2018 年北京市海淀区高三期中数学（文科）考试逐题解析

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合 $A=\{x\,|\,x-a\le 0\}$，若 $2\in A$，则 a 的取值范围为

A. $(-\infty,4]$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

【答案】C

【解析】因为 $2\in A$，所以 $2-a\le 0$，解得 $a\ge 2$，故选 C.

2.下列函数中，是奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上存在最小值的是

A. $f(x)=x^2-x$　　B. $f(x)=|\ln x|$

C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=\sin x$

【答案】D

【解析】A. $f(x)=x^2-x$ 不是奇函数；B. $f(x)=|\ln x|$ 不是奇函数；

C. $f(x)=x^3$ 是奇函数，但在 $(0,+\infty)$ 上无最小值；

D. $f(x)=\sin x$ 是奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上最小值为 -1，故选 D.

3.函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 满足 $f(\frac{\pi}{3})=1$，则 $f(\frac{5\pi}{6})$ 的值是

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

【答案】A

【解析】因为 $f(\frac{\pi}{3})=1$，所以 $\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$，

而 $f(\frac{5\pi}{6})=\sin(\frac{5\pi}{6}+\varphi)=\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\varphi)=\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)$，

因为 $\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$，所以 $f(\frac{5\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$，故选 A.

4.已知平面向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(3,1)$，则向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

【答案】B

【解析】

$\because \vec{a}=(1,2),\vec{b}=(3,1)$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3+2=5$，

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},|\vec{b}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore \cos<\vec{a}\cdot\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore <\vec{a}\cdot\vec{b}>=\frac{\pi}{4}$.

5.已知函数$f(x)=\log_a x$，$g(x)=b^x$的图像都经过点$(\frac{1}{4},2)$，则ab的值为

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】D

【解析】

由题意可得$f(\frac{1}{4})=\log_a\frac{1}{4}=2$，

所以$a=\frac{1}{2}$，$a=-\frac{1}{2}$（舍），

$g(\frac{1}{4})=b^{\frac{1}{4}}=2$，所以$b=2^4=16$，$ab=\frac{1}{2}\times16=8$.

6.在$\triangle ABC$中，“$C=\frac{\pi}{2}$”是“$\sin A=\cos B$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

充分性：$\because C=\frac{\pi}{2}\ \therefore A+B=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{2}-B\ \therefore \sin A=\sin(\frac{\pi}{2}-B)=\cos B$，所以充分性得证.

必要性：$\because \sin A=\cos B=\sin(\frac{\pi}{2}-B)$，

$\therefore A=\frac{\pi}{2}-B$ 或 $A+\frac{\pi}{2}-B=\pi\ \therefore A+B=\frac{\pi}{2}$ 或 $A-B=\frac{\pi}{2}$，

所以必要性不成立.

7. 数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+\frac{a}{n}$，若数列$\{a_n\}$单调递增，则实数a的取值范围是

A. $(-\infty,0]$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $(-\infty,2)$　　D. $[1,+\infty)$

【答案】C

【解析】

$\because \{a_n\}$单调递增，

$\therefore a_{n+1}>a_n$，故$n+1+\frac{a}{n+1}>n+\frac{a}{n}$，$\therefore 1+\frac{a}{n+1}-\frac{a}{n}>0$，

$\because n\geq 1$，$\therefore n(n+1)+na-a(n+1)>0$，

即$n^2+n-a>0$，$a<n^2+n$，$\therefore a<2$.

8. 已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，且$\vec{a}^2>\vec{b}^2>\vec{c}^2$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$中最小的值是

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　B. $\vec{b}\cdot\vec{c}$　　C. $\vec{c}\cdot\vec{a}$　　D. 不能确定

【答案】A

【解析】

$\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{c}^2$，

$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2$，

同理$\therefore 2\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}^2-\vec{a}^2-\vec{c}^2$，

$\therefore 2\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}^2-\vec{b}^2-\vec{c}^2$，

$\because \vec{a}^2>\vec{b}^2>\vec{c}^2$，

$2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{c}=2(\vec{c}^2-\vec{b}^2)<0$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}<\vec{a}\cdot\vec{c}$，

$2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}=2(\vec{c}^2-\vec{a}^2)<0$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}<\vec{b}\cdot\vec{c}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}$最小.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 角 θ 终边经过点 $P(4,-3)$，则 $\tan\theta=$_______.

【答案】 $-\dfrac{3}{4}$

【解析】角 θ 终边经过点 $P(4,-3)$. $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-\dfrac{3}{4}$.

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=5$， $a_2+a_5=0$， 则 $\{a_n\}$ 中为正数的项的个数为_______.

【答案】 3

【解析】

$\because a_1=5$ 且 $a_2+a_5=0$ $\therefore a_1+d+a_1+4d=2a_1+5d=0$，

$\therefore d=-2$， $\therefore a_2=3$， $a_3=1$，

当 $n\geq4$ 时，即 $a_n<0$ 所以正数的项的个数为 3 个.

11. 已知 $\overrightarrow{AB}$， $\overrightarrow{AC}$ 是不共线的两个向量，$\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$， 则

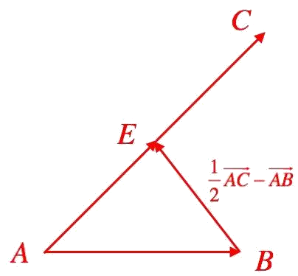
$\dfrac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}|}=$_______.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】法 1：由题意 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ 有 $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\dfrac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$.

法 2：图像法，如图：可知 $\dfrac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{2}$.



12．函数 $f(x)=|\sin\frac{x}{2}-2|$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值为______.

【答案】2

【解析】

$\because 0\le x\le\pi$，$\therefore 0\le\frac{x}{2}\le\frac{\pi}{2}$，则 $0\le\sin\frac{x}{2}\le 1$，$-2\le\sin\frac{x}{2}-2\le -1$，

$\therefore |\sin\frac{x}{2}-2|_{\max}=2$.

13．能说明“若存在 x_0，使得 $f(-x_0)=-f(x_0)$，则 $f(x)$ 不是偶函数”为假命题的一个函数 $f(x)$ 是______.

【答案】$f(x)=x^2$ / $f(x)=\cos x$

【解析】由题意只需函数 $f(x)$ 既是偶函数，又存在 x_0，使得 $f(-x_0)=-f(x_0)$，故可取 $f(x)=x^2$ / $f(x)=\cos x$.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\le a,\\ x, & x>a.\end{cases}$

（1）当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 的值域是______；

（2）若函数 $f(x)$ 的图像与直线 $y=a$ 只有一个公共点，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】（1）$\mathbf{R}$ （2）$[0,1]$

【解析】（1）$a=1$ 时，值域为 $\mathbf{R}$.

（2）当 $x>a$ 时，$f(x)=x\ne a$ 无交点，

当 $x\le a$ 时，需 $f(x)=-x^2+2x$ 与 $y=a$ 有且只有一个交点，

①若 $a>1$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=1<a$ 无交点，

②若 $a\le 1$ 时，$f(a)\ge a$，$-a^2+2a\ge a$，a 的取值范围是 $[0,1]$.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答题写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$

（I）求 $f(0)$ 的值；

（II）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

【解析】

（I） $f(0)=\dfrac{\cos 0}{\cos 0-\sin 0}=1$；

（II）因为 $\cos x-\sin x\neq 0$，所以 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，

即定义域为 $\left\{x \middle| x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z\right\}$，

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\\&=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\\&=\cos x+\sin x\\&=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leq x+\dfrac{\pi}{4}\leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，得 $2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in Z$，

因为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in Z$，

所以函数的单调递增区间为 $(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4}),k\in Z$.

16.（本小题满分 13 分）

设$\{a_n\}$为等比数列，其前n项和为S_n，且$a_2=2, S_2-3a_1=0$.

（I）求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）若$S_n+a_n>48$，求n的最小值.

【解析】

（I）$S_2-3a_1=0$，$a_1+a_2-3a_1=0$，$a_2=2a_1$，

$\because \{a_n\}$为等比数列，

$\therefore q=\dfrac{a_2}{a_1}=2$，

$\therefore a_n=a_2\cdot q^{n-2}=2\cdot 2^{n-2}=2^{n-1}$.

（II）

$S_n+a_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}+a_1q^{n-1}=2^n-1+2^{n-1}>48$，

$2^{n-1}(2+1)>49$，

$2^{n-1}>\dfrac{49}{3}$.

当$n=5$时，$2^{5-1}=2^4=16<\dfrac{49}{3}$，

当$n=6$时，$2^{6-1}=2^5=32>\dfrac{49}{3}$.

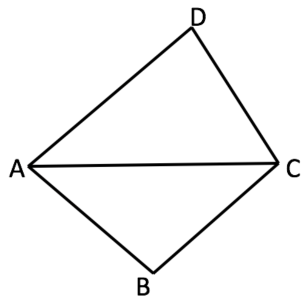
$\therefore n$的最小值为 6.

17.（本小题满分 13 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=4$，$BC=5$，$AC=7$，$\angle B+\angle D=\pi$.

（I）求 $\cos D$ 的值；

（II）若 AC 是 $\angle BAD$ 的角平分线，求 DC 的长.



【解析】

（I）在 $\triangle ABC$，由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

把 $AB=4$，$BC=5$，$AC=7$ 代入可得 $\cos B=\dfrac{4^2+5^2-7^2}{2\times4\times5}=-\dfrac{1}{5}$，

因为 $\angle B+\angle D=\pi$， 所以 $\cos D=\cos(B-\pi)=-\cos B=\dfrac{1}{5}$.

（II）法一：

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得， $\cos\angle BAC=\dfrac{16+49-25}{2\times4\times7}=\dfrac{5}{7}$，

所以 $\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$， AC 是 $\angle BAD$ 的角平分线，

所以 $\angle DAC=\angle BAC$.

所以 $\sin\angle DAC=\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$.

因为 $0<\angle D<\pi$，

所以由（I）可得 $\sin D=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$，

在 $\triangle ADC$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin D}$，

可得 $DC=\dfrac{AC\sin\angle DAC}{\sin D}=5$.

法二：

因为 AC 是 $\angle BAD$ 的角平分线，所以 $\angle DAC = \angle BAC$，

根据正弦定理，在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = \dfrac{AC}{\sin B}$，

在 $\triangle ADC$ 中，$\dfrac{DC}{\sin\angle DAC} = \dfrac{AC}{\sin D}$，

因为 $\sin\angle DAC = \sin\angle BAC$，且 $\sin B = \sin(\pi - D) = \sin D$，

所以，$DC = BC = 5$.

18. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3+x^2+ax-1$.

（I）当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（II）求证：直线 $y=ax-1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（III）写出 a 的一个值，使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点.**（只需直接写出数值）**

【解析】

（I）函数 $f(x)=x^3+x^2+ax-1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f(x)=x^3+x^2-x-1$，

所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$，令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{3}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(\frac{1}{3},+\infty)$，

单调递减区间为 $(-1,\frac{1}{3})$

（II）因为 $f'(x)=3x^2+2x+a$，令 $f'(x)=3x^2+2x+a=a$，

解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{2}{3}$

而 $f(0)=-1$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+1=a(x-0)$，

即 $y=ax-1$

所以无论 a 为何值，直线 $y=ax-1$ 都是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线.

（III）取 a 的值为 -2.

这里 a 的值不唯一，只要取 a 的值小于 -1 即可.

19.（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n^2+(-1)^n$.

（I）求a_1,a_2,a_3的值；

（II）求证：$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$.

【解析】

（I）因为$S_n=n^2+(-1)^n$，所以$a_1=S_1=0$，

$a_2=S_2-S_1=5$，$a_3=S_3-S_2=3$.

（II）法一：因为$S_n=n^2+(-1)^n$，

当$n\geq 2$时，因为$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1+2(-1)^n$，

当n为偶数时，$a_n=2n+1$, 当n为奇数时，$a_n=2n-3$,

当n为奇数，且$n\geq 3$时，$a_n=2n-3$，$a_{n-1}=2(n-1)+1=2n-1$,

所以此时$a_n<a_{n-1}$，所以$a_3<a_2$，$a_5<a_4$，$\cdots\cdots a_{2n+1}<a_{2n}$,

所以$a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$.

又$a_1=0$，所以$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$.

法二：因为$S_n=n^2+(-1)^n$,当$n\geq 2$时，因为$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1+2(-1)^n$,

当n为偶数时，$a_n=2n+1$, 当n为奇数时，$a_n=2n-3$,

所以$\{a_{2n}\}$是以$a_2=5$为首项，公差为4的等差数列,

$\{a_{2n+1}\}$是以$a_3=3$为首项，公差为1的等差数列,

所以$T_1=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}=0+\dfrac{(a_3+a_{2n+1})n}{2}=2n^2+n$,

$T_2=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=0+\dfrac{(a_2+a_{2n})n}{2}=2n^2+3n$,

所以$T_2-T_1=2n>0$，所以$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$.

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=mx^2-x-\dfrac{\ln x}{m}$.

（I）求函数 $f(x)$ 的极值；

（II）求证：当 $m>0$ 时，存在 x_0，使得 $f(x_0)<1$.

【解析】

（I）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $m\neq 0$，

因为 $f'(x)=2mx-1-\dfrac{1}{mx}=\dfrac{2m^2x^2-mx-1}{mx}=\dfrac{(2mx+1)(mx-1)}{mx}$，

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\dfrac{1}{2m},x_2=\dfrac{1}{m}$.

①当 $m>0$ 时，x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{m})$	$\frac{1}{m}$	$(\frac{1}{m},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{m}$ 处取得极小值 $f(\dfrac{1}{m})=-\dfrac{1}{m}\ln\dfrac{1}{m}=\dfrac{\ln m}{m}$.

②当 $m<0$ 时，x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,-\frac{1}{2m})$	$-\frac{1}{2m}$	$(-\frac{1}{2m},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-\dfrac{1}{2m}$ 处取得极大值 $f(-\dfrac{1}{2m})=\dfrac{3}{4m}+\dfrac{\ln(-2m)}{m}$.

（II）当$m>0$时，由（I）可知，$f(x)$的最小值是$f(\frac{1}{m})=\frac{\ln m}{m}$，

所以“存在x_0，使得$f(x_0)<1$”等价于“$f(\frac{1}{m})<1$”，

而$f(\frac{1}{m})-1=\frac{\ln m-m}{m}$，

设$g(x)=\ln x-x(x>0)$，

则$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

令$g'(x)=0$，则$x=1$，

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

当$0<x<1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$x>1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以$g(x)$的最大值为$g(1)=-1<0$，

所以$f(\frac{1}{m})-1=\frac{\ln m-m}{m}<0$ ，

所以结论成立.