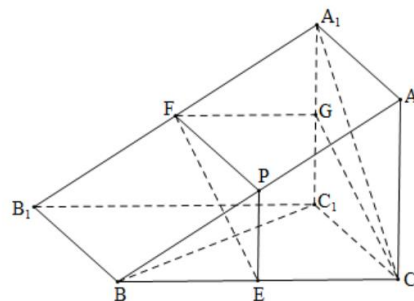
所以  $EC \parallel FG$ , 且  $EC = FG$ .

所以四边形  $FECG$  是平行四边形.

所以  $FE \parallel GC$ .

又因为  $FE \not\subset$  平面  $A_1C_1CA, GC \subset$  平面  $A_1C_1CA$ ,

所以  $EF \parallel$  平面  $A_1C_1CA$ .



(III) 在线段  $AB$  上存在点  $P$ , 使得  $BC_1 \perp$  平面  $EFP$ .

取  $AB$  的中点  $P$ , 连  $PE$ , 连  $PF$ .

因为  $BC_1 \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ,  $AC \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,  $CG \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,

所以  $BC_1 \perp AC$ ,  $BC_1 \perp CG$ .

在  $\triangle ABC$  中, 因为  $P, E$  分别是  $AB, BC$  中点, 所以  $PE \parallel AC$ .

又由 (II) 知  $FE \parallel CG$ ,

所以  $BC_1 \perp PE$ ,  $BC_1 \perp FE$ .

由  $PE \cap FE = E$  得  $BC_1 \perp$  平面  $EFP$ .

故当点  $P$  是线段  $AB$  的中点时,  $BC_1 \perp$  平面  $EFP$ .

此时,  $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$

19. (本小题满分 14 分)

过椭圆  $W: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的左焦点  $F_1$  作直线  $l_1$  交椭圆于  $A, B$  两点, 其中  $A(0, 1)$ , 另一条过  $F_1$  的直线  $l_2$  交椭圆于  $C, D$  两点 (不与  $A, B$  重合), 且  $D$  点不与点  $(0, -1)$  重合. 过  $F_1$  作  $x$  轴的垂线分别交直线  $AD, BC$  于  $E, G$ .

(I) 求  $B$  点坐标和直线  $l_1$  的方程;

(II) 求证:  $|EF_1| = |F_1G|$ .

**【解析】**

(I) 由题意可得直线  $l_1$  的方程为  $y = x + 1$ . 与椭圆方程联立,

$$\text{由} \begin{cases} y = x + 1 \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}$$

可求  $B(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$

(II) 当  $l_2$  与  $x$  轴垂直时,  $C, D$  两点与  $E, G$  两点重合,

由椭圆的对称性,  $|EF_1| = |F_1G|$ . 当  $l_2$  不与  $x$  轴垂直时,

设  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ ,  $l_2$  的方程为  $y = k(x+1)$  ( $k \neq 1$ ).

$$\begin{cases} y = k(x+1) \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 整理得 } (2k^2+1)x^2 + 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0.$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-4k^2}{2k^2+1}, x_1 x_2 = \frac{2k^2-2}{2k^2+1}.$$

由已知  $x_2 \neq 0$ , 则直线  $AD$  的方程为  $y - 1 = \frac{y_2 - 1}{x_2} x$ ,

令  $x = -1$ , 得点  $E$  的纵坐标  $y_E = \frac{x_2 - y_2 + 1}{x_2}$ , 把  $y_2 = k(x_2 + 1)$  代入得

$y_E = \frac{(x_2 + 1)(1 - k)}{x_2}$ . 由已知,  $x_1 \neq -\frac{4}{3}$ , 则直线  $BC$  的方程为

$$y + \frac{1}{3} = \frac{y_1 + \frac{1}{3}}{x_1 + \frac{4}{3}} \left(x + \frac{4}{3}\right),$$

令  $x = -1$ , 得点  $G$  的纵坐标  $y_G = \frac{y_1 - x_1 - 1}{3(x_1 + \frac{4}{3})}$ .

把  $y_1 = k(x_1 + 1)$  代入得  $y_G = \frac{(x_1 + 1)(k - 1)}{3x_1 + 4}$ .

$$\begin{aligned} y_E + y_G &= \frac{(x_2 + 1)(1 - k)}{x_2} + \frac{(x_1 + 1)(k - 1)}{3x_1 + 4} \\ &= \frac{(1 - k)[(x_2 + 1)(3x_1 + 4) - x_2(x_1 + 1)]}{x_2 \cdot (3x_1 + 4)} = \frac{(1 - k)[2x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 4]}{x_2 \cdot (3x_1 + 4)} \end{aligned}$$



把  $x_1 + x_2 = \frac{-4k^2}{2k^2 + 1}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1}$  代入到  $2x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 4$  中,

$$2x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 4 = 2 \times \frac{2k^2 - 2}{2k^2 + 1} + 3 \times \left( \frac{-4k^2}{2k^2 + 1} \right) + 4 = 0.$$

即  $y_E + y_G = 0$ , 即  $|EF_1| = |F_1G|$ .

20. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = xe^x - \frac{m}{2}(x+1)^2 (m \geq 0)$ .

(I) 当  $m=0$  时, 求函数  $f(x)$  的极小值;

(II) 当  $m>0$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(III) 若函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上有且只有一个零点, 求  $m$  的取值范围.

**【解析】**

(I) 当  $m=0$  时:  $f'(x) = (x+1)e^x$ , 令  $f'(x) = 0$  解得  $x = -1$ ,

又因为当  $x \in (-\infty, -1)$ ,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  为减函数;

当  $x \in (-1, +\infty)$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  为增函数.

所以,  $f(x)$  的极小值为  $f(-1) = -\frac{1}{e}$ .

(II)  $f'(x) = (x+1)(e^x - m)$ .

当  $m > 0$  时, 由  $f'(x) = 0$ , 得  $x = -1$  或  $x = \ln m$ .

(i) 若  $m = \frac{1}{e}$ , 则  $f'(x) = (x+1)(e^x - \frac{1}{e}) \geq 0$ .

故  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增;

(ii) 若  $m > \frac{1}{e}$ , 则  $\ln m > -1$ .

故当  $f'(x) > 0$  时,  $x < -1$  或  $x > \ln m$ ;

当  $f'(x) < 0$  时,  $-1 < x < \ln m$ .

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -1), (\ln m, +\infty)$  单调递增, 在  $(-1, \ln m)$  单调递减.

(iii) 若  $0 < m < \frac{1}{e}$ , 则  $\ln m < -1$ .

故当  $f'(x) > 0$  时,  $x < \ln m$  或  $x > -1$ ;

当  $f'(x) < 0$  时,  $\ln m < x < -1$ .

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln m), (-1, +\infty)$  单调递增, 在  $(\ln m, -1)$  单调递减.

综上所述:

当  $0 < m < \frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln m), (-1, +\infty)$  单调递增, 在  $(\ln m, -1)$  单调递

减;

当  $m = \frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增;

当  $m > \frac{1}{e}$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -1), (\ln m, +\infty)$  单调递增, 在  $(-1, \ln m)$  单调递减.

(III) (1) 当  $m = 0$  时,  $f(x) = xe^x$ , 令  $f(x) = 0$ , 得  $x = 0$ .

因为当  $x < 0$  时,  $f(x) < 0$ , 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ ,

所以此时  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上有且只有一个零点.

(2) 当  $m > 0$  时:

(i) 当  $m = \frac{1}{e}$  时, 由 (II) 可知  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增,

且  $f(-1) = -\frac{1}{e} < 0$ ,  $f(1) = e - \frac{2}{e} > 0$ ,

此时  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上有且只有一个零点.

(ii) 当  $m > \frac{1}{e}$  时, 由 (II) 的单调性结合  $f(-1) < 0$ ,

又  $f(\ln m) < f(-1) < 0$ , 只需讨论  $f(1) = e - 2m$  的符号:

当  $\frac{1}{e} < m < \frac{e}{2}$  时,  $f(1) > 0$ ,  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上有且只有一个零点;

当  $m \geq \frac{e}{2}$  时,  $f(1) \leq 0$ , 函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上无零点.

(iii) 当  $0 < m < \frac{1}{e}$  时, 由 (II) 的单调性结合  $f(-1) < 0$ ,  $f(1) = e - 2m > 0$ ,

$$f(\ln m) = -\frac{m}{2} \ln^2 m - \frac{m}{2} < 0,$$

此时  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上有且只有一个零点.

综上所述,  $m$  的取值范围为  $[0, \frac{e}{2})$ .