# 2017~2018学年广东广州天河区高二下学期理科期末数学试卷

## 一、选择题（本大题共12个小题，每小题5分，共60分）

1 已知复数$z$满足$z(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，则$\overline{z}=$（　）.

A. $\mathrm{i}$　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $1+\mathrm{i}$　　D. $1-\mathrm{i}$

2 已知随机变量$X$服从正态分布$N(a,4)$，且$P(X>1)=0.5$，$P(X>2)=0.3$，则$P(X<0)$等于（　）.

A. $0.2$　　B. $0.3$　　C. $0.7$　　D. $0.8$

3 已知在$10$件产品中可能存在次品，从中抽取$2$件检查，其次品数为$\xi$，已知$P(\xi=1)=\dfrac{16}{45}$，且该产品的次品率不超过$40\%$，则这$10$件产品的次品率为（　）.

A. $40\%$　　B. $30\%$　　C. $20\%$　　D. $10\%$

4 下列说法中正确的是（　）.

A. 先把高三年级的2000名学生编号：1到2000，再从编号为1到50的50名学生中随机抽取1名学生，其编号为$m$，然后抽取编号为$m+5$，$m+100$，$m+150$，$\cdots\cdots$的学生这样的抽样方法是分层抽样法

B. 线性回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$不一定过样本中心点$(\overline{x},\overline{y})$

C. 若两个随机变量的线性相关性越强，则相关系数$r$的值越接近于$1$

D. 在残差图中，残差点分布的带状区域的宽度越狭窄，其模型拟合的精度越高

5 平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$两的夹角均为$60^\circ$，且$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，$|\overrightarrow{AA_1}|=3$，则$|\overrightarrow{AC_1}|=$（ ）．

A. $8$　　B. $6$　　C. $5$　　D. $4$

6 下列说法正确的是（ ）．

A. 命题“若$x^2-3x-4=0$，则$x=4$．”的否命题是“若$x^2-3x-4=0$，则$x\neq 4$．”

B. $a>0$是函数$y=x^a$在定义域上单调递增的充分不必要条件

C. $\exists x_0\in(-\infty,0)$，$3^{x_0}<4^{x_0}$

D. 若命题$p:\forall n\in\mathbf{N}$，$3^n>500$，则$\neg p:\exists n_0\in\mathbf{N}$，$3^{n_0}\leqslant 500$

7 设$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1)\\x^2-1,x\in[1,2]\end{cases}$，则$\int_{-1}^{2}f(x)dx$的值为（ ）．

A. $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{\pi}{2}+3$　　C. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}+3$

8 甲乙二人争夺一场围棋比赛的冠军，若比赛为“三局两胜”制，甲在每局比赛中获胜的概率均为$\dfrac{3}{4}$，各局比赛结果相互独立且没有平局，则在甲获得冠军的条件下，比赛进行了三局的概率为（ ）．

A. $\dfrac{4}{5}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

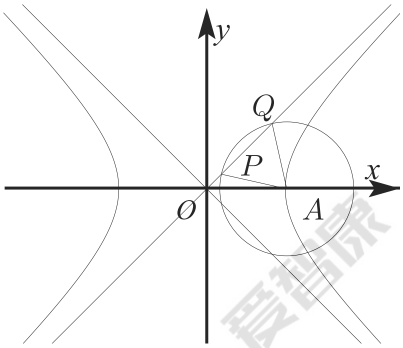
9 已知命题$p$：不等式$ax^2+ax+1>0$的解集为$\mathbf{R}$，则实数$a\in(0,4)$；命题$q$：若$a+b=c+d=1$，$ac+bd>1$，则实数$a$，$b$，$c$，$d$中少有1个为负数，则下列命题正确的是（ ）．

A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge(\neg q)$　　C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge q$

10 已知函数$f(x)=kx^2-\ln x$，若$f(x)>0$函数定义域内恒成立，则实数$k$的取值范围是（ ）．

A. $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2\mathrm{e}},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　C. $\left(-\infty,\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\right)$　　D. $\left(\dfrac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$

11 如图，已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点为$A$，$O$为坐标原点，以$A$为圆心的圆与双曲线$C$的某渐近线交于两点$P$、$Q$，若$\angle PAQ=60^\circ$且$\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OP}$，则双曲线$C$的离心率为（ ）.




A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{39}}{6}$　　D. $\sqrt{3}$

12 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，其导函数为$f'(x)$，若$f'(x)<f(x)$，且$f(x+1)=f(3-x)$，$f(2017)=2$，则不等式$\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}<\dfrac{2}{\mathrm{e}}$的解集为（ ）.

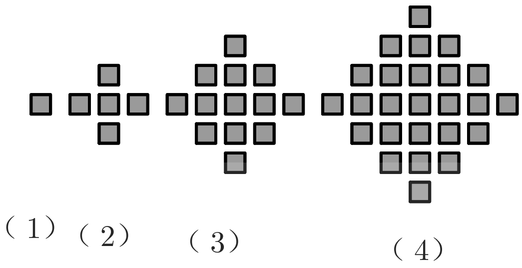
A. $(1,+\infty)$　　B. $(\mathrm{e},+\infty)$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $\left(-\infty,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

## 二、填空题（共4小题，每小题5分，共20分）

13 有5 名学生站成一排照相，其中甲、乙两人必须站在一起的排法有 ______ 种.

14 二项式$\left(\sqrt{3}x+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$的展开式中只有第5项的二项式系数最大，则展开式中的常数项为 ______ .

15 某少数民族的刺绣有着悠久的历史，下图（1）、（2）、（3）、（4）为她们刺绣最简单的四个图案，这些图案都是由小正方形构成，小正方形数越多刺绣直漂亮；现按同样的规律刺绣（小正方形的摆放规律相同），设第$n$个图形包含$f(n)$个小正方形，则$f(6)=$ ______ ，$f(n)=$ ______ .





16 设$O$为坐标原点，$P$是以$F$为焦点的抛物线$y^2=2p\left(p>0\right)$上任意一点，$M$是线段$PF$上的点，且$|PM|=2|MF|$，则直线$OM$的斜率的最大值为______．

## 三、解答题（本大题共6小题，共70分）

17 已知数列$\dfrac{1}{1\times4}$，$\dfrac{1}{4\times7}$，$\dfrac{1}{7\times10}$，$\cdots\cdots$，$\dfrac{1}{(3n-2)\times(3n+1)}$，$\cdots\cdots$，其前$n$项和为$S_n$．

（1）计算$S_1$，$S_2$，$S_3$．

（2）猜想$S_n$的表达式，并给出证明．

18 2016年1月1日起全国统一实施全面两孩政策，为了解适龄民众对放开生育二胎政策的态度，某市选取70后和80后作为调查对象，随机调查了100位，得到数据如下表：

| | 生二胎 | 不生二胎 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 70后 | 30 | 15 | 45 |
| 80后 | 45 | 10 | 55 |
| 合计 | 75 | 25 | 100 |

（1）以这100个人的样本数据估计该市的总体数据，且以频率估计概率，若从该市70后居民中随机抽取4位，记其中生二胎的人数为$X$，求随机变量$X$的分布列和数学期望值．

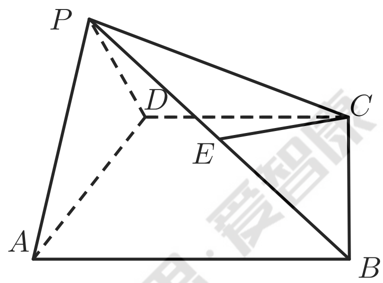
（2）根据调查数据，是否有$90\%$以上的把握认为“生二胎与年龄有关”，并说明理由．

附参考数据：

| $P\left(K^2\geqslant k\right)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |

（参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(a+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$）

19 如图所示，四棱锥$P-ABCD$的底面是梯形，且$AB//CD$，$AB\perp$面$PAD$，$E$是$PB$的中点，$CD=PD=AD=\dfrac{1}{2}AB$．




（1）求证：$CE\perp$平面$PAB$．

（2）若$PA=2$，$AB=4$，求直线$CE$与平面$PDC$所成角的大小．

20 已知椭圆$C$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，且过点$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$．若点$M(x_0,y_0)$在椭圆$C$上，则点$N\left(\dfrac{x_0}{a},\dfrac{y_0}{b}\right)$称为点$M$的一个“椭点”．

（1）求椭圆$C$的标准方程．

（2）若直线$l:y=kx+m$与椭圆$C$相交于$A$，$B$两点，且$A$，$B$两点的“椭点”分别为$P$，$Q$，以$PQ$为直径的圆经过坐标原点，试判断$\triangle AOB$的面积是否为定值？若为定值，求出定值；若不为定值，说明理由．

21 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$在$x=\ln 2$处的切线方程为$y=x-2\ln 2$．

（1）求函数$f(x)$的单调区间．

（2）若$k$为整数，当$x>0$时，$(k-x)f'(x)<x+1$恒成立，求$k$的最大值（其中$f'(x)$为$f(x)$的导函数）．

22 在平面直角坐标系$xOy$中，圆$C$的参数方程为$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos t\\ y=-1+\sqrt{2}\sin t\end{cases}$（$t$为参数），在以原点$O$为极点，$x$轴的非负半轴为极轴建立的极坐标系中，直线$l$的极坐标方程为

$\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$A$，$B$两点的极坐标分别为$A\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$B(1,\pi)$．

（1）求圆$C$的普通方程和直线$l$的直角坐标方程．

（2）点$P$是圆$C$上任一点，求$\triangle PAB$面积的最大值．